

**ANÁLISE EM MALHA FECHADA DO CONTROLADOR GENERALIZED  
PREDICTIVE CONTROL (GPC)**

**Anderson Luiz Cavalcanti**

Professor do Departamento Acadêmico de Informática e Indústria - UNEDZN/CEFETRN.

E-mail: [anderson@cefetrn.br](mailto:anderson@cefetrn.br)

---

**RESUMO**

O presente trabalho tem o objetivo de apresentar uma análise em malha fechada do controlador *Generalized Predictive Control* (GPC). Esta análise visa observar, com detalhes, as características deste tipo de controlador. Os detalhes apresentados são de extrema importância na análise de estabilidade robusta. Alguns resultados de simulação são apresentados.

**PALAVRAS-CHAVE:** Controle preditivo, sistemas em malha fechada.

**CLOSED-LOOP ANALYSIS OF GENERALIZED PREDICTIVE CONTROL  
(GPC)**

**ABSTRACT**

This paper presents a closed loop analysis of Generalized Predictive Control GPC. This analysis observes, in details, the features of this kind of predictive controller. The details showed are very important in robust stability analysis. Simulation results are shown.

**KEY-WORDS:** Predictive control, closed-loop systems.

## ANÁLISE EM MALHA FECHADA DO CONTROLADOR GENERALIZED PREDICTIVE CONTROL (GPC)

### INTRODUÇÃO

O controlador preditivo generalizado (GPC) foi proposto por (Clarke et al., 1987) com o intuito de suprir deficiências apresentadas pelos controladores preditivos existentes. O GPC vem se tornando um dos controladores mais populares tanto na indústria quanto na academia devido ao sucesso em aplicações industriais (Volk *et al.*, 2004) e (Richalet, 1993), principalmente em sua abordagem multivariável e com tratamento de restrições.

O controlador em questão utiliza um modelo paramétrico do tipo Auto-regressivo, integral, média móvel, com sinal exógeno (ARIMAX) e seu algoritmo calcula uma seqüência de ações de controle que minimizam uma certa função objetivo multi-passo. Esta função objetivo é definida dentro de um horizonte de predição, com ponderação da ação de controle. O conceito de horizonte móvel (ou horizonte retrocedente) é empregado neste controlador. Neste contexto, o presente trabalho apresenta a formulação clássica do GPC na sua forma monovariável, ressaltando detalhes de desempenho em malha fechada do mesmo.

### FORMULAÇÃO DO CONTROLADOR

Um modelo linear descreve o comportamento de um sistema dinâmico em torno de um determinado ponto de operação. Existem diversas formas de representação, através de modelos lineares, de um sistema dinâmico. O GPC se baseia no modelo ARIMAX o qual, sua forma (SISO), é apresentada:

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d} B(q^{-1})u(k-1) + C(q^{-1})\frac{e(k)}{\Delta} \quad \text{equação (1)}$$

em que  $q^{-1}$  representa o operador de atraso;  $y(k)$  representa a saída do sistema no instante  $k$ ;  $u(k)$  representa a entrada do sistema no instante  $k$ ;  $\Delta$  representa o operador de integração, sendo dado por  $\Delta = 1 - q^{-1}$ ;  $d$  representa o atraso natural, em múltiplos do período de amostragem;  $e(k)$  representa a presença, no instante  $k$ , de um ruído branco de média zero e variância  $\sigma^2$ .

Os polinômios  $A(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})$  e  $C(q^{-1})$  são dados por:

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na} \quad \text{equação (2)}$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb} \quad \text{equação (3)}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{nc} q^{-nc} \quad \text{equação (4)}$$

em que  $na$ ,  $nb$  e  $nc$  são os graus dos polinômios  $A(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})$  e  $C(q^{-1})$ , respectivamente.

O modelo apresentado em (1) ainda pode ser representado da seguinte forma:

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k) = q^{-d} B(q^{-1})\Delta u(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad \text{equação (5)}$$

em que  $\tilde{A}(q^{-1}) = \Delta A(q^{-1})$ . Por uma questão de simplicidade, neste trabalho, apenas o caso particular em que  $C(q^{-1}) = 1$  é apresentado e também implementado. Neste caso, o modelo descrito na equação (5) se resumiria a:

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k) = q^{-d} B(q^{-1})\Delta u(k-1) + e(k) \quad \text{equação (6)}$$

A partir do modelo definido em (6), uma predição  $i$ -passos à frente do sinal de saída do sistema é definida multiplicando (6) por  $q^i$ :

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k+i) = q^{-d} B(q^{-1})\Delta u(k+i-1) + e(k+i) \quad \text{equação (7)}$$

Na equação apresentada em (7),  $y(k+i)$  depende de valores passados e futuros das variáveis, ou seja, entrada, saída e ruído. Em contrapartida, é conhecido que a melhor estimativa de  $y(k+i)$ , ou seja,  $\hat{y}(k+i)$ , deve satisfazer a seguinte condição:

$$\hat{y}(k+i) = \min_r \mathcal{E}\{[y(k+i) - r]^2\} \quad \text{equação (8)}$$

cuja solução é dada por:

$$\hat{y}(k+i) = \mathcal{E}\{y(k+i)\} \quad \text{equação (9)}$$

O estimador apresentado é conhecido como estimador de Bayes, ou estimador de risco quadrático mínimo. Assim, quando  $e(k)$  é um ruído branco, gaussiano, de média zero, a melhor estimativa de  $y(k+i)$ , é o seu valor determinístico. Dessa forma, com o objetivo de separar a dependência de  $y(k+i)$ , das informações passadas e futuras, introduz-se a seguinte identidade polinomial, conhecida como equação diofantina:

$$\frac{1}{\tilde{A}(q^{-1})} = E_i(q^{-1}) + q^i \frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} \quad \text{equação (10)}$$

sendo:

$$E_i(q^{-1}) = e_{i,0} + e_{i,1}q^{-1} + \dots + e_{i,i-1}q^{-(i-1)} \quad \text{equação (11)}$$

$$F_i(q^{-1}) = f_{i,0} + f_{i,1}q^{-1} + \dots + e_{i,na}q^{-(na-1)} \quad \text{equação (12)}$$

Substituindo (10) em (7) tem-se:

$$y(k+i) = q^{-d} B(q^{-1})E_i(q^{-1})\Delta u(k+i-1)F_i(q^{-1})y(k) + E_i(q^{-1})e(k+i) \quad \text{equação (13)}$$

Devido ao fato de o grau de  $E_i(q^{-1})$  ser  $i-1$ , então o termo referente ao ruído, na expressão anterior, refere-se ao futuro, de forma que a melhor predição de  $y(k+i)$  é:

$$\hat{y}(k+i) = q^{-d} B(q^{-1})E_i(q^{-1})\Delta u(k+i-1) + F_i(q^{-1})y(k) \quad \text{equação (14)}$$

Fazendo  $H_i(q^{-1}) = E_i(q^{-1})B(q^{-1})$ , teremos:

$$\hat{y}(k+i) = H_i(q^{-1})\Delta u(k-d+i-1) + F_i(q^{-1})y(k) \quad \text{equação (15)}$$

Fazendo  $H_i(q^{-1}) = H_{f,i}(q^{-1}) + q^{-i}H_{p,i}(q^{-1})$  teremos que:

$$\hat{y}(k+i) = H_{f,i}(q^{-1})\Delta u(k-d+i-1) + H_{p,i}(q^{-1})\Delta u(k-d-1) + F_i(q^{-1})y(k) \quad \text{equação (16)}$$



obtenção da matriz  $H$ , visto que a mesma pode ser obtida a partir da resposta ao degrau unitário do sistema.

A função objetivo mostrada na equação (17) pode ser reescrita da seguinte forma matricial:

$$J(\Delta U) = (\hat{Y} - R)^T (\hat{Y} - R) + \lambda \Delta U^T \Delta U \quad \text{equação (21)}$$

em que  $R = [r(k+1) \quad r(k+2) \quad \dots \quad r(k+NY)]^T$ . Substituindo (19) em (21) teremos:

$$J(\Delta U) = (F + H\Delta U - R)^T (F + H\Delta U - R) + \lambda \Delta U^T \Delta U \quad \text{equação (22)}$$

A equação (22) ainda pode ser reescrita da seguinte forma:

$$J(\Delta U) = \frac{1}{2} \Delta U^T G \Delta U + f^T \Delta U + c \quad \text{equação (23)}$$

em que  $G = 2(H^T H + \lambda I)$ ;  $f^T = 2(F - R)^T G$  e  $c = (F - R)^T (F - R)$

A solução analítica de (23), na ausência de restrições, é obtida a partir do cálculo do gradiente  $\partial J / \partial \Delta U$ . O gradiente apresentado é igualado a zero, o que produz a seguinte solução ótima:

$$\Delta U = G^{-1} f = (H^T H + \lambda I)^{-1} H (F - R) \quad \text{equação (24)}$$

É importante observar que a matriz  $(H^T H + \lambda I)$  é sempre inversível para  $\lambda > 0$  e que o parâmetro  $\lambda$  regula a “agressividade” do controlador. Outro detalhe importante a ser observado é que se  $(F - R) = 0$ , ou seja, se a evolução livre do sistema atinge o objetivo, então não há incrementos de controle calculados.

Como o GPC faz uso do princípio do horizonte móvel, apenas o primeiro elemento da seqüência  $\Delta U$  é enviado ao processo. O primeiro elemento da referida seqüência pode ser calculado da seguinte forma:

$$\Delta u(k) = K(F - R) \quad \text{equação (25)}$$

em que  $K$  é a primeira linha da matriz  $(H^T H + \lambda I)^{-1} H$ .

## ANÁLISE EM MALHA FECHADA

Para a análise em malha fechada, consideraremos a trajetória de referência  $R$  como constante. Dessa forma, podemos reescrever (25) da seguinte forma:

$$\Delta u(k) = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_N] \begin{bmatrix} R - F_{d+1}(q^{-1})y(k) - H_{p,d+1}(q^{-1})\Delta u(k-1) \\ R - F_{d+2}(q^{-1})y(k) - H_{p,d+2}(q^{-1})\Delta u(k-1) \\ \vdots \\ R - F_{d+N}(q^{-1})y(k) - H_{p,d+N}(q^{-1})\Delta u(k-1) \end{bmatrix} \quad \text{equação (26)}$$

ou ainda:

$$\Delta u(k) = k_1 R - k_1 F_{d+1}(q^{-1})y(k) - k_1 H_{p,d+1}(q^{-1})\Delta u(k-1) - \dots - k_N R - k_N F_N(q^{-1})y(k) - k_N H_{p,N}(q^{-1})\Delta u(k-1) \quad \text{equação (27)}$$

Colocando  $R$  em evidência, teremos que:

$$\Delta u(k) = R\bar{K} - F_s(q^{-1})y(k) - \Delta u(k-1)H_s(q^{-1}) \quad \text{equação (28)}$$

em que:

$$F_s(q^{-1}) = \sum_{i=1}^N k_i F_{i+d}(q^{-1}) \quad \text{equação (29)}$$

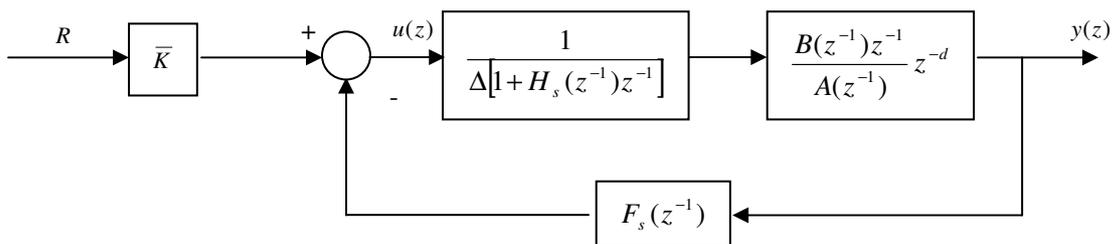
$$H_s(q^{-1}) = \sum_{i=1}^N k_i H_{p,i+d}(q^{-1}) \quad \text{equação (30)}$$

$$\bar{K} = \sum_{i=1}^N k_i \quad \text{equação (31)}$$

Escrevendo (28) no domínio da transformada  $z$  e em função de  $u(z)$  temos que:

$$u(z^{-1}) = \frac{R\bar{K} - F_s(z^{-1})y(z)}{\Delta[1 + H_s(z^{-1})z^{-1}]} \quad \text{equação (32)}$$

O diagrama de blocos da Figura 1 representa a equação (32).



**Figura 1 – GPC – Malha fechada**

A partir do diagrama de blocos da Figura 1, observa-se que o GPC é formado por um pré-compensador estático  $\bar{K}$  e que a saída realimentada é filtrada por  $F_s(z^{-1})$ . A pré-compensação  $\bar{K}$  é um ganho transducional para que o sinal realimentado se adéqüe ao ganho estático do filtro  $F_s(z^{-1})$ . A ação integral é mostrada de forma explícita na Figura 1.

## RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Considerando um sistema cujo modelo linear que o descreve, com período de amostragem de  $0.1s$ , é dado por:

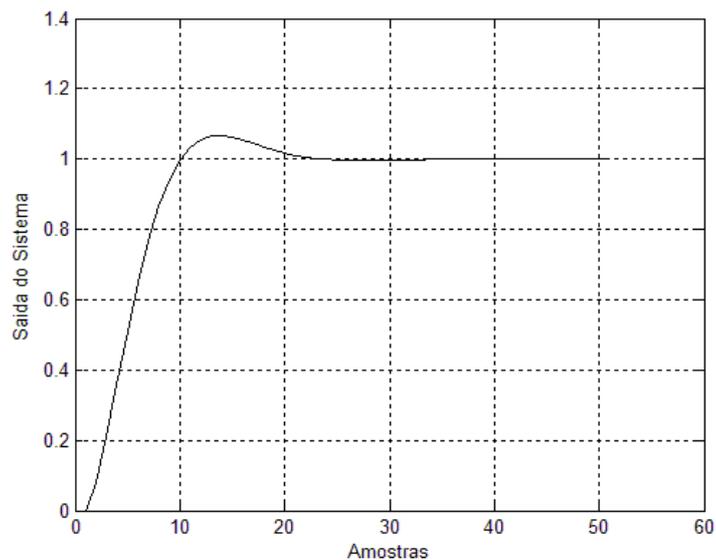
$$G(z^{-1}) = \frac{0.09878z^{-1} - 0.07434z^{-2}}{1 - 1.646z^{-1} + 0.6703z^{-2}}$$

Neste caso, sua representação através de um modelo ARIMAX é dada pelos seguintes polinômios:

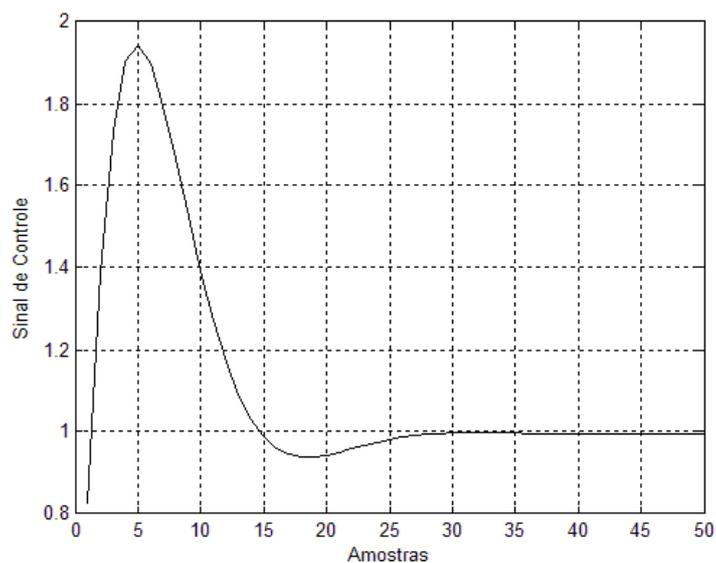
$$A(q^{-1}) = 1 - 1.646q^{-1} + 0.6703q^{-2}$$

$$B(q^{-1}) = 0.09878 - 0.07434q^{-1}$$

O modelo em questão informa que o sistema possui atraso  $d = 0$ . Dessa forma, podemos definir os seguintes parâmetros para predição:  $N_1 = d + 1 = 1$ ,  $NY = N$  e  $NU = N$ . Para essa simulação, foi escolhido  $N = 6$ . As Figuras 2 e 3 mostram a simulação utilizando o controlador GPC apresentado. Uma ponderação  $\lambda = 1$  sobre o sinal de controle foi escolhida. A referência aplicada foi um degrau unitário  $R = 1$ .



**Figura 2 - Sistema SISO controlado com GPC Linear**



**Figura 3 - Sinal de controle do sistema SISO controlado com GPC Linear**

Em malha fechada, os parâmetros apresentados na Figura 1 são:

$$\bar{K} = 0,8264$$

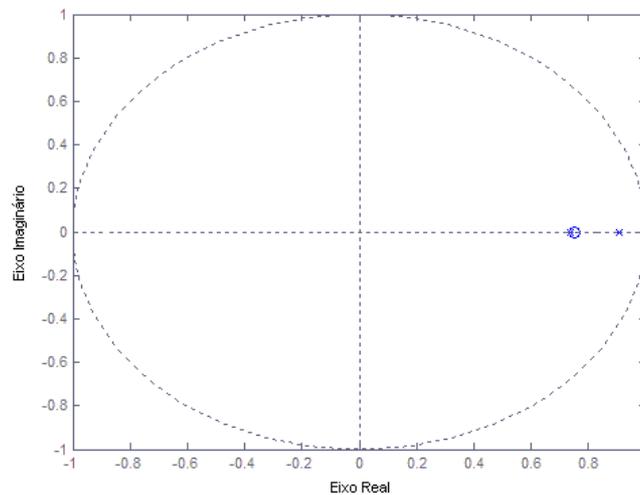
$$F_s(z) = \frac{7,4924z^2 - 10,4630z + 3,7970}{z^2}$$

$$H_s(z) = -0,4211$$

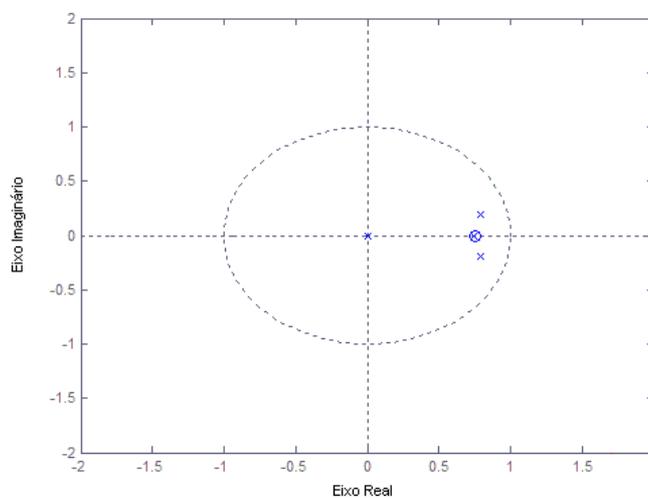
O ganho estático de  $F_s(z)$  é igual a  $\bar{K}$ , ou seja, 0,8264. A partir das expressões mostradas na Figura 1, calculam-se os pólos introduzidos pelo controlador no sistema, que são:  $z = 1$  e  $z = 0,4211$ . O pólo em  $z = 1$  garante erro de rastreamento nulo para referências constantes. A função de transferência de malha fechada é dada por:

$$g_0(z) = \frac{0,08163z - 0,06144}{z^4 - 2,327z^3 + 1,84z^2 - 0,4928z}$$

Os pólos e zeros em malha aberta e malha fechada são mostrados nas Figuras 4 e 5.



**Figura 4 - Localização dos Pólos e Zeros do sistema em malha aberta dentro do círculo unitário**



**Figura 5 - Localização dos Pólos e Zeros do sistema em malha fechada dentro do círculo unitário**

## CONCLUSÕES

A análise apresentada neste trabalho viabiliza o estudo da estabilidade robusta do GPC. Este controlador possui certo grau de robustez. A literatura tem mostrado, no entanto, que diversas técnicas vêm melhorando o desempenho deste controlador. Uma das técnicas bastante conhecidas é a substituição do cálculo tradicional da resposta livre por um Preditor de Smith, também conhecido como SPGPC. O entendimento detalhado da formulação do GPC em malha fechada proporciona também uma melhor compreensão global deste controlador, no sentido da proposição de melhorias para o mesmo em termos de rejeição a perturbações e supressão de ruídos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. CLARKE, D. W., MOHTADI, C., TUFFS, P.S. Generalized Predictive Control. Part I. The Basic Algorithm. *Automatica*, 23(2):137-148, 1987.
2. RICHALET, J. Industrial Applications of Model Based Predictive Control. *Automatica*, 29(5):1951-1274, 1993.
3. VOLK, U., KNIESE, D.W., HAHN, R., HABER, R., SCHMITZ, U. Optimized multivariable predictive control of an industrial distillation column considering hard and soft constraints. *Control Engineering Practice*, 13(2005):913-927, 2004.