



INSTITUTO FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CAMPUS NATAL – CENTRAL / DIRETORIA DE PESQUISA E INOVAÇÃO
MESTRADO NACIONAL PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA
POLO 10

PRODUTO EDUCACIONAL

ALGODOO E A DINÂMICA ROTACIONAL: UMA PROPOSTA
DIDÁTICA INTERATIVA PARA O ENSINO DE ENERGIA CINÉTICA DE
ROTAÇÃO E ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO MEDIADA PELO
USO DO SOFTWARE ALGODOO

Anderson Gomes da Silva
Melquisedec Lourenço da Silva

Natal/RN
2025

Este produto educacional é parte integrante da dissertação: UMA PROPOSTA DIDÁTICA INTERATIVA PARA O ENSINO DE ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO E ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO MEDIADA PELO USO DO SOFTWARE ALGODOO, desenvolvida no âmbito do Programa de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física, polo 10 – IFRN Natal-RN, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

AGRADECIMENTO

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – código de financiamento 001.

O material apresentado neste documento pode ser reproduzido livremente desde que citada a sua fonte. As imagens apresentadas são de propriedade dos respectivos autores ou produção própria e utilizadas para fins didáticos. Caso sinta que houve violação de seus direitos autorais, por favor, contate os autores para solução imediata do problema. Este documento é veiculado gratuitamente, sem nenhum tipo de retorno comercial a nenhum dos autores, e visa apenas a divulgação do conhecimento científico.

Os Materiais utilizados na produção deste trabalho podem ser acessados gratuitamente pelo QR-Code:



Ou pelo *link*:

https://drive.google.com/drive/folders/1EkYmAf5b-KmUsw2HWBCBmlbR9jwXwiIS?usp=drive_link

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	6
O PROGRAMA <i>ALGODOO</i>	9
SUGESTÃO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL.....	13
A Sequência Didática.....	13
Passos da aplicação do produto educacional	16
Informações sobre a proposta de aplicação da sequência didática.....	17
Adaptação da Proposta: Uma versão reduzida para aplicação em menos tempo	22
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	26
APÊNDICE A – MATERIAIS A SEREM UTILIZADOS NA SD	28
APÊNDICE B – EBOOK.....	62

APRESENTAÇÃO

Desde sempre, o processo de ensino-aprendizagem foi predominantemente baseado na aprendizagem mecânica do indivíduo e essa metodologia é a mais usada nas escolas até os dias de hoje Moreira (2012). Com o avanço tecnológico e o surgimento das mídias digitais, o professor precisa se adequar a essas mudanças para atender as exigências da sociedade atual (Aguilar *et al*, 2020).

Pensando nisso, produzimos um *ebook* intitulado “*Algodoo e a Dinâmica Rotacional*”, que se justifica pela necessidade de melhoria da qualidade do ensino de Física, principalmente fazendo uso de recursos tecnológicos; e tem como objetivo geral potencializar o ensino de Física com o auxílio de um *software* computacional gratuito de simulação de fenômenos físicos.

Como objetivos específicos, podemos citar:

- Criar um material didático, interativo e gratuito para professores e alunos usarem como recurso pedagógico quanto ao ensino-aprendizagem de Física com o auxílio do software nas aulas;
- Trabalhar a Dinâmica Rotacional com maior ênfase no Ensino Básico com o auxílio do *Algodoo*;
- Criar atividades interativas e desafiadoras que explorem as funcionalidades do aplicativo;
- Proporcionar ao aluno uma experiência de aprendizagem mais rica e significativa;
- Disseminar o uso do software computacional de simulação física na comunidade escolar.

Esses objetivos estão alinhados à Base Nacional Comum Curricular, que busca, entre outros fatores, fazer uso da tecnologia para potencialização da aprendizagem no ensino de Ciências da Natureza e Suas Tecnologias (Brasil, 2018).

O livro digital compõe um produto educacional a ser aplicado em sala de aula e trata sobre a dinâmica do movimento de rotação e a aplicação desses conceitos em simulações virtuais de Física com o uso de um *software* educacional computacional (*Algodoo*). Seu nível de conteúdo está mais voltado para o Ensino Médio, uma vez que foi construído para ser aplicado nessa etapa. No entanto, ele também pode ser usado por alunos e professores da graduação, pois possui um pequeno resumo de linguagem conceitual e matemática desse nível.

Obras como (Ferraro; Penteado; Torres, 2012), (Gogoy; Agnolo; MELO, 2020), (Halliday; Resnick; Walker, 2016), (Martini *et al*, 2016), (Nussenzveig, 2002), (Ramalho;

Ferraro; Soares, 2015) e (Young; Freedman, 2008), além de outras plataformas, como o *YouTube* e o próprio *site* do *Algodoo*, foram as referências bibliográficas para o embasamento teórico da escrita do *ebook*.

A teoria é dividida em 12 capítulos sobre a **Dinâmica Rotacional** e toda a estrutura do *ebook* se dá como mostra a tabela a seguir.

Tabela 1 - Estrutura do *Ebook*

ESTUTURA DO <i>EBOOK</i>	
ELEMENTOS PRÉ-TEXTUAIS	CAPA
	CONTRACAPA
	EPÍGRAFE
	APRESENTAÇÃO
	LISTA DE FIGURAS
	SUMÁRIO
ELEMENTOS TEXTUAIS “CAPÍTULOS”	CAPÍTULO 1 – ROTAÇÃO
	CAPÍTULO 2 – CONEXÕES ENTRE AS VARIÁVEIS LINEARES E AS ANGULARES
	CAPÍTULO 3 – MOVIMENTOS CIRCULARES ACOPLADOS
	CAPÍTULO 4 – ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO
	CAPÍTULO 5 – TORQUE
	CAPÍTULO 6 – TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO
	CAPÍTULO 7 – ROLAMENTO
	CAPÍTULO 8 – ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO
	CAPÍTULO 9 – AS FORÇAS DE ROLAMENTO
	CAPÍTULO 10 – REVISANDO O TORQUE
	CAPÍTULO 11 – MOMENTO ANGULAR
	CAPÍTULO 12 – CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR
ELEMENTOS PÓS-TEXTUAIS	RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS
	APRESENTAÇÃO DO AUTOR
	QUARTA CAPA (VERSO DO LIVRO)

Fonte: Elaborada pelos autores.

Como mostrado na tabela acima, o *ebook* também conta com toda a estrutura de um livro comum, contendo, além dos capítulos destinados à teoria dos conteúdos, Capa, Contracapa, Epígrafe, Apresentação, Lista de Figuras, Sumário, Respostas dos Exercícios

Propostos, Referências Bibliográficas, Apresentação do Autor e capa de verso do livro.

Além disso, todos os capítulos contam com **Figuras, Tabelas, Equações, Exercícios Resolvidos, Exercícios Propostos e Revisão** do conteúdo abordado no capítulo e, quando necessário, também há um tópico chamado **Saiba mais...**, destinado a apresentar uma linguagem, principalmente de cálculo, a nível de graduação para aqueles alunos ou professores que desejam se aprofundar um pouco mais, mesmo que o conteúdo de todos os capítulos sejam focados na linguagem de Ensino Médio.

Ademais, os capítulos também contam, principalmente, com o tópico **Usando o Algodoo**, que consiste na demonstração do conteúdo estudado em simulação no programa computacional, em que o leitor pode acessar as simulações por meio de *links*. Também é possível fazer o *download* do *software* gratuitamente e visualizar, inclusive, a vídeos com tutoriais, produzidos pelos autores, de como fazer as simulações. Nesse tópico, também são disponibilizados **Tarefas Propostas**, que correspondem a laboratórios digitais, os quais são conexas com o aplicativo e permitem que os usuários realizem atividades relacionadas com o conteúdo estudado no capítulo e possa interagir com o *software* para ter acesso à simulação que trará o gabarito do exercício feito.

Os vídeos com os tutoriais das simulações no *software* usados em todo o livro podem ser acessados escaneando, com o *smarthphone*, o QR Code da figura a seguir e tendo acesso à *playlist* do Canal Anderson Silva, no *YouTube*, o qual é um dos autores da obra.

Figura 1 - QR Code dos tutoriais das simulações do *Algodoo*



Ou clique em:

https://youtube.com/playlist?list=PLJ9tsFeU6BHFYXseU1QOneZYiSy5LdyQX&si=b9r2e8Yq5Mjn_l3t

Fonte: MEQR (gerador de QR Code) – Disponível em <<https://me-qr.com/pt>>.

Como o código foi criado por uma página de terceiros, é preciso clicar, depois de ser direcionado ao *site* do gerador do QR code, em “Pular anúncio” para ter acesso aos vídeos.

O PROGRAMA *ALGODOO*

A palavra *Algodoo* é a junção das palavras em inglês “*Algorithm*” e “*Do*”, que significam algoritmo e fazer, respectivamente, e se refere a um aplicativo de simulação desenvolvido, a princípio, por Emil Ernerfeldt da Universidade Umea, Suécia, em 2008, como objeto de sua dissertação de Mestrado (Batista *et al*, 2022). Nele, podemos criar várias simulações de física em duas dimensões (2D).

Trata-se de um programa gratuito que, com ferramentas de desenho muito simples, como molas, engrenagens, motores, cordas, *lasers*... permite o usuário criar várias simulações de física em duas dimensões (2D) para própria diversão ou para fins pedagógicos. O *software* não tem restrição de idade e possui uma comunidade ativa *online*, por meio de um fórum contigo na sua própria página da *internet*.

O simulador pode ser usado para o ensino de ciências e física, permitindo ser abordado algumas áreas como Cinemática, Dinâmica, Óptica, por exemplo, sendo muito flexível quanto à interatividade das simulações e à hospedagem do conteúdo. Segundo Batista *et al*. (2022, p. 1),

Esse simulador é utilizado para o ensino de física e permite estudar diversos fenômenos de áreas diversas como Cinemática, Dinâmica, Óptica, Fluidos e Teoria Cinética dos gases entre outros, tendo sempre a opção de alterar a restituição dos corpos, o atrito com a superfície e com o ar, a força gravitacional, a textura, cor, distância e inúmeros outros recursos que permitem ao usuário desenvolver diversas atividades e relacionar a influência das variáveis físicas envolvidas. Outra característica positiva é que o usuário pode alterar a frequência das simulações podendo adequar a capacidade de cada computador.

Na página oficial do aplicativo, disponível no endereço eletrônico “<http://www.algodoo.com/>”, contém várias referências que visam atrair o interesse do usuário para a disseminação do seu uso, como, por exemplo, enfatizar que o *software* parece uma ideia muito interessante e está disponível gratuitamente para ser baixado nas plataformas *Windows* ou *Mac* e também no *IPad*, além de oferecer a oportunidade de o próprio usuário criar, por meio de ferramentas de desenho simples, simulações para explorar o universo da Física (Algodoo, c2024).

A página também se preocupa em oferecer vários exemplos inspiradores de simulações e conta com um banco de dados de simulações de outros usuários que oferecem uma experiência mais integral ao seu utilizador.

Para o uso do *Algodoo*, é necessário fazer o *download* do programa na sua página da

internet e possuir o programa Java instalado no computador. Para Windows, esse último programa pode ser baixado no link “<https://www.java.com/pt-BR/>”. Possuindo uma interface originalmente em inglês, é possível instalar a extensão em português no endereço eletrônico “<http://www.algodoo.com/forum/viewtopic.php?f=30&t=12229&p=86459&hilit=tradu%C3%A7%C3%A3o&sid=2ed19f082184cf645d2a3a6a7d9a9be8#p86459>” para facilitar o uso de usuários que dominam esse idioma. O download da extensão em Português Brasil também pode, em caso de problemas de acesso com o link anterior, ser realizado em “https://drive.google.com/file/d/1qyqYVmbPE1gQ9OmASdNgV_sRnKXg0Bpn/view?usp=drive_link”.

Figura 2 - Captura de tela da página oficial do Algodoo na internet



Fonte: Site do Algodoo – Disponível em: <<http://www.algodoo.com/>> Acesso em 12 mar 2024.

Para facilitar o manuseio do recurso pelos usuários, é possível, no *software*, salvar os progressos das interações realizadas. Essas simulações salvas podem ficar disponíveis de duas formas: apenas para o autor da simulação, onde ele pode salvar e compartilhar de maneira

privativa os cenários com outras pessoas que fazem uso do programa; e pelo *Algobox*, o qual representa o armazém *online* para compartilhar cenários (Algodoo, c2024).

O *Algobox* está disponível no site oficial do *Algodoo* e qualquer pessoa que visite a página pode ter acesso às simulações lá disponíveis, o que torna esse recurso computacional em uma ferramenta extremamente útil para potencializar o ensino de Física.

Figura 3 - Ferramenta "Salvar e compartilhar cenários" no *Algodoo* e *Algobox*



Fonte: Em a, captura de tela do aplicativo. Em b, captura de tela do *site* do *Algodoo* – Disponível em: <http://www.algodoo.com/> Acesso em 01 maio 2024.

O *Algodoo* possui uma interface bastante dinâmica e interativa, como mostrado na Fig. 3, que permite o usuário aprender facilmente como manuseá-lo e começar a criar suas próprias interações, permitindo, inclusive, que profissionais da educação consigam montar seus planos de aulas com auxílio desse recurso computacional educacional, ou até mesmo sequências didáticas para tornar suas aulas mais interativas e significativas.

Figura 1 - Página inicial do *Algodoo* com idioma Português Brasil instalado



Fonte: Captura de tela da página inicial do *Algodoo*.

A seguir, está detalhada, em forma, principalmente, de sugestão, uma metodologia de

aplicação do produto educacional que usará o *Algodoos* por meio de uma sequência didática baseada nas UEPS de Marco Antônio Moreira (2011). Em primeira mão, traremos uma sequência didática bastante detalhada que busca extrair ao máximo todos os recursos do livro digital e da SD escolhida. Ao final, uma forma simplificada também será apresentada, buscando atingir profissionais que desejam usar este material de forma bem mais objetiva e dinâmica.

SUGESTÃO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

Nesta seção, faremos o detalhamento de um percurso metodológico para aplicação do produto educacional, que deve ser usado, inclusive, por professores em sua prática educativa. De forma detalhada, vamos organizar as informações de como poderá ser a sua aplicabilidade; quais serão as ferramentas necessárias para isso; a que público-alvo se destina; uma relativa duração da SD e as etapas que deverão ser seguidas.

Fugindo da abordagem mecânica de ensino, a qual é focada incisivamente na repetição e memorização, e baseada na Teoria de Aprendizagem Significativa de Ausubel (1968), o produto educacional, o qual contém o *ebook* com título “*Algodoo e a Dinâmica Rotacional*”, que tem como principal característica o uso de um *software* computacional (*Algodoo*) para alinhar a teoria dos conteúdos do livro à prática por meio de simulações virtuais, será aplicado seguindo uma sequência didática norteada, principalmente, nas UEPS de Marco Antônio Moreira (2011), que busca uma forma eficiente de potencializar a aprendizagem do aluno com ênfase nos seus conhecimentos prévios, pois, segundo o autor, a aprendizagem não pode ser mecânica, mas significativa e crítica (Moreira, 2012).

A Sequência Didática

Antes de se iniciar a aplicação de um conjunto de atividades, é necessário organizá-las para se obter o objetivo desejado. Nesse sentido, surge o conceito de sequência didática, a qual se refere a uma organização bem estruturada e sistematizada de atividades. Zabala (1998, p. 18) define o conceito de sequência didática como um conjunto de atividades bem-organizadas quando fala que

Se realizarmos uma análise destas seqüências buscando os elementos que as compõem, nos daremos conta de que são um *conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos.*

Apesar da proposta de SD aqui estabelecida não ser, necessariamente, fiel em todos os aspectos das UEPS de Moreira (2011), ela está muito próxima e, certamente, mantém os pontos mais relevantes do seu trabalho, como as definições de situações problemas por meio de questionários, verificação de conhecimentos prévios dos alunos e aplicações de pré e pós-testes, por exemplo.

Como o livro digital é relativamente extenso, fizemos aqui, como sugestão, uma SD baseada no conteúdo de dois dos seus doze capítulos (Energia Cinética de Rotação e Energia Cinética de Rolamento) para aplicação. Partindo dessa finalidade e, nesse sentido, os objetivos da SD que será usada para aplicação do produto educacional são:

- Desenvolver unidades de ensino potencialmente significativas, levando em consideração os conhecimentos prévios dos alunos e uma avaliação principalmente contínua durante todo o processo.
- Definir e explicar os conceitos das energias cinéticas de rotação e rolamento de um corpo, relacionando-os com o seu momento de inércia e a sua velocidade angular.
- Identificar situações em que esses tipos de energias relacionadas à rotação e ao rolamento de um corpo são relevantes para a descrição do movimento de um corpo rígido, como na rotação de um disco, de uma esfera ou de um pêndulo.
- Calcular essas energias para diferentes corpos rígidos a partir das suas propriedades geométricas, da distribuição da sua massa e da sua velocidade angular.
- Entender os conceitos de energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento para explicar diferentes fenômenos físicos, como a influência do momento de inércia na estabilidade de objetos em rolamento, como giroscópios e bicicletas, por exemplo.
- Usar um livro eletrônico (*ebook*), que tem como principal característica a utilização de um aplicativo digital, para a potencialização da aprendizagem do aluno por meio de aulas expositivas e práticas.

Esses objetivos estão alinhados à BNCC, que deixa clara a importância do uso de ferramentas digitais em sala de aula quando declara que

[...] propostas de trabalho que possibilitem aos estudantes o acesso a saberes sobre o mundo digital e a práticas da cultura digital devem também ser priorizadas, já que impactam seu dia a dia nos vários campos de atuação social. Sua utilização na escola não só possibilita maior apropriação técnica e crítica desses recursos, como também é determinante para uma aprendizagem significativa e autônoma pelos estudantes (Brasil, 2018, p. 478).

Ainda de acordo com a BNCC (2018, p. 541 e 543), em suas competências específicas e habilidades de Ciências da Natureza e suas Tecnologias no Ensino Médio, a importância da

análise, representação e explicações do conteúdo específico (Energia Cinética de Rotação e Energia Cinética de Rolamento) com uso de aplicativos digitais que será utilizado na aplicação da SD são

[...] **(EM13CNT101)** Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas; [...] **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros).

Essas competências e habilidades trazidas pela BNCC estão pautadas na necessidade de atender a definição de educação trazida pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação, a LDB de 1996, que, em seu art. 1º, define a educação como um processo permanente de construção do conhecimento (Brasil, 1996).

Em relação aos recursos para auxiliar no desenvolvimento da sua SD, e para atender aos seus objetivos, podem ser usados, por exemplo, o uso de quadro negro para aulas expositivas sobre o tema; experimentos simples com objetos do cotidiano; vídeos e animações de fenômenos relacionados à temática com o auxílio de projetor de imagens na sala de aula ou na sala de vídeo da escola; *software* computacional (*Algodo*) para criação de simulações de fenômenos físicos virtuais na sala de aula e no laboratório de informática (Lab. Inf.); questionários e atividades de aprendizagem e avaliação para verificar os conhecimentos pré-existent dos alunos e suas evoluções cognitivas e sociais durante o processo de aplicação da SD; além, é claro, do uso do livro digital, que consiste no material mais relevante do produto educacional que estará sendo aplicado como ferramenta que dará embasamento teórico e prático acerca do conteúdo abordado e do uso do aplicativo.

Para fazer o levantamento e analisar os conhecimentos prévios dos alunos, como também avaliar a evolução dos conhecimentos adquiridos e bem estruturados nas suas estruturas cognitivas, conforme o modelo da TAS de Ausubel, propomos questionários em papel, que tratarão de conceitos do conteúdo que será abordado e também do *software* utilizado em forma de, inicialmente, pré-teste e, posteriormente, em pós-teste, além de avaliações contínuas por meio de observações da participação e do desempenho dos alunos nas atividades escritas e práticas.

A utilização de questionários físicos e bem estruturados, em relação aos questionários virtuais, que possuem inúmeras vantagens significativas por oferecerem um maior alcance e facilidades por causa dos recursos tecnológicos atuais; é de extrema importância para aplicação da SD que será desenvolvida, pois o emprego de questionários virtuais pode trazer problemas quanto ao alcance desejado, pois seu preenchimento fora de um espaço físico pode fazer com que o público alvo não se sinta atraído em respondê-lo, prejudicando, assim, o andar natural da SD (Bastos *et al.*, 2023, p. 631).

Ao final, o aluno também terá a oportunidade de fazer uma autoavaliação para reflexão sobre o próprio processo de aprendizagem, principalmente no que diz respeito ao uso do *Algodoo* como ferramenta de ensino nas aulas de Física, além de ser solicitado um *feedback* a respeito de todo o processo de aplicação da SD e do seu aprendizado.

Passos da aplicação do produto educacional

Como a principal fonte norteadora da SD são as UEPS de Moreira (2011), organizamos um primeiro modelo de aplicação do produto educacional em 18 aulas de 50 minutos cada. Essas aulas estão divididas em 9 encontros de duas aulas cada para facilitar a execução da SD. O número de aulas relativamente alto para aplicação da SD se dá pela busca de aulas mais fluidas, com ênfase na discussão integral dos conteúdos relacionados às energias cinéticas de rotação e rolamento, além das suas respectivas simulações no *Algodoo*.

Consideramos o tempo destinado à aplicação do produto educacional, nessa delimitação de uso de apenas dois dos seus capítulos, suficiente para vencer todas as etapas da sequência didática escolhida, pois a sua aplicação é baseada nas UEPS de Moreira e precisa, no nosso entendimento, de um número de aulas expressivo.

Como já explicado, para satisfazer aos objetivos da sequência didática construída para aplicação do produto educacional, o conteúdo a ser trabalhado em sala de aula durante o processo foi delimitado em apenas dois capítulos do livro digital, pois ele está estruturado muito detalhadamente e sua aplicação na íntegra demandaria um tempo muito maior, quiçá todo um ano letivo.

Na Tab. (2) a seguir, constam as principais informações que devem fazer parte da aplicação do produto educacional, em especial, a do modelo aqui proposto. Nesse caso, o professor deve utilizá-lo de acordo com a sua realidade.

Tabela 2 - Informações relacionadas à aplicação do produto educacional

INFORMAÇÕES SOBRE A APLICAÇÃO DO PRODUTO	
Nome da escola	
Nível de Ensino	
Tipo da escola	
Turma de aplicação do produto	
Turno	
Quantidade de alunos da turma	
Quantidade de aulas	18
Duração da aula	50 min
Quantidade de encontros	9
Duração do encontro	100 min
Duração total de aplicação	2 meses, aproximadamente.
Período do ano letivo	

Fonte: Elaborada pelos autores.

Informações sobre a proposta de aplicação da sequência didática

Seguindo os princípios e os objetivos das UEPS e sua proposta para a criação de uma sequência didática, fundamentada na Teoria de Aprendizagem Significativa de Ausubel, o planejamento das ações, que deverão ocorrer em cada encontro, para garantir que a aplicação do produto educacional ocorra de forma bem satisfatória, atingindo, assim, os objetivos da sequência didática, serão feitos de forma que:

- No primeiro encontro, podem ser exibidos vídeos sobre a temática. Nesse modelo de encontro 1, além da apresentação da SD e aplicação de um pré-teste, deixamos como sugestão dois vídeos do *YouTube*, com títulos “O Que É Energia” e “Energia | Nerdologia”, dos canais “Ciência Todo Dia” e “Nerdologia”, respectivamente; relacionados aos conceitos de energia, seus tipos e as descobertas da Antiguidade que serviram para a evolução da tecnologia em diversas áreas. A aplicação do pré-teste (modelo nos Apêndices) consistirá em um questionário individual com perguntas introdutórias para fazer um diagnóstico da turma referente aos conhecimentos prévios relacionados aos conteúdos e métodos escolhidos e definidos que serão trabalhados durante o processo de aplicação do produto educacional. Como indicação de estudo, o vídeo, do canal “DOCUMENTARIOS HISTÓRICOS”, sobre a evolução do conceito de energia relacionadas às descobertas da Antiguidade, também pode

ser utilizado como material de apoio.

- No segundo, pode ser exposta uma situação-problema relacionada a energia e, principalmente, a energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento, para fazer com que os estudantes reflitam sobre aspectos do seu cotidiano que estejam relacionados com a temática da situação introdutória. Nesse encontro, também sugerimos a realização de um segundo pré-teste (modelo nos Apêndices), sendo as perguntas, agora, com um nível intermediário.
- No terceiro, o *Algodo* será apresentado como ferramenta de criação de simulações de fenômenos físicos como possibilidade de potencialização do ensino-aprendizagem, bem como o livro eletrônico que será utilizado para aplicação da sequência didática. Nas duas aulas referentes a esse encontro, os alunos terão a possibilidade de conhecer as principais funcionalidades do *software* e de como criar algumas animações sobre temas diversos, principalmente sobre os conteúdos escolhidos para a aplicação da SD.
- Em seguida, no quarto e no quinto encontros, devem ser dadas, nessa perspectiva de aplicação, aulas expositivas no quadro negro e em apresentação de *slides* relacionadas aos conteúdos de energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento, tendo o produto educacional como ferramenta teórica para planejamento dessas aulas. Nesses encontros, os quais serão compostos por quatro aulas de cinquenta minutos cada, também serão feitos exercícios de fixação dos conteúdos, buscando trabalhar a coletividade dos alunos na resolução das questões propostas, tanto do livro didático como de materiais extras.
- No sexto e no sétimo encontros, serão trabalhados a aplicação do conteúdo no *Algodo*, que também terá o livro digital como material de apoio didático. Com isso, os alunos terão a oportunidade de colocar, de forma coletiva, em prática os conhecimentos que aprenderam relacionados ao manuseio do programa, como também a aplicabilidade do conteúdo aprendido na prática de simulações virtuais disponibilizada gratuitamente pelo *software*. Numa eventual falta de estrutura da escola para o uso de computadores, como a ausência da possibilidade de uso do Lab. Inf., por exemplo, será disponibilizado nos Apêndices deste trabalho, um manual de construção de uma simulação no aplicativo para que o aluno consiga fazer esse trabalho em casa e apresente durante essas aulas. Aqui, vamos levar em consideração que a escola possui esse tipo de problema.
- Após vencida toda a parte teórica e prática do conteúdo, o oitavo encontro será reservado para coletar indícios de aprendizagem dos alunos por meio da aplicação de um pós-teste, realizado por meio de um questionário individual com perguntas de níveis mais avançados

em relação às dos pré-testes sobre as energias cinéticas de rotação e rolamento e sua aplicabilidade no meio social.

- Por fim, no nono e último encontro, as duas aulas serão utilizadas para, em um primeiro momento, o professor dar um *feedback* sobre a aplicação do pós-teste do encontro anterior, corrigindo o questionário e buscando fazer com que o aluno perceba sua evolução de aprendizagem, principalmente no que tange a sua capacidade de captar significados, compreender, explicar e de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema, características essas presentes nas UEPS de Moreira (2011). Aqui, os alunos também terão a oportunidade, na segunda parte do encontro, de se autoavaliar, darem as suas opiniões sobre a sequência didática aplicada e a utilização de simulações virtuais com o *Algodo* durante as aulas de Física, além de sugestões de melhoria, tudo por meio de um questionário específico e individual (modelo nos Apêndices).

A seguir, encontra-se, de forma prática e resumida, uma tabela que sintetiza todas as informações da sequência didática que será utilizada, dividindo toda a aplicação do produto educacional nos encontros, aulas e seus objetivos. É importante lembrar que os encontros são compostos por duas aulas de cinquenta minutos cada, nesse modelo sugerido, podendo o professor, mais uma vez, adequar essa metodologia às suas necessidades.

Tabela 3 - Informações sobre a aplicação da sequência didática

INFORMAÇÕES SOBRE A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA (continua)			
Encontro	Aula	Atividade	Objetivo
1	1	Apresentação da SD, do conteúdo e exibição e diálogos sobre os vídeos	Apresentar ao aluno a SD a ser trabalhada, além do conteúdo definido, e exibir vídeos para introduzir um conceito amplo sobre a temática a ser estudada durante a aplicação da SD
	2	Aplicação do pré-teste	Aplicar um questionário individual sobre energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento a nível introdutório com o intuito de coletar informações sobre os conhecimentos prévios dos alunos
2	3	Apresentação da situação-problema	Manifestar uma situação-problema sobre a energia cinética de uma roda de um carro e identificar a opinião dos alunos sobre o tema da aula
	4	Aplicação de pré-teste	Submeter a turma a um novo pré-teste individual por meio de um questionário a nível intermediário para analisar se houve uma melhor percepção sobre os conteúdos abordados
3	5	Apresentação do <i>ebook</i> e do <i>software Algodo</i>	Expor o livro digital na íntegra que será utilizado na SD e realizar introdução ao uso do <i>Algodo</i>
	6		

Tabela 3 - Informações sobre a aplicação da sequência didática

INFORMAÇÕES SOBRE A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA (conclusão)			
Encontro	Aula	Atividade	Objetivo
4	7	Aulas expositivas do conteúdo	Apresentar o conteúdo de forma clara e organizada na sala de aula e/ou, com exemplos práticos, utilizando recursos como o <i>ebook</i> , o quadro negro e a sala de vídeo
	8		
5	9		
	10		
6	11	Aulas práticas do <i>Algodo</i>	Trabalhar simulações práticas e coletivas sobre o conteúdo estudado no <i>Algodo</i> , usando o laboratório de informática e/ou o projetor de imagens para reforçar o conteúdo estudado, buscando novos significados quanto às situações-problemas
	12		
7	13		
	14		
8	15	Aplicação do pós-teste	Aplicar um questionário individual sobre energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento a nível mais elevado com o intuito de coletar indícios de aprendizagem dos alunos
	16		
9	17	Realização de um <i>feedback</i> do pós-teste	Retomar o pós-teste, corrigindo-o e buscando fazer com que o aluno perceba sua evolução de aprendizagem, principalmente no que tange a sua capacidade de captar significados, compreender, explicar e de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema, características essas presentes nas UEPS de Moreira (2011)
	18	Aplicação do questionário de autoavaliação e pesquisa final de opinião	Verificar, por meio de questionários individuais específicos, como o aluno se autoavalia em relação ao seu aprendizado e o que ele achou da SD utilizada

Fonte: Elaborada pelos autores.

Para que a aplicação do produto educacional atinja um número expressivo de alunos e servir, além do uso de outros recursos didáticos, como fator motivante para participação nas etapas da sequência didática, poderá atribuída uma pontuação considerável atrelada à frequência, à participação nas aulas, ao preenchimento dos questionários físicos de conhecimentos e de opinião por parte dos discentes.

Para registro da aplicação da sequência didática, é fundamental que os elementos avaliativos e os recursos fotográficos utilizados preservem o anonimato dos alunos. Costa (2019, p. 2), em relação a importância de manter preservada a identidade dos alunos, fala que

De um modo geral, é indispensável ao professor conhecer a identidade dos alunos, bem como suas determinantes sociais e econômicas. Mas em casos nos quais os tabus sociais, as crenças religiosas ou os preconceitos inibem a relação de confiança, a não identificação do aluno se faz necessária para a efetivação do processo ensino-aprendizagem. Neste sentido, um processo educativo e/ou comunicativo não implica em um professor conhecer apenas a identidade do seu aluno, mas sim em uma relação de confiança que se estabelece.

Nesse sentido, os recursos de imagens utilizados para registro das atividades envolvendo os discentes deverão levar em conta a sua não identificação.

Em relação à adequação da aplicação da SD com os passos da construção de uma UEPS, a tabela a seguir faz uma compatibilidade entre esses fatores.

Tabela 4 - Comparativo da aplicação da SD com a UEPS de Moreira

COMPARATIVO DA APLICAÇÃO DA SD COM A UEPS DE MOREIRA				
PASSOS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA		PASSOS DA UMA UEPS		
Encontro	Aula			
1	1	1	-	-
	2	2	-	-
2	3	3	7	-
	4	2		
3	5	4	7	-
	6			
4	7			
	8	4	5	7
5	9			
	10			
6	11			
	12	5	6	7
7	13			
	14			
8	15	-	7	8
	16			
9	17	-	7	8
	18			

Fonte: Elaborada pelos autores.

Os oito passos da UEPS de Moreira (2011), os quais a tab. (4) acima se refere, a que SD aqui proposta está baseada, são:

- 1 – Definição do tópico específico a ser abordado e sua relação com a disciplina.
- 2 – Criar situações-problemas por meio de discussões, questionários, entre outros para coletar informações sobre os conhecimentos prévios do aluno.
- 3 – Propor situações-problemas, em nível introdutório, para organizar os conhecimentos prévios dos alunos.
- 4 – Apresentar o conteúdo a ser ensinado, com foco na participação coletiva dos alunos.
- 5 – Retornar os aspectos gerais do conteúdo ensinado, que, dessa vez, precisa ser com um maior nível de complexidade, podendo ser usado recursos computacionais.
- 6 – De forma integradora, retomar novamente o conteúdo e propor novos desafios, podendo fazer uso de programas computacionais.
- 7 – Durante toda a aplicação da SD, o aluno deve ser avaliado de forma contínua, levando em consideração seu desempenho individual e coletivo nas tarefas propostas.
- 8 – Verificar se a SD foi exitosa, por meio de avaliação do desempenho dos alunos que busque fornecer evidências de aprendizagem significativa (captação de significados, compreensão, capacidade de explicar, de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema).

Como a aplicação dessa proposta pode ser extensa para a realidade de muitos discentes, sugerimos um modelo mais sintetizado a seguir.

Adaptação da Proposta: Uma versão reduzida para aplicação em menos tempo

Para que o professor, caso o interesse, consiga aplicar a SD em um tempo menor do que o que foi sugerido anteriormente, apresentaremos, nesta subseção, um modelo mais simplificado dos passos das UEPS de Moreira (2011). Aqui, não seremos repetitivos em descrever, fora das tabelas que serão apresentadas, os eventos que irão compor as aulas, bem como os respectivos passos das UEPS. Assim, o planejamento de ações, de forma bem objetiva, pode ser feito de acordo com a Tab. (5) a seguir.

Tabela 5 - Comparativo da aplicação simplificada da SD com a UEPS de Moreira

INFORMAÇÕES SOBRE A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA (continua)			
Encontro	Aula	Atividade	Objetivo
1	1	Apresentação da SD, do conteúdo, do <i>ebook</i> , do <i>software Algodoo</i> e exibição e diálogos sobre os vídeos	Apresentar ao aluno a SD a ser trabalhada, o conteúdo definido, expor o livro digital na íntegra que será utilizado na SD, realizar introdução ao uso do <i>Algodoo</i> e exibir vídeos para introduzir um conceito amplo sobre a temática a ser estudada durante a aplicação da SD
	2	Aplicação do pré-teste	Aplicar um questionário individual sobre energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento a nível introdutório com o intuito de coletar informações sobre os conhecimentos prévios dos alunos
2	3 4	Aulas expositivas do conteúdo	Apresentar o conteúdo de forma clara e organizada na sala de aula e/ou, com exemplos práticos, utilizando recursos como o <i>ebook</i> , o quadro negro e a sala de vídeo
	5 6	Aulas práticas do <i>Algodoo</i>	Trabalhar simulações práticas e coletivas sobre o conteúdo estudado no <i>Algodoo</i> , usando o laboratório de informática e/ou o projetor de imagens para reforçar o conteúdo estudado, buscando novos significados quanto às situações-problemas
4	7 8	Aplicação do pós-teste	Aplicar um questionário individual sobre energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento a nível mais elevado com o intuito de coletar indícios de aprendizagem dos alunos
	9	Realização de um <i>feedback</i> do pós-teste	Retomar o pós-teste, corrigindo-o e buscando fazer com que o aluno perceba sua evolução de aprendizagem, principalmente no que tange a sua capacidade de captar significados, compreender, explicar e de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema, características essas presentes nas UEPS de Moreira (2011)
5	10	Aplicação do questionário de autoavaliação e pesquisa final de opinião	Verificar, por meio de questionários individuais específicos, como o aluno se autoavalia em relação ao seu aprendizado e o que ele achou da SD utilizada

Fonte: Elaborada pelos autores.

Observe que o tempo para aplicação do Produto foi reduzido em quase 50%. Logo, em relação aos passos das UEPS, a Tab. (6) abaixo adapta o modelo reduzido às necessidades da nova SD e passa a ser configurada da seguinte forma:

Tabela 6 - Comparativo da aplicação simplificada da SD com a UEPS de Moreira

COMPARATIVO DA APLICAÇÃO DA SD COM A UEPS DE MOREIRA					
PASSOS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA		PASSOS DA UMA UEPS			
Encontro	Aula				
1	1	1	3	4	7
	2	2			
2	3	4	5		7
	4				
3	5	5	6		7
	6				
4	7	-	7		8
	8				
5	9	-	7		8
	10				

Fonte: Elaborada pelos autores.

Já as informações sobre a aplicação do produto, nesse modelo reduzido, passam a ser configurado, em relação ao tempo de aplicação, da seguinte forma:

Tabela 2 - Informações relacionadas à aplicação do produto educacional

INFORMAÇÕES SOBRE A APLICAÇÃO DO PRODUTO	
Nome da escola	
Nível de Ensino	
Tipo da escola	
Turma de aplicação do produto	
Turno	
Quantidade de alunos da turma	
Quantidade de aulas	10
Duração da aula	50 min
Quantidade de encontros	5
Duração do encontro	100 min
Duração total de aplicação	1 meses, aproximadamente.
Período do ano letivo	

Fonte: Elaborada pelos autores.

Finalizados esses modelos de metodologia, a qual se pretende aplicar o produto educacional em sala de aula, traremos, a seguir, as Referências Bibliográficas que serviram para a construção e aplicação do Produto Educativo, além de alguns Apêndices que podem ser usados durante a SD, para atingir os objetivos para aplicação do Produto Educacional, bem como os resultados que se pretende chegar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIAR, Mateus Dias *et al.* **Mal-estar docente no ensino de física: desafios e perspectivas.** Research, Society and Development, v. 9, n. 6, e106963265, 2020. ISSN 2525-3409. Disponível em: <<https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/3265/3829>>. Acesso em: 28 fev. 2024.

ALGODOO. Disponível em:< <http://www.algodoo.com/>>. Acesso em: 28 jan. 2023.

ALGODOO. [Software]. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <<http://www.algodoo.com/>>. Acesso em: 12 mar. 2024.

ALGODOO. **Tradução do Algodoo.** Fórum Algodoo. Disponível em: <<http://www.algodoo.com/forum/viewtopic.php?f=30&t=12229&p=86459&hilit=tradu%C3%A7%C3%A3o&sid=2ed19f082184cf645d2a3a6a7d9a9be8#p86459>> . Publicado em: 29 set. 2018. Acesso em: 13 mar. 2024.

ALGODOO.COM. **Fórum Algodoo.** Disponível em: <<http://www.algodoo.com/forum/viewtopic.php?f=30&t=12229&p=86459&hilit=tradu%C3%A7%C3%A3o&sid=2ed19f082184cf645d2a3a6a7d9a9be8#p86459>>. Acesso em: 28 nov. 2023.

AUSUBEL, David Paul. **Educational psychology: a cognitive view.** Nova York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.

BASTOS, Jennifer Ester de Sousa *et al.* O uso do questionário como ferramenta metodológica: potencialidades e desafios. **Brazilian Journal of Implantology and Health Sciences**, v. 5, n. 3, p. 623-636, 2023.

BATISTA, Michel Corci *et al.* **O software Algodoo como possibilidade para o ensino de física.** Atena Editora, 2022. Disponível em: <<https://atenaeditora.com.br/catalogo/ebook/o-software-algodoo-como-possibilidade-para-o-ensino-de-fisica>>. Acesso em: 19 fev. 2024.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.** Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 23 dez. 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 25 fev. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 25 fev. 2024. Ciência Todo Dia – Canal do YouTube. **O Que é Energia | Episódio 1.** YouTube, 10 de jun. de 2020. Disponível em: < <https://www.youtube.com/watch?v=3VLPyOLC1nc&t=47s>>. Acesso em: 26 fev. 2024.

COSTA, Adriano Medeiros. O anonimato como fator de pertencimento no uso de redes sociais on-line em projetos educacionais. **Prometeu**, Ano V, n. 1, ISSN 2175-0920, 1-20,

2019. Disponível em: <http://lte.ce.ufrn.br/prometeu/revistas/revista_2019/3.O-ANONIMATO.docx.pdf>. Acesso em: 11 mar. 2024.

DOCUMENTARIOS HISTORICOS. "**Energia & tecnologia**" **Descobertas da Antiguidade Documentario Completo**. YouTube, 11 de abr. de 2018. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=q_oPJtmPL2E>. Acesso em: 26 fev. 2023.

FERRARO, Nicolau Gilberto; PENTEADO, Paulo Cesar M.; TORRES, Carlos Magno A.; **Física - Vereda Digital - Volume único**. 1. Ed. – São Paulo: Moderna, 2012.

GOGOY, Leandro; AGNOLO, Rosana Maria Dell'; MELO, Wolney C. **Multiversos: Ciências da Natureza**: matéria, energia e a vida – 1. ed. – São Paulo: Editora FTD, 2020.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física: Mecânica -Volume 1**. 10ª ed. Tradução: Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

MARTINI, Glorinha *et al.* **Conexões com a Física** – 3. ed. – São Paulo: Moderna, 2016.

MOREIRA, Marco Antonio. Unidades de Enseñanza Potencialmente Significativas - UEPS. **Aprendizagem Significativa em Revista**, v. 1, n. 2, p. 43-63, 2011.

Nerdologia – Canal do YouTube. **Energia | Nerdologia**. YouTube, 03 de dez. de 2015. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=pXtVUobPQLs>>. Acesso em: 25 fev. 2024.

NUSSENZVEIG, H. Moisés. **Curso de Física Básica 1: Mecânica**. 4. Ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

RAMALHO, Francisco Júnior; FERRARO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo Antônio de Toledo. **Os Fundamentos da Física: Mecânica**, Volume 1. São Paulo: Moderna, 2015.

SILVA, Anderson Gomes da; SILVA, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <<https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>>. Acesso em: 28 nov. 2023.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <<https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>>. Acesso em: 28 nov. 2023.

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. Sears & Zemansky - **Física I: Mecânica** - Volume 1. 12ª ed. Tradução de Sonia Midori Yamamoto. São Paulo: Pearson Universidades, 2008.

ZABALA, A. **A Prática Educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A – MATERIAIS A SEREM UTILIZADOS NA SD

PLANO DE AULA 01

Instituição de ensino:

Professor:

Data:

Duração:

Área do conhecimento:

Disciplina:

Turma:

Temática: *O que é Energia?* – Nestas aulas, serão exibidos, além da apresentação da SD, dois vídeos do YouTube, com títulos “O Que É Energia” e “*Energia | Nerdologia*”, dos canais “Ciência Todo Dia” e “Nerdologia”, respectivamente; relacionados aos conceitos de energia, seus tipos e as descobertas da Antiguidade que serviram para a evolução da tecnologia em diversas áreas, além da aplicação de um pré-teste, que consistirá em um questionário individual com perguntas introdutórias para fazer um diagnóstico da turma referente aos conhecimentos prévios relacionados aos conteúdos e métodos escolhidos e definidos que serão trabalhados durante a aplicação do produto.

Objetivos da Aprendizagem: 1) Apresentar ao aluno a SD a ser trabalhada, além do conteúdo definido, e exibir vídeos para introduzir um conceito amplo sobre a temática a ser estudada durante o segundo bimestre. 2) Aplicar um questionário individual sobre energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento a nível introdutório com o intuito de coletar informações sobre os conhecimentos prévios dos alunos.

Conteúdo Programático: 1) Conceitos básicos de energia: definição, tipos e transformações. 2) Importância e princípios da energia rotacional. 3) Energia e Movimento Rotacionais: exemplos e aplicações. 4) Análise de movimento rotacional em situações do cotidiano, como parques de diversões e usinas eólicas, por exemplo. 5) Uso de softwares computacionais no Ensino de Física.

Metodologia: A aula se inicia com a demonstração do livro digital que será utilizado como material didático durante o bimestre, como também da sequência didática que será trabalhada. A seguir, será haverá uma apresentação interativa sobre o que é energia e alguns tipos de como ela pode se mostrar, através visualização e discussão de vídeos educativos. Logo após, será aplicado um questionário individual que visará coletar conhecimentos prévios dos alunos referentes aos conteúdos que serão estudados durante o bimestre.

Cronograma: Aula 1 - Apresentação da SD, do *Ebook* e visualização de vídeos sobre energia (50 minutos). Aula 2 - Aplicação do 1º pré-teste (50 minutos).

Materiais utilizados: Computador com acesso à internet; projetor de tela para exibição dos vídeos; questionário físico.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante as discussões em grupo e na análise dos resultados dos testes individuais aplicados.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. (EM13CNT204) Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). (EM13CNT301) Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 25 fev. 2024.

Ciência Todo Dia. **O Que é Energia | Episódio 1**. YouTube, 10 de jun. de 2020. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=3VLPyOLC1nc&t=47s>>. Acesso em: 26 fev. 2024.

Nerdologia – Canal do YouTube. **Energia | Nerdologia**. YouTube, 03 de dez. de 2015. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=pXtVUobPQLs>>. Acesso em: 25 fev. 2024.

PLANO DE AULA 02

Instituição de ensino:

Professor:

Data:

Duração:

Área do conhecimento:

Disciplina:

Turma:

Temática: Apresentação de situação-problema. Nesta aula será exposta uma situação-problema relacionada a energia e, principalmente, a energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento, para fazer com que os estudantes reflitam sobre aspectos do seu cotidiano que estejam relacionados com a temática da situação introdutória. Nesse encontro, será realizado um segundo pré-teste, sendo as perguntas, agora, com um nível intermediário.

Objetivos da Aprendizagem: 1) Manifestar uma situação-problema sobre a energia cinética de uma roda de um carro e identificar a opinião dos alunos sobre o tema da aula. 2) Submeter a turma a um novo pré-teste individual por meio de um questionário a nível intermediário para analisar se houve uma melhor percepção sobre os conteúdos abordados.

Conteúdo Programático: 1) Importância e princípios da energia rotacional. 2) Energia e Movimento Rotacionais: exemplos e aplicações. 3) Análise de movimento rotacional de uma roda de um carro.

Metodologia: A aula se inicia com uma situação-problema sobre a energia cinética contida em uma roda de um carro em movimento. A sala será dividida em grupo de alunos para debater a temática e verificar suas opiniões sobre o assunto. No final do debate, a turma será submetida a um novo pré-teste individual por meio de um questionário para verificar se os alunos conseguiram aflorar uma melhor percepção em relação ao conteúdo.

Cronograma: Aula 1 – Apresentação e discussão da situação-problema (50 min). Aula 2 – Aplicação do segundo pré-teste (50 minutos).

Materiais utilizados: Computador com acesso à internet; projetor de tela; quadro negro e questionário físico.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante as discussões em grupo e na análise dos resultados dos testes individuais aplicados.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. (EM13CNT204) Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). (EM13CNT301) Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. [Software]. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <<http://www.algodoo.com/>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <<https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 03

Instituição de ensino:

Professor:

Data:

Duração:

Área do conhecimento:

Disciplina:

Turma:

Temática: O *Algodoo* e o Livro digital “*Algodoo e a Dinâmica Rotacional*”. Neste encontro serão apresentados o *software* *Algodoo* e suas funcionalidades, bem como o livro digital “*Algodoo e a Dinâmica Rotacional*” na íntegra.

Objetivos da Aprendizagem: 1) Expor o livro digital na íntegra que será utilizado na SD. 2) Realizar introdução ao uso do *Algodoo*.

Conteúdo Programático: 1) Apresentar, na íntegra, o livro digital “*Algodoo e a Dinâmica Rotacional*”. 2) Introdução ao *Algodoo*.

Metodologia: A aula se inicia com a demonstração, na íntegra, do livro digital a ser utilizado durante o 2º bimestre. Depois, será introduzido o uso do *Algodoo*, com demonstrações das suas ferramentas, aplicabilidades e construções das primeiras simulações.

Cronograma: Apresentação do ebook na íntegra e sua interatividade (25 min – ½ aula); Introdução ao *Algodoo* (75 min – 1,5 aula).

Materiais utilizados: Computador com acesso à internet com o *Algodoo* instalado; projetor de tela; quadro negro.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante a aula. Também será passado para o aluno uma atividade em grupo de Laboratório digital, o qual eles terão que construir simulações sobre Energia Cinética de rotação de diferentes discos para apresentarem no “ENCONTRO 07”, que tratará sobre aulas práticas com o *software*.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. [Software]. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <<http://www.algodoo.com/>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <<https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 04

Instituição de ensino:

Professor:

Data:

Duração:

Área do conhecimento:

Disciplina:

Turma:

Temática: Revisão dos conceitos básicos do Movimento Circular Uniforme e o estudo da Energia Cinética de Rotação. Neste encontro, será introduzido o ensino do conteúdo de Física a ser estudado durante a aplicação da SD.

Objetivos da Aprendizagem: 1) Apresentar o conteúdo de forma clara e organizada na sala de aula e/ou, com exemplos práticos, utilizando recursos como o *ebook*, o quadro negro e a sala de vídeo.

Conteúdo Programático: 1) Conceitos básicos do MCU. 2) Momento de Inércia. 3) Teorema dos Eixos Paralelos. 4) Centro de Massa. 5) Energia Cinética de Rotação.

Metodologia: A aula se inicia com a revisão dos principais conceitos do MCU. Em seguida, serão introduzidos os conceitos de Momento de Inércia e Centro de Massa, para, depois, ser estudada a Energia Cinética de Rotação. No final, serão trabalhados, em grupo, exercícios sobre o conteúdo estudado.

Cronograma: Aula 1: Exposição do conteúdo programático (50 min); Aula 2: Continuação do conteúdo programático e trabalho, em grupo, da resolução de exercícios propostos sobre o conteúdo (50 min).

Materiais utilizados: Computador; projetor de tela; quadro negro.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante a aula.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. [Software]. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <<http://www.algodoo.com/>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <<https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 05

Instituição de ensino:

Professor:

Data:

Duração:

Área do conhecimento:

Disciplina:

Turma:

Temática: Energia Cinética de Rolamento como a composição das energias cinéticas de Rotação e Translação. Neste encontro, será dada a continuidade do ensino do conteúdo de Física que está sendo estudado na aplicação da SD.

Objetivos da Aprendizagem: 1) Apresentar o conteúdo de forma clara e organizada na sala de aula e/ou, com exemplos práticos, utilizando recursos como o *ebook*, o quadro negro e a sala de vídeo.

Conteúdo Programático: 1) Conceitos básicos de Movimento de Translação e Movimento de Rotação. 2) Energia Cinética de Rolamento.

Metodologia: A aula se inicia com uma breve revisão dos principais conceitos do Movimento Linear e do Movimento Rotacional. Em seguida, será introduzido o conceito de Energia Cinética de Rolamento. No final, serão trabalhados exercícios, em grupo, para fixação do conteúdo.

Cronograma: Aula 1: Exposição do conteúdo programático (50 min); Aula 2: Continuação do conteúdo programático e trabalho, em grupo, da resolução de exercícios propostos sobre o conteúdo com apoio do Algodoo (50 min).

Materiais utilizados: Computador; projetor de tela; quadro negro.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante a aula.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. [Software]. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <<http://www.algodoo.com/>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <<https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 06

Instituição de ensino:

Professor:

Data:

Duração:

Área do conhecimento:

Disciplina:

Turma:

Temática: Apresentação de seminário usando o *Algodoo* – Simulando a Energia Cinética de Rotação. Os alunos apresentarão o trabalho passado no “ENCONTRO 03”.

Objetivos da Aprendizagem: 1) Verificar a aprendizagem do conteúdo Energia Cinética de Rotação com o uso do *Algodoo*.

Conteúdo Programático: 1) Energia Cinética de Rotação. 2) Laboratório virtual de Física.

Metodologia: As duas aulas serão reservadas para apresentação dos trabalhos em grupos sobre energia cinética de rotação com o uso do *Algodoo*.

Cronograma: Aulas 1 e 2: Apresentação de seminários (100 min).

Materiais utilizados: Computador com o *Algodoo* instalado; projetor de tela; quadro negro.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante a aula.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. [Software]. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <<http://www.algodoo.com/>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <<https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 07

Instituição de ensino:

Professor:

Data:

Duração:

Área do conhecimento:

Disciplina:

Turma:

Temática: Apresentação de seminário usando o *Algodo* – Simulando a Energia Cinética de Rotação. Os alunos continuarão as apresentações dos trabalhos do encontro 06.

Objetivo da Aprendizagem: 1) Verificar a aprendizagem do conteúdo Energia Cinética de Rotação com o uso do *Algodo*.

Conteúdo Programático: 1) Energia Cinética de Rotação. 2) Laboratório virtual de Física.

Metodologia: As duas aulas serão reservadas para continuação das apresentações dos trabalhos em grupos sobre energia cinética de rotação com o uso do *Algodo*.

Cronograma: Aulas 1 e 2: Apresentação de seminários (100 min).

Materiais utilizados: Computador com o *Algodo* instalado; projetor de tela.

Avaliação: A avaliação será baseada no desempenho dos alunos durante as apresentações dos seminários.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. [Software]. [S.l.]: Algodo, [2023?]. Disponível em: <<http://www.algodo.com/>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <<https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 08

Instituição de ensino:

Professor:

Data:

Duração:

Área do conhecimento:

Disciplina:

Turma:

Temática: Aplicação do pós-teste.

Objetivo da Aprendizagem: 1) Coletar e verificar indícios de aprendizagem dos conteúdos Energia Cinética de Rotação e Energia Cinética de Rolamento.

Conteúdo Programático: 1) Energia Cinética de Rotação. 2) Energia Cinética de Rolamento.

Metodologia: As duas aulas serão reservadas para aplicação do pós-teste.

Cronograma: Aulas 1 e 2: Aplicação do pós-teste (avaliação) (100 min).

Materiais utilizados: Questionário físico.

Avaliação: A avaliação será baseada no desempenho dos alunos na resolução da avaliação.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. [Software]. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <<http://www.algodoo.com/>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <<https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 09

Instituição de ensino:

Professor:

Data:

Duração:

Área do conhecimento:

Disciplina:

Turma:

Temática: *Feedback* do pós-teste, autoavaliação e pesquisa final de opinião. Neste encontro, o pós-teste será resolvido e debatido com os alunos e será aplicado um questionário de autoavaliação e de pesquisa final de opinião para os discentes.

Objetivos da Aprendizagem: 1) Retomar o pós-teste, corrigindo-o e buscando fazer com que o aluno perceba sua evolução de aprendizagem, principalmente no que tange a sua capacidade de captar significados, compreender, explicar e de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema, características essas presentes nas UEPS de Moreira (2011). 2) Verificar, por meio de questionários individuais específicos, como o aluno se autoavalia em relação ao seu aprendizado e o que ele achou da SD utilizada

Conteúdo Programático: 1) Importância e princípios da energia rotacional. 2) Energia e Movimento Rotacionais: exemplos e aplicações. 3) Análise de movimento rotacional de uma roda de um carro.

Metodologia: A aula se inicia com a resolução da avaliação bimestral para debate das questões com os alunos, verificação das últimas dúvidas dos alunos e aprimoramento dos conceitos estudados. Em seguida, será aplicado um questionário individual para que os alunos possam se autoavaliar e emitir suas opiniões quanto à metodologia utilizada durante o bimestre e aplicação da sequência didática.

Cronograma: Aula 1 – *Feedback* do pós-teste (50 min). Aula 2 – Aplicação do questionário individual de autoavaliação e pesquisa final de opinião (50 minutos).

Materiais utilizados: Quadro negro.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante as discussões em grupo e na análise dos resultados dos questionários individuais aplicados.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. [Software]. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <<http://www.algodoo.com/>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <<https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

Capítulo 4 Energia Cinética de Rotação

Turma:
Professor:

Dia, mês e ano

ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO DE UMA PARTÍCULA

A **energia cinética de rotação** descreve objetos em rotação, sendo uma extensão da energia cinética linear que lida com movimentos de translação.

Esse tipo de energia depende da forma e de como a massa de um corpo é distribuída em um movimento circular.

Para apenas uma partícula, temos uma massa pontual m associada e com energia cinética:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

$$v = \omega r$$

$$mr^2 = I$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \text{ (joule - J)}$$

$K \rightarrow$ Energia Cinética de Rotação da partícula.

$I \rightarrow$ Momento de Inércia da partícula.

$\omega \rightarrow$ Velocidade Angular da partícula.

ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO

Para um corpo rígido, podemos usar:

$$K_T = \frac{1}{2}I_T\omega^2 \text{ (joule - J)}$$

$K_T \rightarrow$ Energia Cinética de Rotação do corpo rígido.

$I_T \rightarrow$ Momento de Inércia da partícula.

$\omega \rightarrow$ Velocidade Angular da partícula.

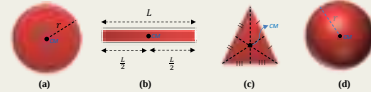
Corpo	Momento de Inércia (kg . m ²)
Esfera maciça em relação a um diâmetro	$I = \frac{2}{5}Mr^2$
Disco em relação ao seu eixo central	$I = \frac{1}{2}Mr^2$
Anel fino em relação ao eixo central	$I = Mr^2$

- Quanto maior próximo os átomos que compõe o corpo rígido estão do eixo de rotação, maior a facilidade de fazê-lo girar.



CENTRO DE MASSA

O ponto de um corpo, ou um sistema de corpos, onde se pode considerar que toda a concentração de massa se concentra sobre ele é chamado de centro de massa CM, comumente chamado de centro de gravidade.



O centro geométrico de objetos não homogêneos pode não ser o mesmo do seu CM devido às suas características irregulares., dificultando a sua análise para cálculos envolvendo essa distribuição de massa.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS – ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

4.01 – Qual é a energia cinética de rotação de uma partícula, de um corpo rígido, com um momento de inércia de $0,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ em relação ao seu eixo de rotação e uma velocidade angular de 5 rad/s ?

4.02 – O momento de inércia de um corpo rígido, de massa 2 kg , em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa, é de $0,02 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Qual o momento de inércia em relação a um ponto P desse corpo por onde passa outro eixo de rotação, distante $0,1$ metros perpendicularmente do eixo que passa pelo centro de massa?

4.03 – Um ponto material com uma massa de $0,5 \text{ kg}$ está em rotação ao redor de um eixo perpendicular a ele. A distância entre o eixo e o ponto material é de $0,2$ metros. Determine o momento de inércia desse ponto material em relação ao eixo de rotação.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS – ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

4.01 – Qual é a energia cinética de rotação de uma partícula contida em um corpo rígido com um momento de inércia de $0,15 \text{ kgm}^2$ em relação ao seu eixo de rotação, quando ela gira com uma velocidade angular de 7 rad/s ?

4.02 – O momento de inércia de um corpo rígido, com uma massa de 3 kg , em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa, é de $0,015 \text{ kgm}^2$. Qual é o momento de inércia em relação a um ponto Q desse corpo, por onde passa outro eixo de rotação, que está a uma distância de $0,2$ metros perpendicularmente ao eixo que passa pelo seu centro de massa?

4.03 – Um ponto material de massa 1 kg gira em torno de um eixo perpendicular a ele. A distância entre o eixo de rotação e o ponto material é de $0,5$ metros. Determine o momento de inércia deste ponto material em relação ao eixo de rotação.

USANDO O ALGODOO – ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

USAR O MANUAL DE LABORATÓRIO VIRTUAL

Carro	f (Hz)	m (kg)	r (m)	$\omega = 2\pi f$ (rad/s)	$I = \frac{mr^2}{2}$ (kgm ²)	$K = \frac{I\omega^2}{2}$ (J)
A	1	16	4			
B	2	8	3			
C	3	4	2			
D	4	2	1			

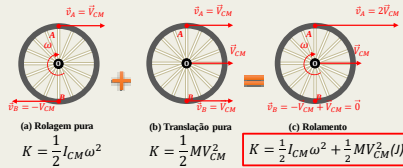
Capítulo 8 Energia Cinética de Rolamento

Turma:
Professor:

Dia, mês e ano

ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO

A energia cinética de rolamento de um corpo corresponde à soma das suas energias cinéticas de rotação e de translação.



$K \rightarrow$ Energia Cinética de Rolamento do corpo rígido.

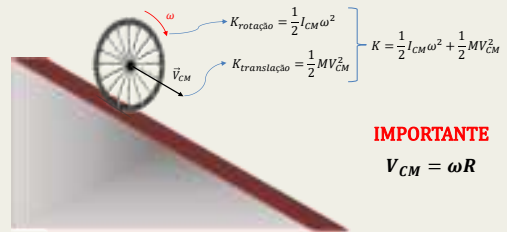
$I_{CM} \rightarrow$ Momento de inércia que passa pelo Centro de Massa do corpo rígido.

$\omega \rightarrow$ Velocidade Angular da corpo rígido.

$M \rightarrow$ Massa do corpo rígido.

$V_{CM} \rightarrow$ Velocidade do Centro de Massa do corpo rígido.

ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS - ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO

8.01 – Um veículo está em movimento retilíneo uniforme com velocidade linear escalar de 20 m/s. Suas rodas, homogêneas e idênticas, cada uma com massa $M = 10 \text{ kg}$ e raio $R = 25 \text{ cm}$, por consequência do movimento linear do veículo, possuem velocidade angular constante e seus momentos de inércia podem ser calculados por meio da equação $(I = \frac{1}{2} M R^2)$, em que M é a massa da roda e R , o seu raio.

De acordo com o enunciado, determine, para uma das rodas do veículo:

- a sua velocidade do centro de massa;
- a sua velocidade angular;
- o seu momento de inércia;
- a sua energia cinética de rotação;
- a sua energia cinética de translação;
- a sua energia cinética de rolamento.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS - ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO

8.01 – Um carro está em movimento retilíneo uniforme com velocidade linear escalar de 15 m/s. Suas rodas, homogêneas e idênticas, cada uma com massa $M = 8 \text{ kg}$ e raio $R = 20 \text{ cm}$, por consequência do movimento linear do veículo, possuem velocidade angular constante. De acordo com o enunciado, determine, para uma das rodas do veículo:

Use $(I = \frac{1}{2} M R^2)$ para calcular o momento de inércia da roda.

- a sua velocidade do centro de massa;
- a sua velocidade angular;
- o seu momento de inércia;
- a sua energia cinética de rotação;
- a sua energia cinética de translação;
- a sua energia cinética de rolamento.

USANDO O ALGODOO- ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO



USANDO O ALGODOO- ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO

$m \text{ (kg)}$	$R \text{ (m)}$	$I_{CM} = \frac{1}{2} m R^2 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2 \text{)}$
4.0	4.0	

$f \text{ (N)}$	$a = 2 a f \text{ (rad/s}^2 \text{)}$
9.0	

$a \text{ (rad/s}^2 \text{)}$	$R \text{ (m)}$	$v_{CM} = a R \text{ (m/s)}$
	4.0	

$I_{CM} \text{ (kg} \cdot \text{m}^2 \text{)}$	$\omega \text{ (rad/s)}$	$M \text{ (kg)}$	$v_{CM} \text{ (m/s)}$	$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \text{ (J)}$
		4.5		

INSTRUÇÕES

- O objetivo deste questionário é verificar o que você já sabe sobre o tema e suas respostas serão utilizadas para que as suas aulas sejam preparadas da forma mais adequada para atender às suas necessidades educacionais.
- Assim, é fundamental que você seja o mais sincero possível na sua resolução, pois a sua participação é de extrema importância para que você seja avaliado.

PRÉ-TESTE 01

01 – O que é um ângulo?

02 – Em qual unidade medimos o ângulo?

03 – Quais são os tipos de ângulos que podemos encontrar?

04 – O que você entende por posição angular de um objeto?

05 – O que você entende por deslocamento angular de um corpo rígido?

06 – Qual a diferença entre posição angular e deslocamento angular de um corpo rígido?

07 – Qual a relação entre a sua velocidade angular e o seu período de rotação?

08 – Qual a relação entre a velocidade angular e a frequência de rotação?

09 – Em um movimento circular uniforme, a velocidade angular é igual ou diferente em todos os pontos de um corpo rígido? E em relação à velocidade linear?

10 – Em um movimento circular uniforme, a velocidade linear é igual ou diferente em todos os pontos de um corpo rígido?

11 – O que você entende por aceleração em um movimento circular?

12 – Qual a diferença entre aceleração linear e aceleração centrípeta?

13 – Se a “velocidade linear não muda” em um movimento uniforme, por que um corpo muda de direção em um movimento circular uniforme?

14 – O que você entende por energia?

15 – Cite alguns tipos de energia.

16 – Como a energia é usada no dia a dia?

17 – O que você entende por energia cinética?

18 – Qual a diferença entre energia cinética de translação, também chamada de linear, e energia cinética de rotação?

19 – Você conhece algum programa de computador usado para fins educacionais? Quais?

20 – Você conhece um programa de computador chamado Algodoo? Se sim, já utilizou? Para que serve?

Muito obrigado por você ter respondido todo o questionário da maneira mais completa e sincera possível! Certamente, o modo como serão abordados os conteúdos referentes aos temas contidos neste questionário serão mais relevantes para o seu aprendizado!

INSTRUÇÕES

- O objetivo deste questionário é verificar o que você já sabe sobre o tema após uma breve discussão e suas respostas serão utilizadas para que as suas aulas sejam preparadas da forma mais adequada para atender às suas necessidades educacionais.
- Assim, é fundamental que você seja o mais sincero possível na sua resolução, pois a sua participação é de extrema importância para que você seja avaliado.

PRÉ-TESTE 02

01 – Qual a diferença entre o movimento circular e o movimento retilíneo de um objeto?

02 – Cite 5 exemplos de objetos que podem realizar um movimento circular no seu dia a dia.

03 – Ao girar uma bola de basquete em sua mão, existe um ponto nela que parece não se mover. Você saberia dizer qual é?

04 – Explique qual a relação entre a velocidade angular e a frequência de um corpo em movimento circular?

05 – Cite 3 exemplos de objetos que possuem energia cinética no seu dia a dia.

06 – Explique o conceito de trabalho.

07 – Cite 3 exemplos de situações em que o trabalho é realizado.

08 – Qual a relação entre trabalho e energia cinética?

09 – Cite 3 exemplos de situações em que a energia cinética de um corpo é aumentada.

10 – Cite 3 exemplos de situações em que a energia cinética de um corpo é diminuída.

11 – Qual a relação entre a energia cinética de rotação e o funcionamento de um carrinho de brinquedo?

12 – Explique como a energia cinética de rotação é importante para o movimento de uma bicicleta.

13 – Qual a relação entre a energia cinética de rotação e a força centrífuga em um brinquedo giratório?

14 – Cite 3 situações do dia a dia em que a energia cinética de rotação e/ou a energia cinética de translação são importantes.

15 – Imagine que você está empurrando um carrinho de brinquedo em linha reta. Em qual situação o carrinho terá mais energia cinética: quando as rodas estão girando ou quando as rodas estão travadas? Por quê?

16 – Imagine um disco girando em torno de um eixo. Se você aumentar o raio do disco sem alterar sua massa ou velocidade de rotação, o que acontecerá com sua energia cinética de rotação?

17 – Explique como a energia cinética de rotação pode ser usada para gerar energia elétrica.

18 – Cite 3 exemplos de máquinas que funcionam utilizando a energia cinética de rotação.

19 – Cite 3 exemplos de atividades físicas que envolvem a energia cinética de rotação.

20 – Qual a importância de entendermos os conceitos de movimento circular, rotação e energia para nosso dia a dia?

Muito obrigado por você ter respondido todo o questionário da maneira mais completa e sincera possível! Certamente, o modo como serão abordados os conteúdos referentes aos temas contidos neste questionário serão mais relevantes para o seu aprendizado!

--	--

INSTRUÇÕES

- O objetivo deste questionário é verificar os indícios de aprendizagem em relação ao conteúdo estudado (**ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO** e **ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO**).
- Assim, é fundamental que você resolva às questões da forma mais completa possível, pois a sua participação é de extrema importância para que você seja avaliado.

PÓS-TESTE

01 – Explique a diferença entre energia cinética de rotação e energia cinética de translação.

02 – Defina momento de inércia. Qual a influência que essa grandeza possui no movimento de giro de um corpo?

03 – O que significa o centro de massa de um corpo rígido.

04 – Existe alguma diferença em calcular o momento de inércia de uma partícula e de um corpo rígido com distribuição de massa contínua?

05. Um disco homogêneo de metal de massa 2 kg e raio 0,5 m gira em torno de seu eixo central com velocidade angular de 10 rad/s. Sabendo que o momento de inércia de um disco homogêneo pode ser obtido usando a equação $I = \frac{MR^2}{2}$, calcule a energia cinética de rotação do disco.

06 – Qual é a energia cinética de rotação de uma partícula contida em um corpo rígido com um momento de inércia de $0,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ em relação ao seu eixo de rotação, quando ela gira com uma velocidade angular de 8 rad/s ?

07 – Um ponto material de massa $0,2 \text{ kg}$ gira em torno de um eixo perpendicular a ele. A distância entre o eixo de rotação e o ponto material é de $0,6$ metros. Determine o momento de inércia deste ponto material em relação ao eixo de rotação.

08 – O momento de inércia de um corpo rígido, de massa 5 kg , em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa, é de $0,08 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Use o teorema dos eixos paralelos ($I_P = I_{CM} + Mh^2$) e calcule o momento de inércia em relação a um ponto P desse corpo por onde passa outro eixo de rotação, distante $0,15$ metro perpendicularmente do eixo que passa pelo centro de massa?

09 - Um veículo está em movimento retilíneo uniforme com velocidade linear escalar de 30 m/s . Suas rodas, homogêneas e idênticas, cada uma com massa $M = 12 \text{ kg}$ e raio $R = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$, por consequência do movimento linear do veículo, possuem velocidade angular constante e seus momentos de inércia podem ser calculados por meio da equação $(I = \frac{1}{2}MR^2)$, em que M é a massa da roda e R , o seu raio. De acordo com o enunciado, determine, para uma das rodas do veículo:

- | | |
|---|--|
| a) a sua velocidade do centro de massa; | d) a sua energia cinética de rotação; |
| b) a sua velocidade angular; | e) a sua energia cinética de translação; |
| c) o seu momento de inércia; | f) a sua energia cinética de rolamento. |

10 - Em seu dia a dia, quais objetos ou situações você observa que envolvem os conceitos de energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento? Faça uma breve descrição da sua resposta e explique como esses conceitos se aplicam na prática.

RASCUNHO PARA CÁLCULOS

Parabéns por ter concluído a avaliação com êxito! Espero que o conteúdo estudado e as interações com o Algodoo durante o bimestre tenha o ajudado responder às questões!

INSTRUÇÕES • O objetivo deste questionário é fazer um levantamento dos resultados da aplicação da sequência didática utilizada no 2º bimestre por meio da autoavaliação do seu aprendizado e da sua opinião acerca de todo o processo de estudo, principalmente referente ao uso do Algodoo. Portanto, seja o mais sincero possível nas suas respostas.	

AUTOAVALIAÇÃO E PESQUISA FINAL DE OPINIÃO

PARTE 1 - AUTOAVALIAÇÃO

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

1 – Em sua opinião, quais eram seus conhecimentos prévios sobre energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento antes de iniciar a sequência didática?

- a) Não tinha nenhum conhecimento sobre esses conceitos.
- b) Tinha conhecimento superficial sobre alguns dos conceitos, mas precisava de aprofundamento.
- c) Tinha conhecimento básico sobre os conceitos e suas aplicações.
- d) Tinha bom conhecimento sobre os conceitos e suas aplicações.
- e) Tinha ótimo conhecimento sobre os conceitos e suas aplicações.

2 – O que você achou do questionário inicial utilizado para verificar seus conhecimentos prévios?

- a) Não foi útil para avaliar meus conhecimentos.
- b) Foi um pouco útil, mas poderia ter sido mais abrangente.
- c) Foi útil para avaliar meus conhecimentos e identificar pontos de aprimoramento.
- d) Foi muito útil para avaliar meus conhecimentos e identificar pontos de aprimoramento.
- e) Foi extremamente útil para avaliar meus conhecimentos e identificar pontos de aprimoramento.

APRENDIZADO DURANTE A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

3 – Qual foi a sua percepção sobre a clareza e a organização das aulas expositivas (quadro e *slides*)?

- a) As aulas foram confusas e desorganizadas.
- b) As aulas foram um pouco confusas e desorganizadas.
- c) As aulas foram claras e organizadas, mas com alguns pontos que poderiam ser melhorados.
- d) As aulas foram muito claras e organizadas.
- e) As aulas foram extremamente claras e organizadas.

4 – Como você avalia a efetividade do uso do *software Algodoo* para o aprendizado dos conceitos?

- a) O uso do Algodoo não foi útil para o meu aprendizado.
- b) O uso do Algodoo foi um pouco útil, mas poderia ter sido mais explorado.
- c) O uso do Algodoo foi útil para o meu aprendizado, mas com algumas limitações.
- d) O uso do Algodoo foi muito útil para o meu aprendizado.
- e) O uso do Algodoo foi extremamente útil para o meu aprendizado.

5 – Quanto você se sente confiante na aplicação dos conceitos de energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento após a sequência didática?

- a) Não me sinto confiante na aplicação dos conceitos.
- b) Me sinto um pouco confiante na aplicação dos conceitos.
- c) Me sinto confiante na aplicação dos conceitos básicos.
- d) Me sinto muito confiante na aplicação dos conceitos.
- e) Me sinto extremamente confiante na aplicação dos conceitos.

6 – O que você achou da avaliação final da sequência didática?

- a) A avaliação não foi justa e não avaliou meus conhecimentos adequadamente.
- b) A avaliação foi um pouco injusta e poderia ter sido mais abrangente.
- c) A avaliação foi justa e avaliou meus conhecimentos de forma adequada.
- d) A avaliação foi muito justa e avaliou meus conhecimentos de forma abrangente.
- e) A avaliação foi extremamente justa e avaliou meus conhecimentos de forma abrangente e precisa.

SUGESTÕES PARA MELHORIA

7 – O que você acha que poderia mudar para melhorar a metodologia utilizada na sequência didática?

8 – Você acha que as aulas deveriam ser dadas de outra forma ou em outro ambiente? Qual?

9 – O que mais motivou você a participar das aulas e das atividades durante todo o 2º bimestre?

10 – Você tem alguma sugestão de como o seu professor deveria ter abordado o conteúdo?

11 – Você tem outros comentários ou sugestões que gostaria de compartilhar?

PARTE 2: AVALIAÇÃO DAS AULAS

CLAREZA DAS EXPLICAÇÕES

12 – As explicações dos conceitos foram claras e fáceis de entender?

13 – O professor utilizou exemplos e recursos visuais que facilitaram o aprendizado?

14 – O professor respondeu às suas dúvidas de forma satisfatória?

UTILIZAÇÃO DO *EBOOK* E DO *ALGODOO*

15 – O que você achou no livro digital utilizado? Ele possui uma linguagem de fácil compreensão? As figuras estão bem construídas? É fácil navegar pelas partes do *Ebook*? Ele aborda bem o conteúdo por meio do *software Algodoo*? A quantidade de exercícios é satisfatória? O conteúdo está bem dividido nos capítulos? O que ele poderia ser acrescentado ou retirado para melhorá-lo?

16 – As atividades com o *Algodoo* foram relevantes para o aprendizado dos conceitos?

17 – O professor orientou o uso do *Algodoo* de forma eficaz?

18 – Qual a sua opinião final sobre o uso do *Algodoo* para aprender Física?

PARTE 3: CONCEITO FINAL DE AUTOAVALIAÇÃO

19 – Em uma escala de 0 a 10, sendo 0 para EXTREMAMENTE RUIM e 10 para EXTREMAMENTE BOM, como você avalia seu aprendizado no final do 2º bimestre (período de aplicação da sequência didática)?

(0) (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10)

Obrigado pela sua participação! As suas respostas servirão para aprimorar futuras abordagens dos conteúdos e para melhoria do material didático utilizado.

INSTRUÇÕES

- Para esta atividade, vocês, alunos, para facilitar a sua execução, precisarão fazê-la em um computador ou notebook com sistema operacional *Windows*.
- Sigam os passos a seguir para a criação de uma simulação de quatro discos rígidos homogêneos em movimento de rotação para cálculo das suas energias cinéticas de rotação.
- Você precisará fazer o download do programa e, se preferir, da sua extensão de tradução para o português. Para isso, use o navegador de *internet* da sua preferência. Em caso de problemas de acesso, sugerimos o navegador **MOZILA FIREFOX**.

LABORATÓRIO DIGITAL NO ALGODOO

PASSO 1: Primeiro, você deve acessar o site de *download* do programa clicando no *link* a seguir ou digitando-o no seu navegador de *internet*:

<http://www.algodoo.com/download/>

Depois disso, clique no ícone de *download* grátis no final da página para baixar o *Algodoo*, como ilustrado na figura abaixo:



Fonte: Página oficial de download do Algodoo - <http://www.algodoo.com/download/>.

Execute o arquivo (**Algodoo_2_1_0-Win32.exe**) que você acabou de baixar para instalar o programa no seu computador.

Se preferir, você também pode baixar e instalar a extensão que permite traduzir o idioma do *software* para português por meio do *link* abaixo:

<http://www.algodoo.com/forum/viewtopic.php?f=30&t=12229&p=86459&hilit=tradu%C3%A7%C3%A3o&sid=2ed19f082184cf645d2a3a6a7d9a9be8#p86459>

Veja o tutorial de como instalar a tradução em português acessando o *link* a seguir:

<https://www.youtube.com/watch?v=3DErSjJkJeI>

A imagem abaixo ilustra a página inicial do Algodoo já com a tradução em português:



Fonte: Captura de tela do Algodoo.

PASSO 2: Com a tela inicial do Algodoo aberta, clique em **“Novo cenário”**, como mostra a imagem abaixo:



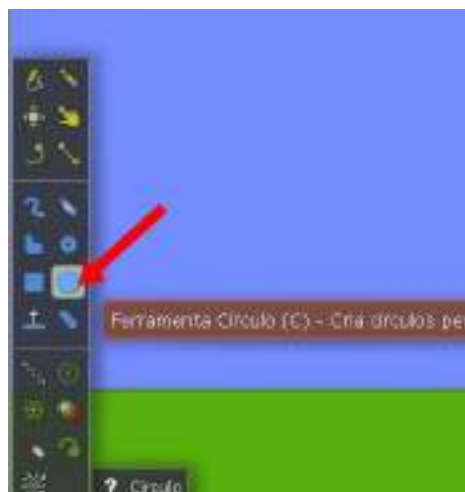
Fonte: Captura de tela do Algodoo.

Dentre os cenários disponíveis, escolha o que mais lhe agradar:



Fonte: Captura de tela do Algodoo.

PASSO 3: Com o novo cenário aberto, escolha a “Ferramenta Círculo” e crie quatro círculos perfeitos de tamanhos diferentes, como ilustram as imagens a seguir (não esqueça de anotar os tamanhos dos raios dos círculos que você acabou de criar):



Fonte: Capturas de telas do Algodoo.

PASSO 3: Agora, você poderá atribuir um valor de massa para cada um dos discos que você acabou de criar. Para isso, clique no disco desejado e atribua a sua massa, conforme as imagens a seguir:

Faça isso para cada um dos discos, escolhendo sempre valores de massas diferentes. Não altere os demais valores.



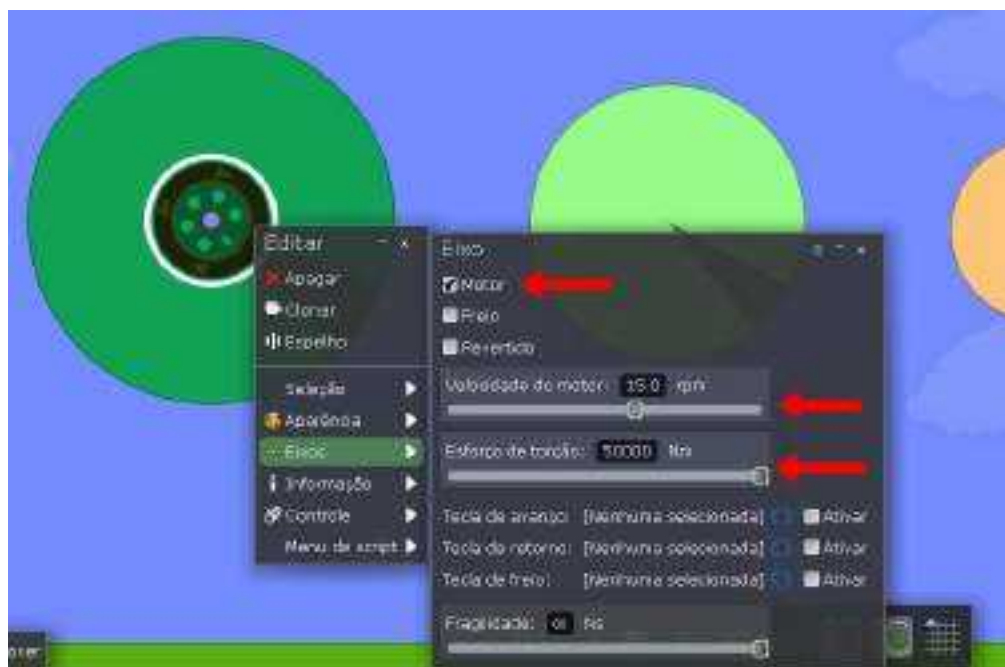
Fonte: Capturas de telas do Algodoo.

PASSO 4: Depois de atribuir as massas dos quatro discos, adicione um eixo no centro de cada um deles. Para isso, clique com o botão direito do *mouse* sobre o disco e siga os passos a seguir:



Fonte: Captura de tela do Algodoo.

PASSO 5: Com os eixos adicionados, clique com o botão direito do *mouse* sobre cada um dos eixos, ative a opção “**Motor**” e atribua um valor diferente para a frequência de giro de cada disco. Esse valor é fundamental para determinar as suas velocidades angulares. A unidade de frequência no programa está em rpm (rotações por minuto), sendo que 60 rpm equivalem a 1 *Hz*, ou seja, 60 rotações em um minuto é o mesmo que uma rotação em um segundo. Não esqueça de anotar os valores das frequências de cada disco.

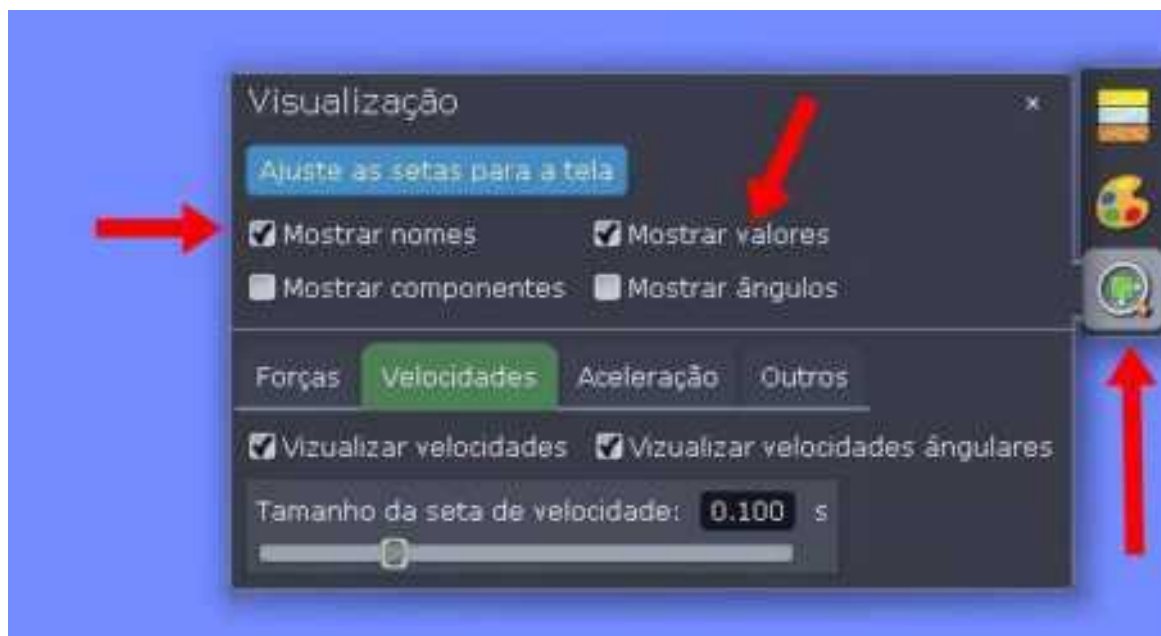


SUGESTÃO: Atribua o valor máximo para o “Esforço de torção” para o disco atingir a velocidade de giro de maneira mais eficiente.

A opção “Revertido” faz com que o disco gire em sentido oposto.

Fonte: Captura de tela do Algodoo.

PASSO 6: Clique no ícone “Visualização” e selecione as caixas de nomes e valores das velocidades angulares, de acordo com a figura a seguir.



Fonte: Captura de tela do Algodoo.

PASSO 7: Agora, preencha a tabela a seguir com os valores que você atribuiu para cada disco e, em seguida, calcule, além das velocidades angulares e os momentos de inércia, as suas energias cinéticas de rotação:

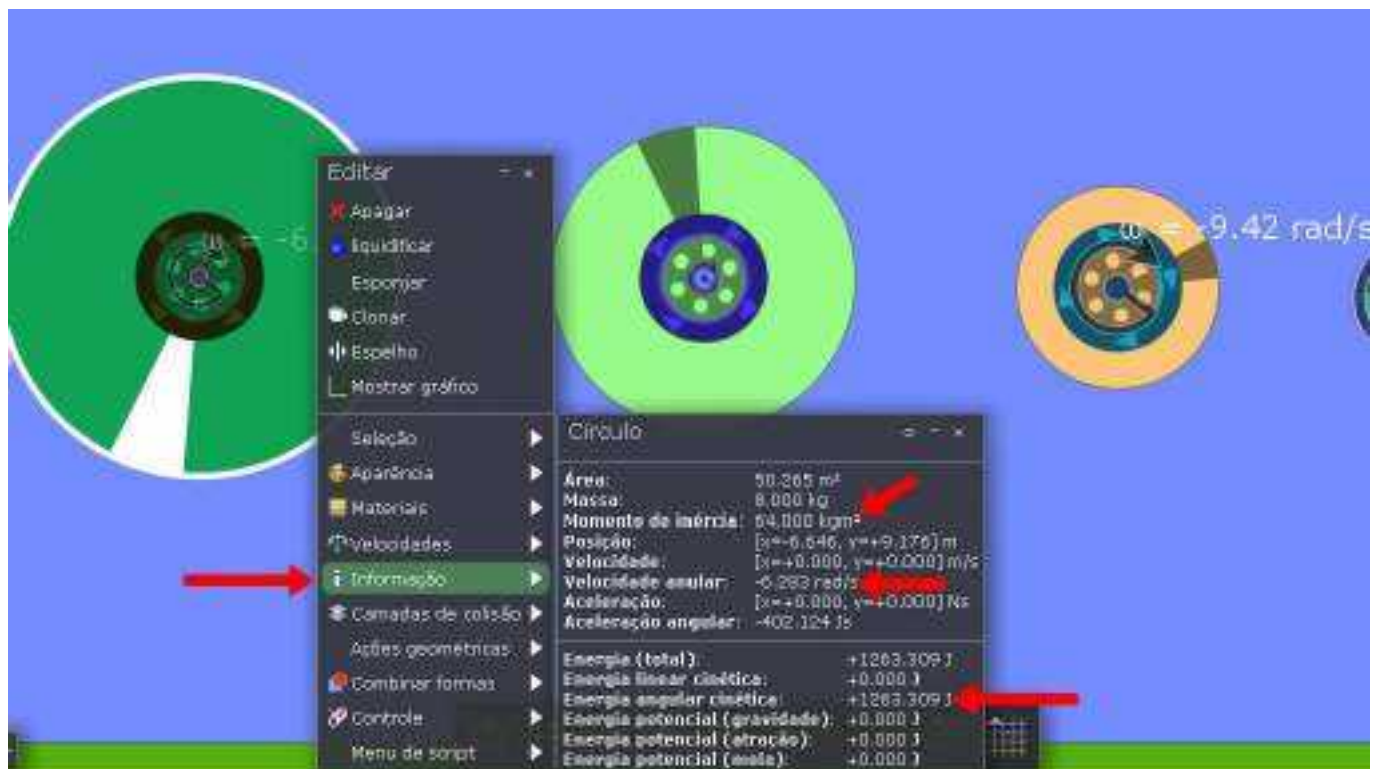
Disco	f (Hz)	m (kg)	r (m)	$\omega = 2\pi f$ (rad/s)	$I = \frac{mr^2}{2}$ (kgm ²)	$K = \frac{I\omega^2}{2}$ (J)
A						
B						
C						
D						

Tabela para cálculo da velocidade angular, momento de inércia e energia angular cinética dos discos homogêneos

PASSO 8: Por fim, reproduza a simulação e confira os valores das velocidades angulares, momentos de inércia e energia angular cinética de cada disco clicando com o botão direito sobre cada um deles e conferindo essas informações como mostra as figuras a seguir:



Fonte: Captura de tela do Algodoo.



Fonte: Captura de tela do Algodoo.

INFORMAÇÕES ADICIONAIS: Você também pode utilizar as outras ferramentas do software para uma melhor interatividade nas simulações que você está criando. Além disso, também é possível habilitar e desabilitar os efeitos gravitacionais e de resistência do ar caso sua simulação não leve em consideração esses fatores.



Fonte: Captura de tela do Algodoo.

Acesse também à *playlist* “**SIMULAÇÕES ALGODOO MNPEF**” do canal do meu canal, escaneado o QR *code* a seguir:



Ou acesse:

<https://youtu.be/g4AbAEK3zm4?si=kvb6VhahAkxf4RM2>

Fonte: QR *Code* da *playlist* SIMULAÇÕES ALGODOO MNPEF , do Canal Anderson Silva, no *YouTube*.

REFERÊNCIAS

ALGODOO. [Software]. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <<http://www.algodoo.com/>>. Acesso em: 12 mar. 2024.

ALGODOO. **Tradução do Algodoo**. Fórum Algodoo. Disponível em: <<http://www.algodoo.com/forum/viewtopic.php?f=30&t=12229&p=86459&hilit=tradu%C3%A7%C3%A3o&sid=2ed19f082184cf645d2a3a6a7d9a9be8#p86459>> . Publicado em: 29 set. 2018. Acesso em: 13 mar. 2024.

Introdução à Plataforma Algodoo | GEDAI-MG | CEFET. **Como instalar a tradução PT-BR no Algodoo | Introdução à plataforma Algodoo | GEDAI-MG | CEFET-MG**. YouTube, 05 de maio de 2021. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=3DErSjJkjeI>>. Acesso em: 27 mar. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <<https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>>. Acesso em: 28 nov. 2023.

CONTROLE DAS RESPOSTAS NO PRÉ-TESTE I

[illegible][illegible]

CONTROLE DAS RESPOSTAS NO PRÉ-TESTE II

[illegible][illegible]

CONTROLE DAS RESPOSTAS NO PÓS-TESTE										
COMPETÊNCIA	NÚMERO DA QUESTÃO E QUANTIDADE DE RESPOSTAS									
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
EXCELENTE										
BOM										
REGULAR										
INSUFICIENTE										
NÃO RESPONDEU										

PARTE 1 – AUTOAVALIAÇÃO (QUESTÕES OBJETIVAS) (OPINIÃO DOS ALUNOS)										
RESPOSTA	NÚMERO DA QUESTÃO E QUANTIDADE DE RESPOSTAS									
	1	2	3	4	5	6				
a										
b										
b										
d										
e										

PARTE 1 – AUTOAVALIAÇÃO (QUESTÕES DISURSIVAS) (OPINOÃO DOS ALUNOS)										
PARÂMETRO	NÚMERO DA QUESTÃO E QUANTIDADE DE RESPOSTAS									
	7	8	9	10	11					
RESPONDEU										
RESPONDEU PARCIALMENTE										
NÃO RESPONDEU										

PARTE 2 – AVALIAÇÃO DAS AULAS (OPINIÃO DOS ALUNOS)										
PARÂMETRO	NÚMERO DA QUESTÃO E QUANTIDADE DE RESPOSTAS									
	12	13	14	15	16	17	18			
RESPONDEU										
RESPONDEU PARCIALMENTE										
NÃO RESPONDEU										

PARTE 3 - CONCEITO FINAL DE AUTOAVALIAÇÃO										
ESCALAS										
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

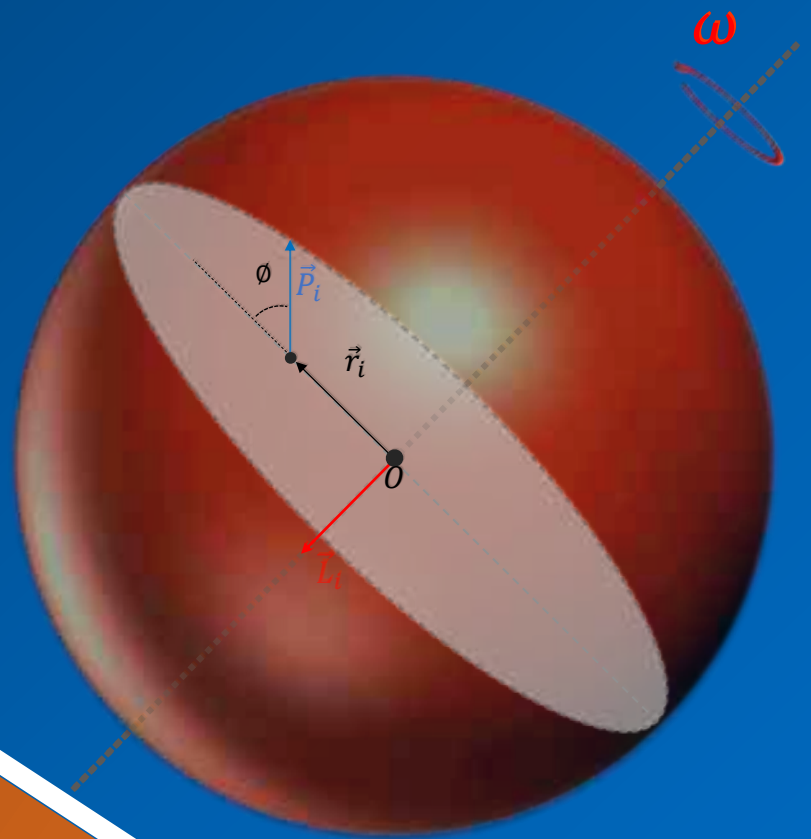
OS ALUNOS SE IDENTIFICARAM NOS QUESTIONÁRIO FINAL	
PARÂMETRO	QUANTIDADE DE ALUNOS
SIM	
NÃO	

APÊNDICE B – EBOOK ALGODOO E A DINÂMICA ROTACIONAL

Anderson Gomes da Silva

Melquisedec Lourenço da Silva

Algodoo e a Dinâmica Rotacional



Anderson Gomes da Silva
Melquisedec Lourenço da Silva

***Algodoo
e a
Dinâmica Rotacional***

1ª edição

Algodoo e a Dinâmica Rotacional

Primeira publicação em
Natal, Rio Grande do Norte, Brasil.
2025

1ª Edição

Todos os direitos da obra
Algodoo e a Dinâmica Rotacional
reservados aos autores

Copyright do texto © Anderson Gomes da Silva, 2023
Artes do livro – Anderson Gomes da Silva

Diagramação: *Anderson Gomes da Silva*

Autores: *Anderson Gomes da Silva*

Melquisedec Lourenço da Silva

S586a Silva, Anderson Gomes da – 1986
 Algodoo e a Dinâmica Rotacional / Anderson Gomes da
 Silva, Melquisedec Lourenço da Silva. – 1. ed. – Natal, RN :
 Ed. dos Autores, 2025.
 182p.

ISBN:

1. Ensino de Física 2. Software Algodoo 3. Dinâmica Rotacional
I. Título II. Silva, Melquisedec Lourenço da

CDD – 531

“A mente que se abre a uma nova ideia
jamais voltará ao seu tamanho original.”

Albert Einstein

APRESENTAÇÃO

Caro professor e/ou caro aluno, se você chegou até aqui, certamente gosta de estudar Física e é fascinado pelo funcionamento do mundo em que vivemos. Muitos são os fenômenos físicos que são capazes de prender a nossa atenção e despertar o nosso interesse por essa disciplina extraordinária. Objetivando uma melhor interatividade dos conceitos que permeiam essa área do conhecimento, apresentamos este livro que busca aliar a teoria de uma parte dessa ciência à prática por meio de simulações interativas utilizando *software* gratuito *Algodo*.

A palavra *Algodo* é a junção das palavras em inglês “*Algorithm*” e “*Do*”, que significam algoritmo e fazer, respectivamente, e se refere a um aplicativo de simulação desenvolvido, a princípio, por Emil Ernerfeldt da Universidade Umea, Suécia, em 2008, como objeto de sua dissertação de Mestrado. Nele, podemos realizar várias simulações em duas dimensões (2D).

A parte teórica deste livro é dividida em 12 capítulos sobre a **Dinâmica Rotacional** da seguinte forma: Capítulo 1 – Rotação; Capítulo 2 – Conexões entre as Variáveis Lineares e as Angulares; Capítulo 3 – Movimentos Circulares Acoplados; Capítulo 4 – Energia Cinética de Rotação; Capítulo 5 – Torque; Capítulo 6 – Trabalho e Energia Cinética de Rotação; Capítulo 7 – Rolamento; Capítulo 8 – Energia Cinética de Rolamento; Capítulo 9 – As Forças de Rolamento; Capítulo 10 – Revisando o Torque; Capítulo 11 – Momento Angular e Capítulo 12 – Conservação do Momento Angular.

Todos os capítulos contam com **Figuras, Tabelas, Equações, Exercícios Resolvidos, Exercícios Propostos e Revisão** do conteúdo abordado no capítulo. Ademais, quando necessário, também há um tópico chamado **Saiba mais...**, destinado a apresentar uma linguagem, principalmente de cálculo, de nível superior para aqueles alunos ou professores que desejam se aprofundar um pouco mais, mesmo que o conteúdo de todos os capítulos sejam focados na linguagem de Ensino Médio.

Além disso, todos eles também contam, principalmente, com o tópico **Usando o Algodo**: que consiste na demonstração do conteúdo estudado em simulação no programa computacional, em que o leitor pode acessar as simulações por meio de *links*. Também é possível fazer o *download* do *software* gratuitamente e visualizar, inclusive, a vídeos com tutoriais de como fazer as simulações. Nesse tópico, também são disponibilizados Tarefas Propostas conexa com o aplicativo.

Os vídeos com os tutoriais das simulações no *software* podem ser acessados escaneando o QR Code ao lado.

Esperamos que você goste do conteúdo apresentado neste livro e que ele possa te ajudar a entender melhor os conceitos desse mundo esplêndido que é a Física.



ou acesse:
<https://abre.ai/hrgr>

Os autores

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.01: Máquina de Atwood ilustrando o movimento de rotação de uma polia em relação a um eixo fixo	14
Figura 1.02: Circunferência com rotação em sentido anti-horário	16
Figura 1.03: Reta de referência do corpo rígido variando das posições angulares θ_1 para θ_2 nos instantes t_1 e t_2 , respectivamente, formando o deslocamento angular $\Delta\theta$ no intervalo de tempo Δt	17
Figura 1.04: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> : disco rígido em rotação	20
Figura 2.01: Esboço de um disco rígido em rotação em sentido anti-horário com uma partícula descrevendo um movimento circular e uniforme em torno de um eixo fixo	28
Figura 2.02: Corpo rígido circular em rotação em sentido anti-horário descrevendo um movimento circular e uniforme.....	28
Figura 2.03: Corpo rígido circular em rotação no sentido anti-horário descrevendo um movimento circular acelerado	31
Figura 2.04: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> : valores de módulos de velocidades lineares no MCU.....	32
Figura 2.05: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> : velocidade angular constante no MCU	33
Figura 2.06: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> : trajetória circular de pontos distintos de um corpo rígido em rotação.....	34
Figura 3.01: Transmissão de rotação entre polias	41
Figura 3.02: Transmissão de rotação entre engrenagens	43
Figura 3.03: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> : sistema de engrenagens com e sem mesmo eixo de rotação	44
Figura 3.04: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> : sistema de engrenagens com contato e com diferentes eixos de rotações.....	45
Figura 4.01: Momentos de inércia diferentes para corpos idênticos	51
Figura 4.02: Representação de corpos rígidos homogêneos	52
Figura 4.03: Momento de inércia de um P de um corpo rígido em um eixo a uma distância h a outro eixo paralelo a ele que passa pelo centro de massa desse corpo	53
Figura 4.04: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> : momento de inércia distintos para corpos idênticos.....	54
Figura 4.05: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> : gráfico <i>energia angular x velocidade angular</i> para um corpo com densidade constante	55

Figura 4.06: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> : verificação das informações dos resultados da simulação	56
Figura 5.01: Representação de um corpo rígido, fixo no eixo de rotação que passa pelo ponto O, sob a influência de uma força $\vec{F}$ que produz um torque	62
Figura 5.02: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> : torques diferentes para forças iguais aplicadas em corpos idênticos	66
Figura 5.03: Exercício Resolvido 5.02.....	68
Figura 5.04: Exercício Proposto 5.02.....	69
Figura 6.01: Corpo rígido de massa m em trajetória retilínea do instante t_1 a t_2 , submetido a uma força constante $\vec{F}$ e descrevendo um deslocamento $\vec{d}$, formando um ângulo θ com a força aplicada	72
Figura 6.02: Corpo rígido de massa m em rotação preso à extremidade de uma barra fina de comprimento r e de massa desprezível	76
Figura 6.03: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> : corpo de massa m preso à extremidade de uma barra fina de massa desprezível, submetido a uma força tangencial de 0,05 N e com velocidade angular de 3,09 rad/s	78
Figura 6.04: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> : mesmo corpo de massa m da Figura 6.03 em uma posição angular diferente, preso à extremidade de uma barra fina de massa desprezível, submetido a uma força tangencial de 0,05 N e com velocidade angular de 3,14 rad/s	78
Figura 6.05: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> : como obter acesso aos dados físicos de um objeto em simulação	80
Figura 6.06: Exercício Resolvido 6.02 - Corpo rígido em rotação preso na extremidade de uma barra fina de massa desprezível	82
Figura 6.07: Exercício Proposto 6.02 - Corpo rígido em rotação preso na extremidade de uma barra fina de massa desprezível	83
Figura 7.01: Esfera homogênea de massa m em movimento de rolamento sobre um plano inclinado	89
Figura 7.02: Esfera maciça homogênea rolando da esquerda para direita em um movimento combinado de rotação e translação sem deslizamento	90
Figura 7.03: Roda descrevendo um movimento de rolamento com velocidade do centro de massa $\vec{V}_{CM}$	91
Figura 7.04: Movimento de rolagem de uma roda como a combinação dos movimentos de rotação e translação puros	92
Figura 7.05: Roda de uma bicicleta em movimento para a direita. Os raios de cima estão menos nítidos porque estão se movendo mais devagar	93
Figura 7.06: Representação do movimento de rolagem como uma rotação pura, com eixo de rotação de passa pelo ponto B.....	94

Figura 7.07: Recorte de captura de tela do <i>software Algodoo</i> : movimento de rolamento suave de um objeto homogêneo circular descendo uma rampa	95
Figura 7.08: Recorte de captura de tela do <i>software Algodoo</i> : trajetórias de dois pontos distintos em um movimento de rolamento	96
Figura 7.09: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> : rolamento como uma rotação pura	96
Figura 7.10: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> : movimento de translação pura.....	97
Figura 7.11: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> : rotação pura com velocidades angulares constantes e velocidades lineares simétricas	98
Figura 7.12: Tarefa Proposta 7.0 – Roda de raio 40 cm descrevendo um movimento de rolamento	98
Figura 7.13: Exercício Resolvido 7.01 – Roda homogênea de raio 30 cm descrevendo um movimento de rolamento.....	99
Figura 7.14: Exercício Proposto 7.01 – Roda homogênea de raio 50 cm descrevendo um movimento de rolamento.....	102
Figura 8.01: Roda homogênea descrevendo um movimento de rolamento em um plano inclinado, com energia cinética de rotação $K_{\text{rotação}} = \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2$, energia cinética de translação $K_{\text{translação}} = \frac{1}{2} M V_{\text{CM}}^2$ e energia cinética de rolamento $K = \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{\text{CM}}^2$ sendo a soma das duas primeiras	108
Figura 8.02: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> : Ônibus em movimento retilíneo uniforme (MRU) com rodas em movimento de rolagem	109
Figura 9.01: Roda em movimento retilíneo acelerado com movimento de rolamento sem sofrer deslizamento	116
Figura 9.02: Corpo redondo em rolamento suave ao longo de um plano inclinado que forma um ângulo θ com o plano horizontal	117
Figura 9.03: Representação das forças do corpo redondo da Figura 9.02 . Em (a), todas as forças que atuam sobre o corpo. Em (b), o valor do módulo da componente x da força	118
Figura 9.04: Gráfico do desempenho da força de atrito agindo em um corpo.....	122
Figura 9.05: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> : forças agindo sobre um corpo em movimento de rolamento suave descendo uma rampa	122
Figura 9.06: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> : forças agindo sobre as rodas de um skate enquanto um skatista usa uma rampa apropriada para o movimento	123
Figura 10.01: Regra da mão direita para determinar a orientação do torque	130
Figura 10.02: Representação do passo a passo de como se obter a orientação do torque $\vec{\tau}$	131
Figura 10.03: Representação do passo a passo de como se obter o sentido do torque $\vec{\tau}$ invertendo o sentido da força $\vec{F}$ da Figura 10.02	132

Figura 10.04: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> : Regra da mão direita para determinar a orientação do torque $\vec{\tau}$ que faz a partícula girar em sentido anti-horário.....	133
Figura 10.05: Recorte da captura de tela do <i>software Algodoo</i> : Regra da mão direita para determinar a orientação do torque $\vec{\tau}$ que faz a partícula girar em sentido horário	133
Figura 10.06: Exercício Resolvido 10.01 – Cálculo dos torques produzidos por três forças sobre uma partícula de massa m em três situações distintas.....	135
Figura 10.07: Exercício Proposto 10.01 – Cálculo dos torques produzidos por três forças sobre uma partícula de massa m em três situações distintas.....	138
Figura 10.08: Regra da mão direita para produtos vetoriais. Em (a), os vetores posição $\vec{r}$ e força $\vec{F}$ no plano x - y relacionados à partícula no ponto P	139
Figura 11.01: Regra da mão direita para se obter a orientação do momento angular $\vec{L}$	144
Figura 11.02: Esfera homogênea girando em torno de um eixo fixo que passa pelo seu centro de massa, localizado no ponto O	149
Figura 11.03: Recorte de captura de tela do <i>software Algodoo</i> . Momento angular de uma esfera homogênea girando em sentido anti-horário	152
Figura 11.04: Recorte de captura de tela do <i>software Algodoo</i> . Momento angular de uma esfera homogênea girando em sentido horário	152
Figura 11.05: Exercício Resolvido 11.01: Momento angular de uma partícula de massa m em movimento circular uniforme	155
Figura 11.06: Exercício Proposto 11.01: Momento angular de uma partícula de massa m em movimento circular uniforme	158
Figura 12.01: Representação de uma pessoa girando em uma cadeira giratória.....	167
Figura 12.02: Representação de um patinador de gelo girando quase que livremente em torno do seu eixo vertical	168
Figura 12.03: Representação de um atleta realizando um salto mortal	169
Figura 12.04: Captura de tela do <i>software Algodoo</i> . Conservação do momento angular mesmo com a variação do momento de inércia de um sistema	170
Figura 12.05: Exercício Resolvido 12.02 - Representação de um estudante girando em uma cadeira giratória	174
Figura 12.06: Exercício Proposto 12.02 - Representação de um estudante girando em uma cadeira giratória	176
Figura 12.07: Pião girando em torno do seu eixo de rotação em um movimento de precessão ...	177

SUMÁRIO

Capítulo 1

Rotação

13

1.1 O que é Rotação?	14
1.2 – As Grandezas de Rotação	15
1.2.1 – Posição Angular	15
1.2.2 – Deslocamento Angular	16
1.2.3 – Velocidade Angular	17
1.2.4 – Aceleração Angular	18
1.2.5 – Aceleração Angular Constante	18
USANDO O ALGODOO 1.0	19
TAREFA PROPOSTA 1.0	20
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS	21
EXERCÍCIOS PROPOSTOS	22
Saiba mais...	23
REVISÃO	24

Capítulo 2

Conexões entre as Variáveis Lineares e as Angulares

26

2.1 – Movimento Circular e Uniforme de Rotação	27
2.2 – Movimento Circular Acelerado	31
USANDO O ALGODOO 2.0	32
TAREFA PROPOSTA 2.0	34
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS	35
EXERCÍCIOS PROPOSTOS	36
Saiba mais...	36
REVISÃO	38

Capítulo 3

Movimentos Circulares Acoplados

40

USANDO O ALGODOO 3.0	44
TAREFA PROPOSTA 3.0	45
EXERCÍCIO RESOLVIDO	46

EXERCÍCIO PROPOSTO.....	47
REVISÃO	48

Capítulo 4	Energia Cinética de Rotação	49
-------------------	------------------------------------	-----------

4.1 – Momento de Inércia – Distribuição Contínua de Massa	52
4.1.1 – Centro de Massa	52
4.1.2 – Teorema dos Eixos Paralelos	53

USANDO O ALGODOO 4.0	54
TAREFA PROPOSTA 4.0.....	55

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS	56
-----------------------------	----

EXERCÍCIOS PROPOSTOS	58
----------------------------	----

Saiba mais...	58
---------------------	----

REVISÃO	60
---------------	----

Capítulo 5	Torque	61
-------------------	---------------	-----------

USANDO O ALGODOO 5.0	65
TAREFA PROPOSTA 5.0	66

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS	67
-----------------------------	----

EXERCÍCIOS PROPOSTOS	68
----------------------------	----

Saiba mais...	69
---------------------	----

REVISÃO	70
---------------	----

Capítulo 6	Trabalho e Energia Cinética de Rotação	71
-------------------	---	-----------

6.1 – Potência	76
----------------------	----

USANDO O ALGODOO 6.0	77
TAREFA PROPOSTA 6.0	79

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS	81
-----------------------------	----

EXERCÍCIOS PROPOSTOS	83
----------------------------	----

Saiba mais...	84
---------------------	----

REVISÃO	86
---------------	----

Capítulo 7**Rolamento****88**

7.1 – O que é Rolamento?	89
7.2 – Rolamento: uma combinação de Rotação e Translação	90
7.3 – Rolamento como uma Rotação Pura	93
USANDO O ALGODOO 7.0	95
TAREFA PROPOSTA 7.0	98
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS	99
EXERCÍCIOS PROPOSTOS	102
Saiba mais... ..	103
REVISÃO	104

Capítulo 8**Energia Cinética de Rolamento****106**

USANDO O ALGODOO 8.0	109
TAREFA PROPOSTA 8.0	109
EXERCÍCIO RESOLVIDO	111
EXERCÍCIO PROPOSTO	113
REVISÃO	114

Capítulo 9**As Forças de Rolamento****115**

9.1 – Atrito e Rolamento	116
9.2 – Rolamento no Plano Inclinado	117
USANDO O ALGODOO 9.0	122
TAREFA PROPOSTA 9.0	123
EXERCÍCIO RESOLVIDO	126
EXERCÍCIO PROPOSTO	126
REVISÃO	127

Capítulo 10**Revisando o Torque****129**

USANDO O ALGODOO 10.0	133
TAREFA PROPOSTA 10.0	134

EXERCÍCIO RESOLVIDO	135
EXERCÍCIO PROPOSTO	138
Saiba mais.....	138
REVISÃO	141

Capítulo 11	Momento Angular	144
--------------------	------------------------	------------

11.1 – Momento Angular e a Segunda Lei de Newton	146
11.2 – Momento Angular de um Sistema de Partículas	148
11.3 – Momento Angular de um Corpo Rígido	149
USANDO O ALGODOO 11.0	152
TAREFA PROPOSTA 11.0	153
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS	155
EXERCÍCIOS PROPOSTOS	158
Saiba mais.....	158
REVISÃO	161

Capítulo 12	Conservação do Momento Angular	164
--------------------	---------------------------------------	------------

USANDO O ALGODOO 12.0	170
TAREFA PROPOSTA 12.0	171
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS	172
EXERCÍCIOS PROPOSTOS	176
Saiba mais.....	177
REVISÃO	178

Respostas dos Exercícios Propostos

180

Referências Bibliográficas

181



CAPÍTULO 1

ROTAÇÃO

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Definir o que é um movimento de rotação de um corpo rígido ou de uma partícula.
- ✓ Identificar quais são as grandezas da rotação.
- ✓ Usar o software de simulação Física Algodoo como extensão do aprendizado do capítulo.

1.1 - O que é Rotação?

Rotação é o movimento de giro de um corpo ou uma partícula em torno de um ponto ou eixo fixos, podendo ou não ter um movimento linear somado a esse corpo ou partícula.

Para entender melhor, imagine um disco girando em torno de seu centro. O disco está em movimento de rotação, mas não está se movendo para frente ou para trás. Ele está apenas girando em torno de seu próprio eixo.

O movimento de rotação é caracterizado por três grandezas:

ângulo: medida do quanto um objeto girou em torno de seu eixo;

velocidade angular: taxa de mudança do ângulo de um objeto;

aceleração angular: taxa de mudança da velocidade angular de um objeto.

A rotação é uma parte fundamental da mecânica e é aplicada em diversos contextos.

A rotação da Terra sobre seu eixo, por exemplo, é responsável pela sucessão de dia e noite. O movimento de engrenagens em máquinas também é um exemplo de rotação. O movimento de rotação um disco em relação de seu centro é outro um exemplo típico de movimento de rotação.

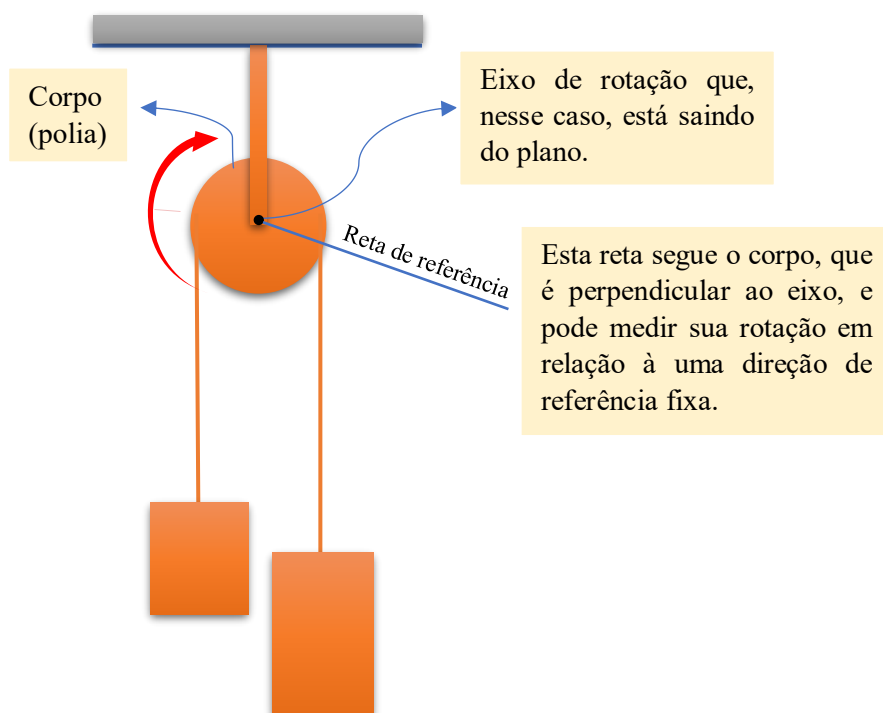


Figura 1.01: Máquina de Atwood ilustrando o movimento de rotação de uma polia em relação a um eixo fixo.

1.2 - As Grandezas de Rotação

Para nossa análise, iremos restringir nosso foco à rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo. Um corpo rígido é aquele que gira mantendo todas as suas partes interconectadas e sem sofrer alterações em sua forma. Um eixo fixo é um ponto de referência que não se move. Ele é utilizado para descrever o movimento de rotação de um corpo rígido.

A **Figura 1.01** ilustra uma polia executando um movimento de rotação em torno de um eixo fixo. Durante esse movimento, todos os pontos da polia percorrem trajetórias circulares cujo centro é o próprio eixo de rotação. Além disso, todos os pontos da polia descrevem o mesmo ângulo durante o mesmo intervalo de tempo.

O movimento de linear de um corpo é chamado de **translação**. Se houver apenas o movimento linear, sem que haja o de rotação, obviamente, trata-se de uma **translação pura**.

Imagine uma fila de pessoas andando em linha reta. A distância percorrida por cada pessoa é a mesma no mesmo intervalo de tempo, ou seja, todos os pontos da fila gastam o mesmo tempo para percorrer a mesma distância. Esse tipo de movimento é chamado de translação pura.

As correspondentes angulares das grandezas lineares serão tratadas em seguida.

1.2.1 - Posição Angular

A **posição angular** de uma reta é definida como o ângulo formado por essa reta em relação a uma direção fixa que é considerada como a posição angular zero. Na **Figura 1.02**, a posição angular, representada por θ , é medida em relação ao semieixo x positivo.

O ângulo θ pode ser expresso da seguinte forma:

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (\text{radianos} - \text{rad}) \quad (1.01)$$

- θ – posição angular;
- s – comprimento de um arco de circunferência formado entre o eixo positivo de x (posição angular zero) até a reta de referência;
- r – raio da circunferência.

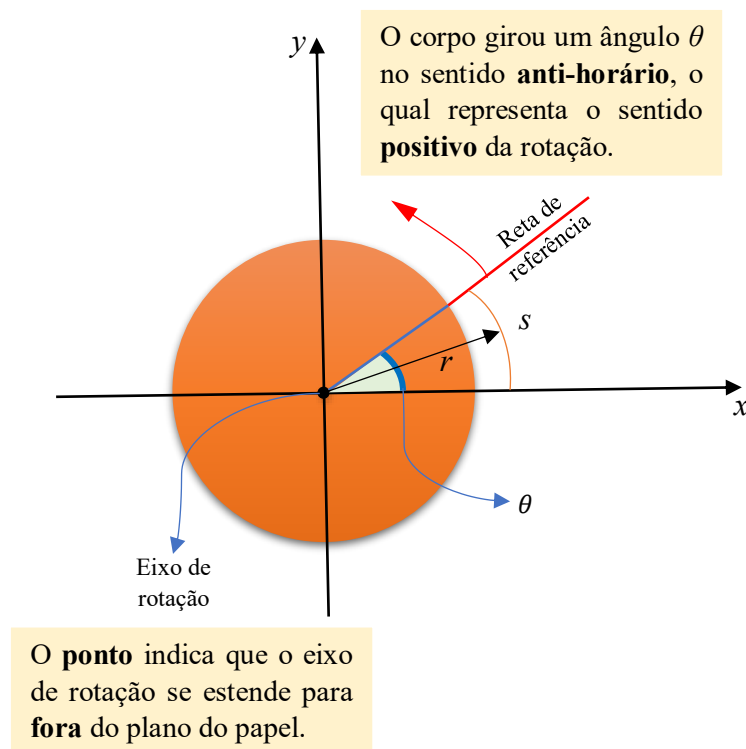


Figura 1.02: Circunferência com rotação em sentido anti-horário. A reta de referência é perpendicular ao eixo de rotação e faz um ângulo θ com o eixo x .

Em relação ao sentido da rotação:

- **horário:** sentido **negativo** da rotação;
- **anti-horário:** sentido **positivo** da rotação.

Na **Equação 1.01**, o ângulo definido dessa forma é medido em **radianos** (rad), medida sem dimensão.

Para fazer a conversão de radianos em graus, podemos usar uma regra de três simples:

Comprimento (s)	Ângulo (rad)	Ângulo (graus)
1 volta completa - $2\pi r$	2π	360°
Meia volta - πr	π	180°
$\frac{1}{4}$ de volta - $\pi r/2$	$\pi/2$	90°

Tabela 1.01: Equivalência entre medidas de ângulos em radianos e em graus.

1.2.2 - Deslocamento Angular

Se o círculo da **Figura 1.02** gira em torno do eixo fixo de rotação, fazendo com que a reta de referência mude da posição angular θ_1 para θ_2 , o corpo sofre uma variação na sua posição angular e, portando, descreve um **deslocamento angular** $\Delta\theta$ expresso por:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \text{ (rad)} \quad (1.02)$$

- θ_1 – posição angular inicial;
- θ_2 – posição angular final;
- $\Delta\theta$ – variação da posição angular ou deslocamento angular.

⚠ IMPORTANTE

Da mesma forma que se dá o sentido de rotação do corpo, um deslocamento angular no sentido anti-horário é positivo, enquanto no sentido horário, negativo.

1.2.3 - Velocidade Angular

Considere que um corpo em movimento de rotação está na posição angular θ_1 , no instante t_1 , e em θ_2 , em t_2 , como na **Figura 1.03** a seguir. O módulo da **velocidade angular média** do corpo nesse intervalo de tempo é definido como:

$$\omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \text{ (rad/s)} \quad (1.03)$$

- ω_m – módulo da velocidade angular média;
- $\Delta\theta$ – variação da posição angular ou deslocamento angular;
- Δt – intervalo de tempo, tempo gasto ou tempo decorrido.

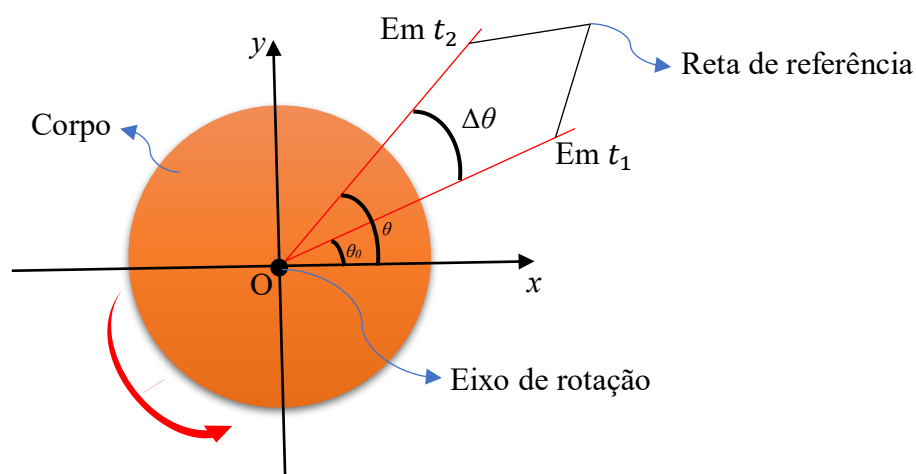


Figura 1.03: Reta de referência do corpo rígido variando das posições angulares θ_1 para θ_2 nos instantes t_1 e t_2 , respectivamente, formando o deslocamento angular $\Delta\theta$ no intervalo de tempo Δt .

1.2.4 - Aceleração Angular

Quando a velocidade angular de um corpo, com o passar do tempo, sofre variações, ou seja, não é constante, o corpo possui **aceleração angular**.

O módulo da aceleração angular média de um corpo em rotação é obtido por meio da equação:

$$\alpha_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t}$$

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (\text{rad/s}^2) \quad (1.04)$$

- α_m – módulo da aceleração angular média;
- ω_2 – velocidade angular final;
- ω_1 – velocidade angular inicial;
- $\Delta\omega$ – variação da velocidade angular;
- Δt – intervalo de tempo, tempo gasto ou tempo decorrido.

IMPORTANTE

A velocidade angular pode ser expressa como uma **grandeza vetorial** e o sentido do vetor velocidade angular é dado pela regra da mão direita, se estendendo sempre ao longo do eixo de rotação. Veremos como utilizar essa regra mais à frente.

1.2.5 - Aceleração Angular Constante

Em movimentos de translação pura, as equações que descrevem movimentos com aceleração linear constante têm equivalentes nas equações que descrevem movimentos de rotação pura com aceleração angular constante.

Vamos demonstrar um par de equações (aceleração linear constante e aceleração angular constante) e generalizar para as demais situações, considerando $t_1 = 0$ e $t_2 = t$:

$$\text{➤ } a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \Delta v = a\Delta t \rightarrow v_2 - v_1 = a(t_2 - t_1) \rightarrow \mathbf{v_2 = v_1 + at} \quad (\text{para } t_1 = 0)$$

$$\text{➤ } \alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \rightarrow \Delta\omega = \alpha\Delta t \rightarrow \omega_2 - \omega_1 = \alpha(t_2 - t_1) \rightarrow \mathbf{\omega_2 = \omega_1 + \alpha t} \quad (\text{para } t_0 = 0)$$

A **Tabela 1.03** discrimina a correspondência entre as equações angulares e as equações lineares:

Equação Linear	Equação Angular	Nº da Equação Angular
$v_2 = v_1 + at$	$\omega_2 = \omega_1 + \alpha t$	(1.05)
$\Delta S = v_1 t + \frac{1}{2}at^2$	$\Delta \theta = \omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(1.06)
$S_2 = S_1 + v_1 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta_2 = \theta_1 + \omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(1.07)
$v_m = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$	$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$	(1.08)
$v_2^2 = v_1^2 + 2a\Delta S$	$\omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\alpha\Delta \theta$	(1.09)

Tabela 1.02: Equivalência entre as equações de movimento para acelerações linear e angular constantes.

USANDO O *ALGODOO* 1.0

A partir de agora, vamos, antes dos exercícios de cada capítulo, apresentar, quando possível, simulações dos conteúdos do referido tópico por meio de um aplicativo de simulação de Física em duas dimensões (2D) chamado *Algodoos*.

O objetivo do uso deste aplicativo é mostrar um meio interativo de alinhar a teoria dos assuntos deste material à prática, através de um *software* computacional gratuito e de fácil acesso, que pode, inclusive, ser usado sem a necessidade de acesso à *internet*, o que traz uma enorme facilidade quanto ao seu uso.

O *Algodoos* pode ser baixado por meio do endereço eletrônico (<http://www.algodoo.com/download>). E, para uma interação mais simples, sua extensão em português também pode ser encontrada no *link* (<https://bitlybr.com/aouCl>).

Além disso, sempre que plausível, haverá uma sugestão de atividade direcionada ao leitor para confirmação dos fenômenos estudados, além de vídeos com tutoriais das simulações.

Para todas as interações no aplicativo, haverá *links* e/ou códigos de leitura que direcionará o usuário ao acesso do material eletrônico.

Feita essa breve introdução sobre o *software*, vamos à prática.

A **Figura 1.04** a seguir contém um disco homogêneo em rotação descrevendo um movimento circular variável, no qual podemos visualizar o valor da sua velocidade angular de rotação em um determinado instante.

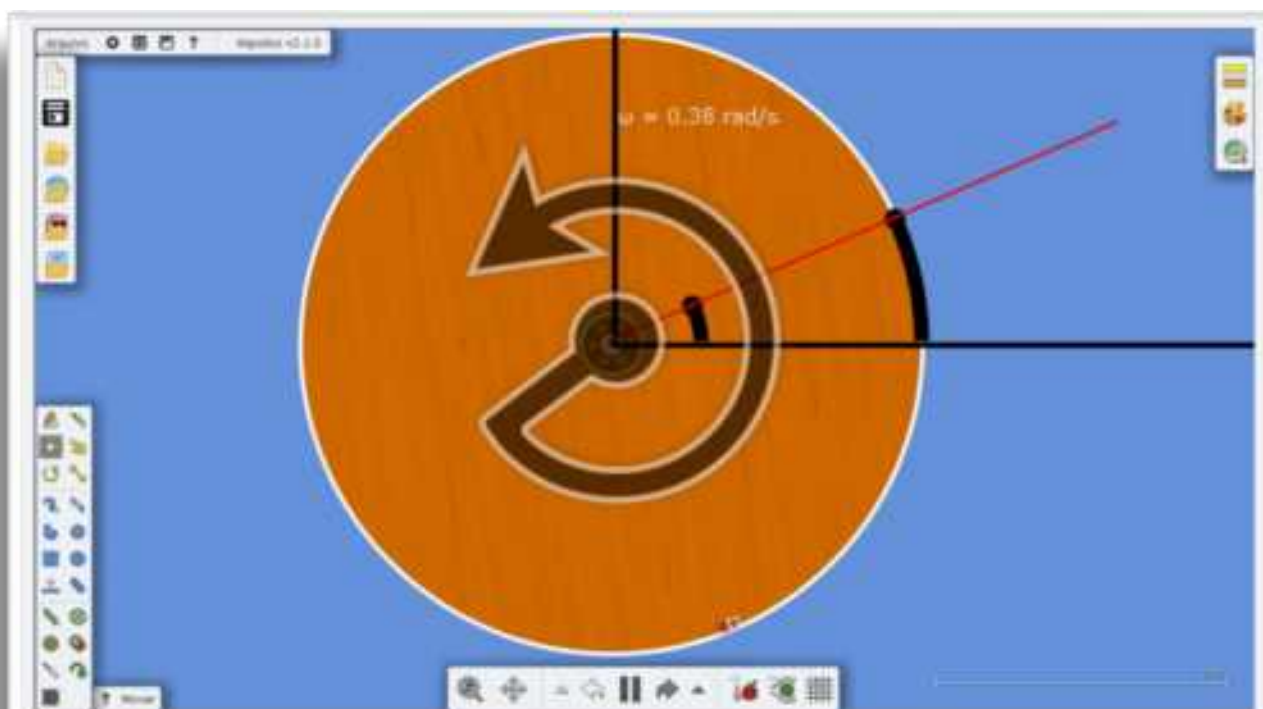


Figura 1.04: Captura de tela do software Algodoo: disco rígido em rotação.

Fonte: os autores.

Simulação disponível em: <http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=263993>.

Faça o download do aplicativo Algodoo gratuitamente em: <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do software, clique [aqui](#).

Clique no link <https://youtu.be/g4AbAEK3zm4> ou escaneie o QR code a seguir para assistir ao vídeo do tutorial da animação.



TAREFA PROPOSTA 1.0

Agora, é a sua vez de verificar se os resultados da tabela abaixo batem com uma simulação no programa.

A **Tabela 1.03** abaixo apresenta os dados para cálculo da velocidade angular de dois discos homogêneos.

Disco	$\Delta\theta$ (rad)	Δt (s)	$\omega_m = \Delta\theta / \Delta t$ (rad/s)
A	2π (sentido anti-horário)	0,5	
B	-2π (sentido horário)	2	

Tabela 1.03: Tabela para cálculo da velocidade angular média da Tarefa Proposta 1.0.

Considere $\pi = 3,14$ e utilize os dados apresentados na tabela e realize os cálculos para obter a velocidade angular média de cada disco fazendo uso da equação da última coluna da tabela.

Em seguida, clique **AQUI** para verificar a simulação com os resultados para cada disco.

E aí, acertou!?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1.01 – Determine a velocidade angular média de um ponto sobre um círculo em rotação que variou 2π radianos em um intervalo de tempo de 4 segundos.

Solução: Para calcular a velocidade angular média, usaremos a **Equação 1.03**:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\omega_m = \frac{2\pi \text{ rad}}{4 \text{ s}}$$

$$\omega_m = 0,5\pi \text{ rad/s}$$

Assim, a velocidade angular do ponto é de $0,5\pi \text{ rad/s}$.

1.02 – Qual o tempo necessário para que um corpo rígido gire em uma volta completa em torno de um eixo fixo localizado no seu centro (rotação pura), sabendo que o módulo da sua aceleração média será de 2 rad/s^2 e o módulo da variação da sua velocidade angular, 30 rad/s ?

Solução: Para calcular a o tempo necessário para o corpo realizar uma volta completa em torno do eixo central, usaremos a **Equação 1.04**:

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta\omega}{\alpha_m}$$

$$\Delta t = \frac{30 \text{ rad/s}}{2 \text{ rad/s}^2}$$

$$\Delta t = 15 \text{ s}$$

Portanto, o tempo necessário para realização do giro completo do disco é de 15 s.

1.03 – Um objeto gira com aceleração angular constante de 2 rad/s^2 . Inicialmente, o objeto tem velocidade angular de 5 rad/s na posição angular $\theta_1 = 0$ em relação à horizontal. Em que instante esse objeto terá girado até a posição $\theta_2 = 36 \text{ rad}$?

Solução: Para calcular o instante final, usaremos a **Equação 1.07**:

$$\theta_2 = \theta_1 + \omega_1 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$36 = 0 + 5t + \frac{1}{2} \cdot 2t^2$$

$$36 = 5t + t^2$$

$$t^2 + 5t - 36 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2}$$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2}$$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2}$$

$$t = \frac{-5 \pm 13}{2}$$

$$t_1 = \frac{-5 + 13}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ s}$$

$$t_2 = \frac{-5 - 13}{2} = -\frac{18}{2} = -9 \text{ s}$$

Como o tempo é necessariamente positivo, a resposta correta é 4 s.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1.01 – Determine o deslocamento angular, em radianos, de um círculo em rotação em que um ponto arbitrário sobre ele obteve, em módulo, uma velocidade angular média de 8 *rad/s* em um intervalo de tempo de 0,5 segundo.

1.02 – Qual a intensidade da aceleração angular média de um corpo rígido em rotação pura, sabendo que no intervalo de tempo de 8 s ele variou sua velocidade angular em 40 rad/s .

1.03 – Um objeto gira com aceleração angular constante de 3 rad/s^2 . Inicialmente, o objeto tem velocidade angular de 2 rad/s na posição angular $\theta_1 = 1 rad$ em relação à horizontal. Em que instante esse objeto terá girado até a posição $\theta_2 = 67 rad$?

Saiba mais...

Para se calcular a **velocidade angular instantânea**, podemos usar o limite do quociente da **Equação 1.03** quando Δt tende a zero:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \int d\theta = \int \omega dt$$

Da mesma forma, a **aceleração angular instantânea** é o limite do quociente da **Equação 1.04** quando Δt tende a zero:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \int d\omega = \int \alpha dt$$

REVISÃO

As Grandezas de Rotação

Posição angular: A **posição angular** de uma **reta de referência** é definida como o ângulo formado por essa reta em relação a uma direção fixa que é considerada como a posição angular zero. Se θ for medido em radianos:

$$\theta = \frac{s}{r} \text{ (radianos - rad)} \quad (1.01)$$

- θ – ângulo;
- s – arco da circunferência;
- r – raio da circunferência.

Deslocamento angular: Quando um corpo gira em torno de um eixo de rotação ele sofre um **deslocamento angular** $\Delta\theta$ expresso por:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \text{ (rad)} \quad (1.02)$$

- $\Delta\theta$ – deslocamento angular;
- θ_2 – posição angular final;
- θ_1 – posição angular inicial.

Velocidade angular média: A variação da posição angular $\Delta\theta$ por intervalo de tempo para um corpo em rotação descrever esse deslocamento é chamada de **velocidade angular média** ω_m :

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \text{ (rad/s)} \quad (1.03)$$

- ω_m – velocidade angular média;
- $\Delta\theta$ – deslocamento angular;
- Δt – intervalo de tempo.

Aceleração angular média: Quando, com o passar do tempo, a velocidade angular do corpo rígido em rotação sofre variações, ou seja, não é constante, o corpo possui aceleração angular. A aceleração angular média é obtida através da expressão:

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \text{ (rad/s}^2\text{)} \quad (1.04)$$

- α_m – aceleração angular média;
- $\Delta\omega$ – variação da velocidade angular;
- Δt – intervalo de tempo.

Aceleração angular constante: Para o movimento de rotação com **aceleração angular constante**, a **Tabela 2.02** mostra as equações equivalentes entre os movimentos de translação e rotação com acelerações escalares constantes:

Equação Linear	Equação Angular	Nº da Equação Angular
$v_2 = v_1 + at$	$\omega_2 = \omega_1 + \alpha t$	(1.05)
$\Delta S = v_1 t + \frac{1}{2}at^2$	$\Delta\theta = \omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(1.06)
$S_2 = S_1 + v_1 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta_2 = \theta_1 + \omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(1.07)
$v_m = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$	$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$	(1.08)
$v_2^2 = v_1^2 + 2a\Delta S$	$\omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\alpha\Delta\theta$	(1.09)

v rad/s ω m/s θ

$$v = 2\pi f$$

$$\omega = 2\pi r f$$

 T

$$f = \frac{1}{T}$$

 Hz f

CAPÍTULO 2

CONEXÕES ENTRE AS VARIÁVEIS LINEARES E AS ANGULARES

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Estabelecer a relação entre as variáveis lineares e rotacionais.
- ✓ Verificar como as variáveis rotacionais e lineares se relacionam no MCU e no MCLV.
- ✓ Usar o *software* de simulação Física Algodoa como extensão do aprendizado do capítulo.

Analizamos, no capítulo anterior, a relação entre as grandezas de movimento linear e angular em um movimento circular com aceleração constante. Agora, imagine uma partícula que se move ao longo de uma circunferência com velocidade escalar constante. Essa partícula está realizando um movimento circular uniforme (MCU).

No MCU, a velocidade escalar linear da partícula é constante, ou seja, o módulo da velocidade é sempre o mesmo, e sua direção é sempre tangente à trajetória circular, que também é perpendicular ao raio.

Vamos imaginar um disco girando em torno de um eixo fixo. Cada ponto do disco descreve uma circunferência em torno do eixo. Elas completam uma volta no mesmo intervalo de tempo, resultando em uma velocidade angular constante ω . No entanto, a velocidade escalar linear de cada ponto do disco é diferente em relação à distância do eixo de rotação.

Para relacionar as grandezas lineares e angulares de um movimento rotacional, precisamos considerar essas grandezas em função do raio da trajetória circular, o qual é perpendicular ao eixo fixo de rotação.

2.1 - Movimento Circular e Uniforme de Rotação

No MCU, o tempo necessário para um corpo ou partícula completar uma volta chama-se de período T .

Por outro lado, a frequência f em um movimento circular e uniforme indica quantas vezes um objeto gira em torno de um ponto central em um determinado intervalo de tempo. Quanto maior a frequência, mais rápido o objeto gira.

A frequência é calculada dividindo-se o número de voltas por um intervalo de tempo.

$$f = \frac{n}{\Delta t}$$

$$f = \frac{1}{T} \quad (\text{hertz} - \text{Hz}) \quad (2.01)$$

Concluimos, assim, que a frequência é o inverso do período, bem como o período é o inverso da frequência: $f = \frac{1}{T} \rightarrow T = \frac{1}{f}$.

- f – frequência;
- T – período;
- n – número de voltas.

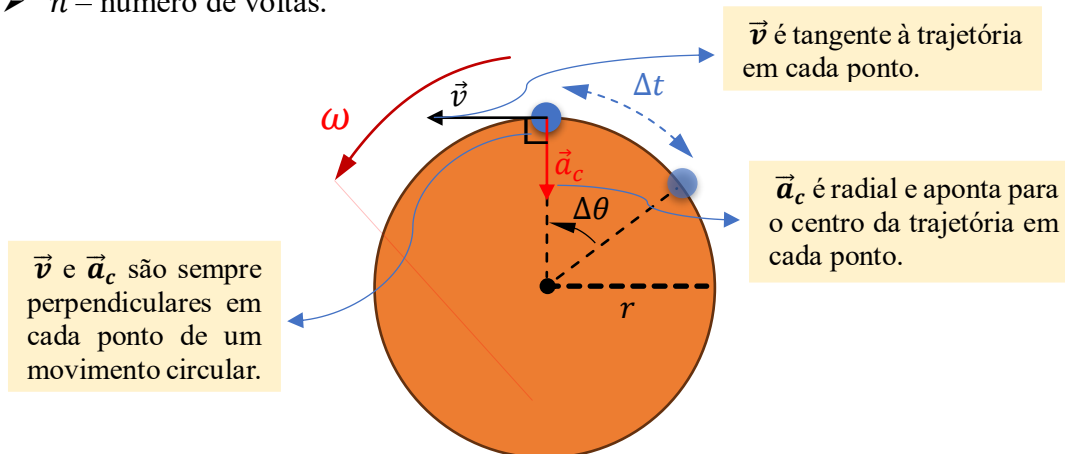


Figura 2.01: Esboço de um disco rígido em rotação em sentido anti-horário com uma partícula descrevendo um movimento circular e uniforme em torno de um eixo fixo.

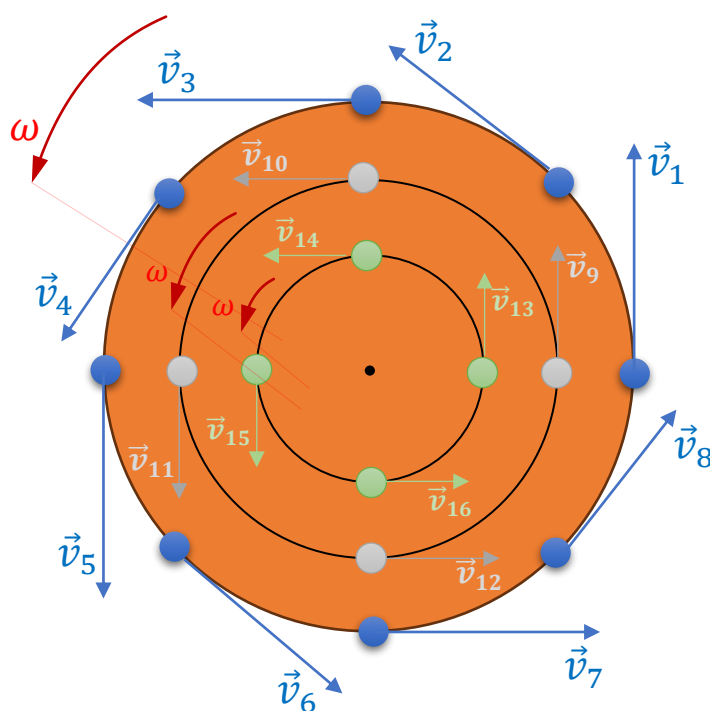


Figura 2.02: Corpo rígido circular em rotação em sentido anti-horário descrevendo um movimento circular e uniforme.

A **Figura 2.02** mostra que a direção da velocidade linear de um corpo em movimento circular é sempre tangente à trajetória. Isso significa que o corpo está sempre se movendo nessa direção. O módulo da velocidade linear, por sua vez, é proporcional ao raio da trajetória. Quanto mais afastado o ponto estiver do centro da trajetória, maior será o módulo da velocidade linear.

A **Figura 2.01** e a **Figura 2.02** mostram que, apesar de o movimento ser uniforme, apenas o módulo da velocidade linear não se altera, pois a **aceleração centrípeta**, que é a componente

radial da aceleração, é a responsável pela mudança da direção e do sentido da velocidade linear em cada ponto. A outra componente da aceleração, que no MCU é nula, responsável pela variação do módulo da velocidade linear, é a **aceleração tangencial**, que possui a mesma direção da velocidade linear. Além disso, a velocidade angular, no MCU, é constante em todos os pontos do corpo rígido, pois pontos distintos demoram o mesmo tempo para completar uma volta completa em torno do mesmo eixo fixo de rotação.

Assim, podemos dizer que, em módulo

- $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = v_6 = v_7 = v_8$
- $v_9 = v_{10} = v_{11} = v_{12}$
- $v_{13} = v_{14} = v_{15} = v_{16}$

Sendo o módulo da velocidade linear constante:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Para uma volta completa em um movimento circular, temos que:

- $\Delta S = 2\pi r$ – comprimento da circunferência;
- $\Delta t = T$ – período (tempo necessário para uma volta completa).

Substituindo:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad (m/s) \quad (2.02)$$

Como $f = \frac{1}{T}$, também podemos escrever a velocidade em função da frequência:

$$v = 2\pi r f \quad (m/s) \quad (2.03)$$

- v – módulo da velocidade linear;
- r – raio da trajetória circular;
- T – período;
- f – frequência.

Usando o fato de que, em radianos, uma volta completa corresponde ao deslocamento angular $\Delta\theta = 2\pi$, podemos reescrever a **Equação 2.02** em função da velocidade angular:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi}{T} r = 2\pi r f = \overset{\omega}{\omega} r$$

Logo:

$$v = \omega r \quad (m/s) \quad (2.04)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (rad/s) \quad (2.05)$$

$$\omega = 2\pi f \quad (rad/s) \quad (2.06)$$

- v – módulo da velocidade linear;
- ω – velocidade angular constante;
- r – raio da trajetória circular;
- T – período;
- f – frequência.

Como já vimos, a aceleração centrípeta é radial, responsável pela mudança de direção e sentido da velocidade linear, é perpendicular ao vetor velocidade linear, aponta para o centro da trajetória circular e seu módulo é dado por:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

sendo v o módulo da velocidade linear e r o raio da trajetória circular.

Como $v = \omega r$:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r$$

Logo:

$$a_c = \omega^2 r \quad (m/s^2) \quad (2.07)$$

Como $v = \omega r$, podemos também reescrever a aceleração centrípeta da seguinte forma:

$$a_c = \omega^2 r = \omega \cdot \omega r = \omega v$$

$$a_c = \omega v \quad (m/s^2) \quad (2.08)$$

- a_c – módulo da aceleração centrípeta;
- v – módulo da velocidade linear;
- ω – velocidade angular constante.

2.2 - Movimento Circular Acelerado

A **Tabela 1.02** já mostra a correspondência entre as equações do movimento linear e angular com acelerações constantes. Aqui, vamos estabelecer a relação entre essas grandezas na mesma equação.

O módulo da **aceleração linear média**, também chamada de tangencial, que, vetorialmente, é a componente do vetor aceleração em cada ponto, é dada pela equação:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$$

Sendo $v = \omega r$, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$a_m = \frac{\omega_2 r - \omega_1 r}{\Delta t} = \frac{(\omega - \omega_0)}{\Delta t} r = \boxed{\frac{\Delta \omega}{\Delta t}} r = \overset{\alpha_m}{\alpha} r$$

Para um **movimento circular uniformemente variado (MCUV)**, em que a aceleração tangencial é constante durante toda a trajetória, ou até mesmo se considerarmos uma aceleração angular instantânea em um curto intervalo de tempo, podemos escrever essa relação entre as acelerações como:

$$a_t = \alpha r \quad (m/s^2) \quad (2.09)$$

- a_t – módulo da aceleração tangencial;
- α – aceleração angular;
- r – raio da trajetória circular.

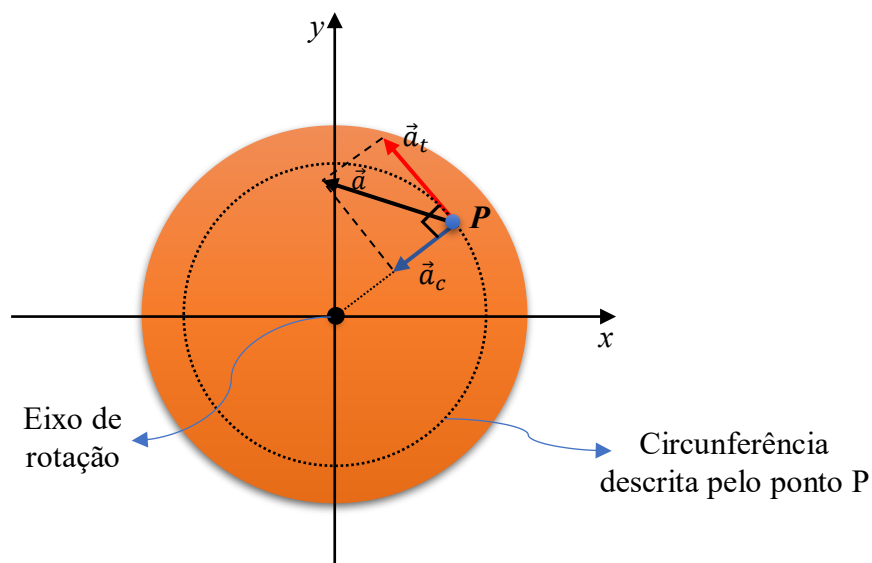


Figura 2.03: Corpo rígido circular em rotação no sentido anti-horário descrevendo um movimento circular acelerado.

Como mostrado na **Figura 2.03**, a aceleração linear de um ponto **P**, que pertence a um corpo rígido em rotação, possui uma componente centrípeta e, se o movimento de rotação for acelerado, contendo, portanto, uma aceleração angular não nula, a aceleração linear também possui uma componente tangencial:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c \quad (m/s^2) \quad (2.10)$$

- $\vec{a}$ – aceleração;
- $\vec{a}_t$ – aceleração tangencial (linear);
- $\vec{a}_c$ – aceleração centrípeta.

Como as componentes tangencial e centrípeta da aceleração são perpendiculares entre si, usamos o Teorema de Pitágoras para calcular o módulo da aceleração:

$$a^2 = a_t^2 + a_c^2 \quad (m/s^2) \quad (2.11)$$

- a – módulo da aceleração;
- a_t – módulo da aceleração tangencial (linear);
- a_c – módulo da aceleração centrípeta.

USANDO O ALGODOO 2.0

Na **Figura 2.04** a seguir, temos uma simulação do *Algodoos* de um círculo homogêneo em rotação descrevendo um movimento circular uniforme, no qual podemos visualizar que o módulo da velocidade linear é maior quanto mais o ponto se afasta do eixo de rotação.

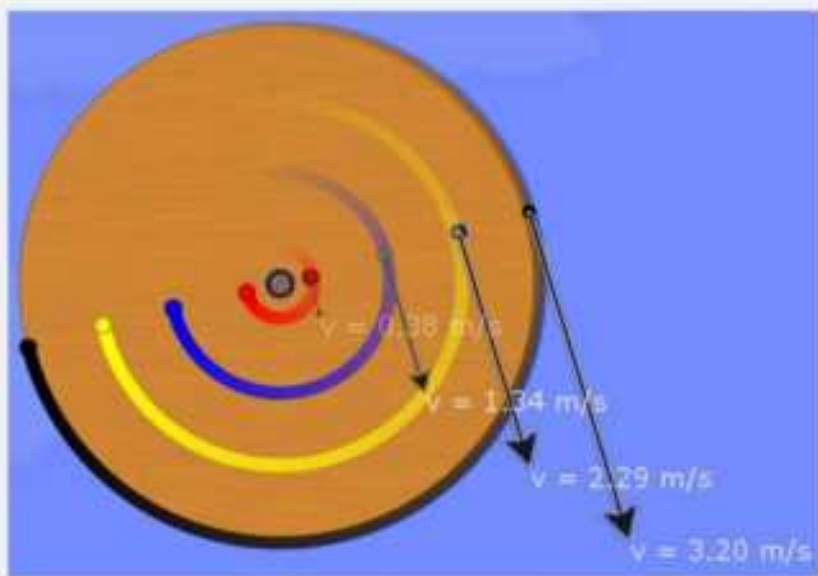


Figura 2.04: Captura de tela do *software Algodoos*: valores de módulos de velocidades lineares no MCU.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em:
<http://www.algodoos.com/algobox/details.php?id=264031>

Faça o *download* do aplicativo *Algodoos* gratuitamente em: <http://www.algodoos.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique [aqui](#).

Podemos também, na **Figura 2.05**, observar no *software* que a velocidade angular, em cada ponto do corpo rígido, é constante para um movimento circular uniforme:

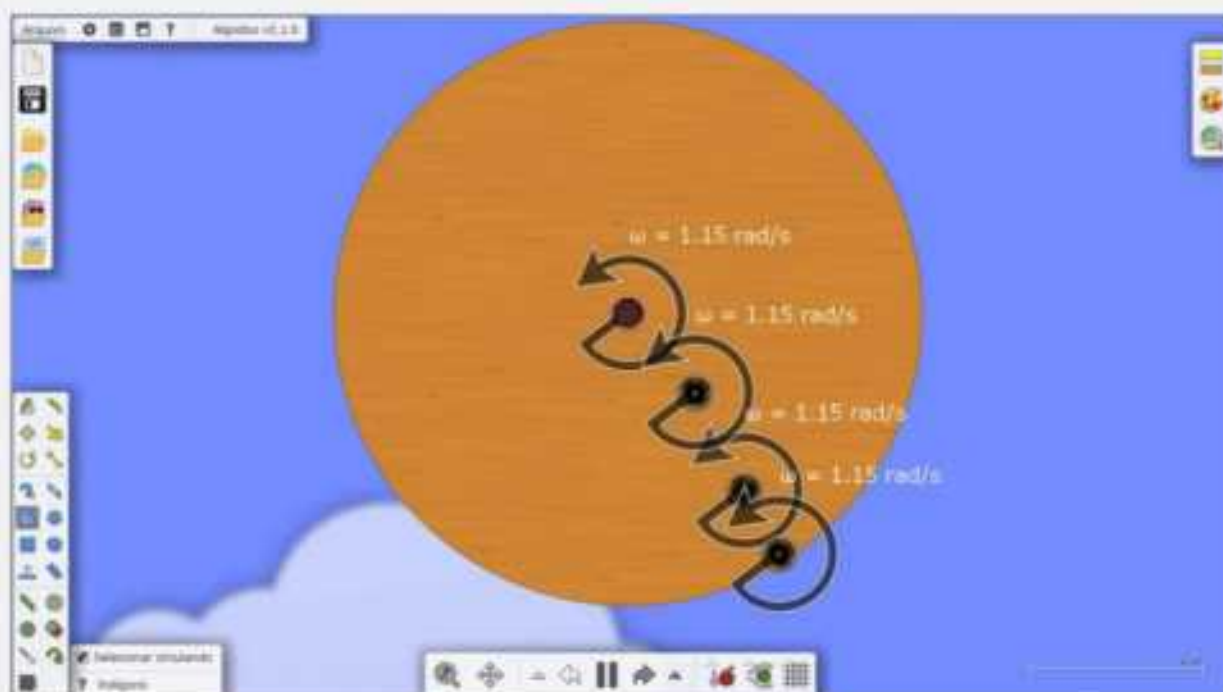


Figura 2.05: Captura de tela do *software* Algodoo: velocidade angular constante no MCU.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: <http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264032>.

Faça o *download* do aplicativo Algodoo gratuitamente em: <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique [aqui](#).

Na simulação da **Figura 2.05**, o corpo rígido está girando com velocidade angular constante $\omega = 1.15 \text{ rad/s}$ no sentido anti-horário e, portanto, o sinal do valor dessa grandeza é positivo.

Até agora, para facilitar nosso estudo, utilizamos discos rígidos com eixos fixos de rotações centrais como exemplo, pois, além da simetria ajudar no entendimento, o Algodoo é um simulador em duas dimensões. No entanto, todos esses conceitos servem para qualquer tipo de corpo rígido.

A **Figura 2.06** a seguir mostra um formato de corpo diferente, além do deslocamento do centro do eixo de rotação, mantendo as características da rotação. Cada ponto de um corpo rígido descreve um movimento circular em torno do eixo fixo de rotação.

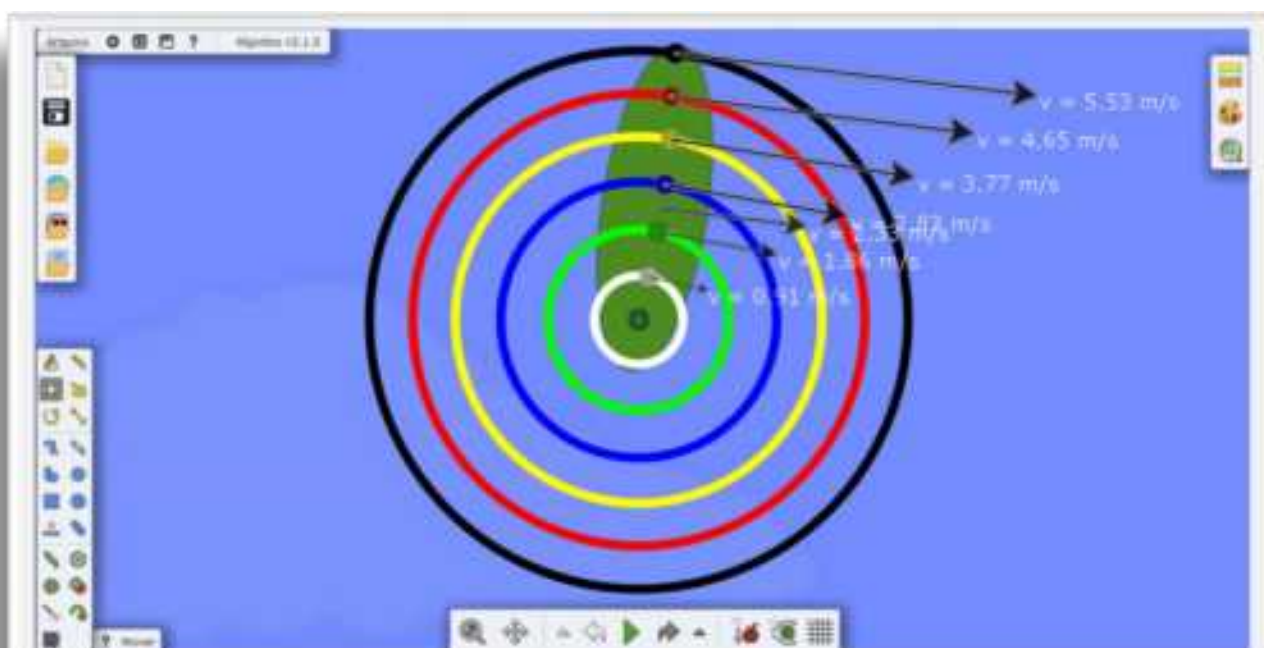


Figura 2.06: Captura de tela do *software Algodoo*: trajetória circular de pontos distintos de um corpo rígido em rotação.

Fonte: os autores.

Simulação disponível em: <http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264038>.

Faça o download do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Clique no link <https://youtu.be/RU5w3V60Ye8> ou escaneie o QR code a seguir para assistir ao vídeo do tutorial da animação.



TAREFA PROPOSTA 2.0

Veja a **Tabela 2.01** a seguir:

Disco	ω (rad/s)	r (m)	$v = \omega r$ (m/s)
A	$\omega_A = 3,14$ rad/s	1,5	
B	$\omega_B = 3,14$ rad/s	1	
C	$\omega_C = 3,14$ rad/s	0,5	
D	$\omega_D = 3,14$ rad/s	0,25	

Tabela 2.01: Tabela para calcular a velocidade escalar linear para diferentes raios da Tarefa Proposta 2.0.

Na **Tabela 2.01**, constam as velocidades angulares e os raios de quatro discos rígidos homogêneos em MCU. Todos eles possuem a mesma velocidade angular. Já as velocidades escalares lineares nas extremidades de cada disco, nesses casos, irão depender, principalmente, dos seus raios.

Utilize os dados apresentados na tabela e realize os cálculos para obter as velocidades escalares lineares dos discos, fazendo uso da equação da última coluna da tabela.

Em seguida, clique **AQUI** para verificar a simulação com os resultados para cada disco.

E aí, acertou!?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2.01 – Um atleta mantém uma velocidade constante de $0,5\pi \text{ m/s}$ enquanto corre em uma pista circular, completando uma volta em 40 segundos. Determine a frequência de rotação do corredor, sua velocidade angular e o raio da trajetória circular descrita pelo atleta.

Solução: Vamos usar a **Equação 2.01** para calcular a frequência:

$$f = \frac{1}{T}$$

$$f = \frac{1}{40}$$

$$f = 0,025 \text{ Hz}$$

Com o valor da frequência, vamos determinar a velocidade angular do atleta, utilizando a **Equação 2.06**:

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = 2\pi \cdot 0,025$$

$$\omega = 0,05\pi \text{ rad/s}$$

Para calcular o raio da trajetória, usaremos a **Equação 2.03** ou a **Equação 2.04**. Vamos utilizar a 2.04:

$$v = \omega r$$

$$r = \frac{v}{\omega}$$

$$r = \frac{0,5\pi}{0,05\pi}$$

$$r = 10 \text{ m}$$

Portanto, a frequência de rotação, a velocidade angular e o raio da trajetória circular do atleta são, respectivamente, iguais a $0,025 \text{ Hz}$, $0,05\pi \text{ rad/s}$ e 10 m .

2.02 – Um veículo está em movimento circular e uniforme com velocidade angular de $0,5 \text{ rad/s}$. Sendo o raio da trajetória circular é igual 10 m , qual o módulo da aceleração desse veículo?

Solução: Apesar de o movimento ser uniforme, existe aceleração centrípeta para o movimento circular. Para calcular a aceleração centrípeta, usaremos a **Equação 2.07**:

$$a_c = \omega^2 r$$

$$a_c = 0,5^2 \cdot 10$$

$$a_c = 0,25 \cdot 10$$

$$a_c = 2,5 \text{ m/s}^2$$

Logo, o módulo da aceleração centrípeta, intensidade da componente radial da aceleração do veículo, é de $2,5 \text{ m/s}^2$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2.01 – Um atleta mantém uma velocidade constante de $0,8\pi \text{ m/s}$ enquanto corre em uma pista circular, completando uma volta em 50 segundos. Determine a frequência de rotação do corredor, sua velocidade angular e o raio da trajetória circular descrita pelo atleta.

2.02 – Uma partícula está em movimento circular e uniforme com velocidade angular de 4 rad/s . Sendo o raio da trajetória dessa partícula é igual a $0,2 \text{ m}$, qual o módulo da sua aceleração?

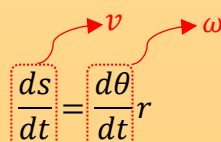
Saiba mais...

Para se demonstrar a equação de se calcular o módulo da **velocidade linear** de um ponto considerado, podemos partir da **Equação 1.01**:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

$$s = \theta r$$

A derivada de s em relação ao tempo é o módulo da velocidade linear, assim como a derivada de θ no tempo é a velocidade angular do ponto em rotação, com r constante:


$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r$$

$$v = \omega r$$

Por vezes, falamos em a como sendo a aceleração linear, mas na verdade estamos nos referindo ao módulo da componente da aceleração linear responsável pela variação do módulo da velocidade que é tangente à trajetória circular em cada ponto, ou seja, a_t é a intensidade dessa

componente tangencial da aceleração linear $\vec{a}$.

Assim, derivando a **Equação 2.04** em relação ao tempo, encontraremos a componente da aceleração responsável por variar o módulo da velocidade linear tangencial, ou seja, o módulo da componente tangencial da aceleração, bem como a aceleração angular:

$$v = \omega r$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r$$

The diagram shows the derivative equation $\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r$. A red arrow points from $\frac{dv}{dt}$ to a_t , and another red arrow points from $\frac{d\omega}{dt}$ to α .

$$a_t = \alpha r$$

REVISÃO

Conexões entre as Variáveis Lineares e Angulares

Movimento Circular e Uniforme de Rotação

Frequência: No MCU, o tempo necessário para um corpo rígido ou uma partícula completar uma volta em torno de um eixo fixo se chama **período**. A frequência indica o período necessário para uma volta completa. Assim, a frequência é expressa por:

$$f = \frac{1}{T} \text{ (Hz)} \quad (2.01)$$

- f – frequência;
- T – período.

Velocidade linear escalar e velocidade angular: como a distância percorrida para uma volta completa em um movimento circular uniforme corresponde ao comprimento de uma circunferência, assim como 360° corresponde a 2π em radianos, podemos expressar a velocidade linear escalar e a velocidade angular de um corpo rígido ou uma partícula através das expressões:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \text{ (m/s)} \quad (2.02)$$

$$v = 2\pi r f \text{ (m/s)} \quad (2.03)$$

$$v = \omega r \text{ (m/s)} \quad (2.04)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ (rad/s)} \quad (2.05)$$

$$\omega = 2\pi f \text{ (rad/s)} \quad (2.06)$$

Aceleração centrípeta: Mesmo no MCU, o vetor velocidade muda com o passar do tempo em direção e sentido, sendo ele sempre tangente à trajetória. A grandeza responsável pela mudança dessas características é a componente radial da aceleração chamada **aceleração centrípeta**, radial ao movimento de rotação, e seu módulo, em função da velocidade angular, pode ser calculado das seguintes formas:

$$a_c = \omega^2 r \text{ (m/s}^2\text{)} \quad (2.07)$$

$$a_c = \omega v \text{ (m/s}^2\text{)} \quad (2.08)$$

- a_c – módulo da aceleração centrípeta;
- ω – velocidade angular;
- r – raio;
- v – velocidade linear escalar.

Movimento Circular Acelerado

Aceleração tangencial: A componente da aceleração responsável pela variação do módulo da velocidade linear é chamada de **aceleração tangencial**, pois possui a mesma direção da velocidade linear, que também é tangencial à trajetória circular e é expressa por:

$$a_t = \alpha r \text{ (m/s}^2\text{)} \quad (2.09)$$

- a_t – módulo da aceleração tangencial;
- α – aceleração angular;
- r – raio.

Aceleração: A aceleração de um corpo ou uma partícula é a soma vetorial das componentes radial (centrípeta) e tangencial:

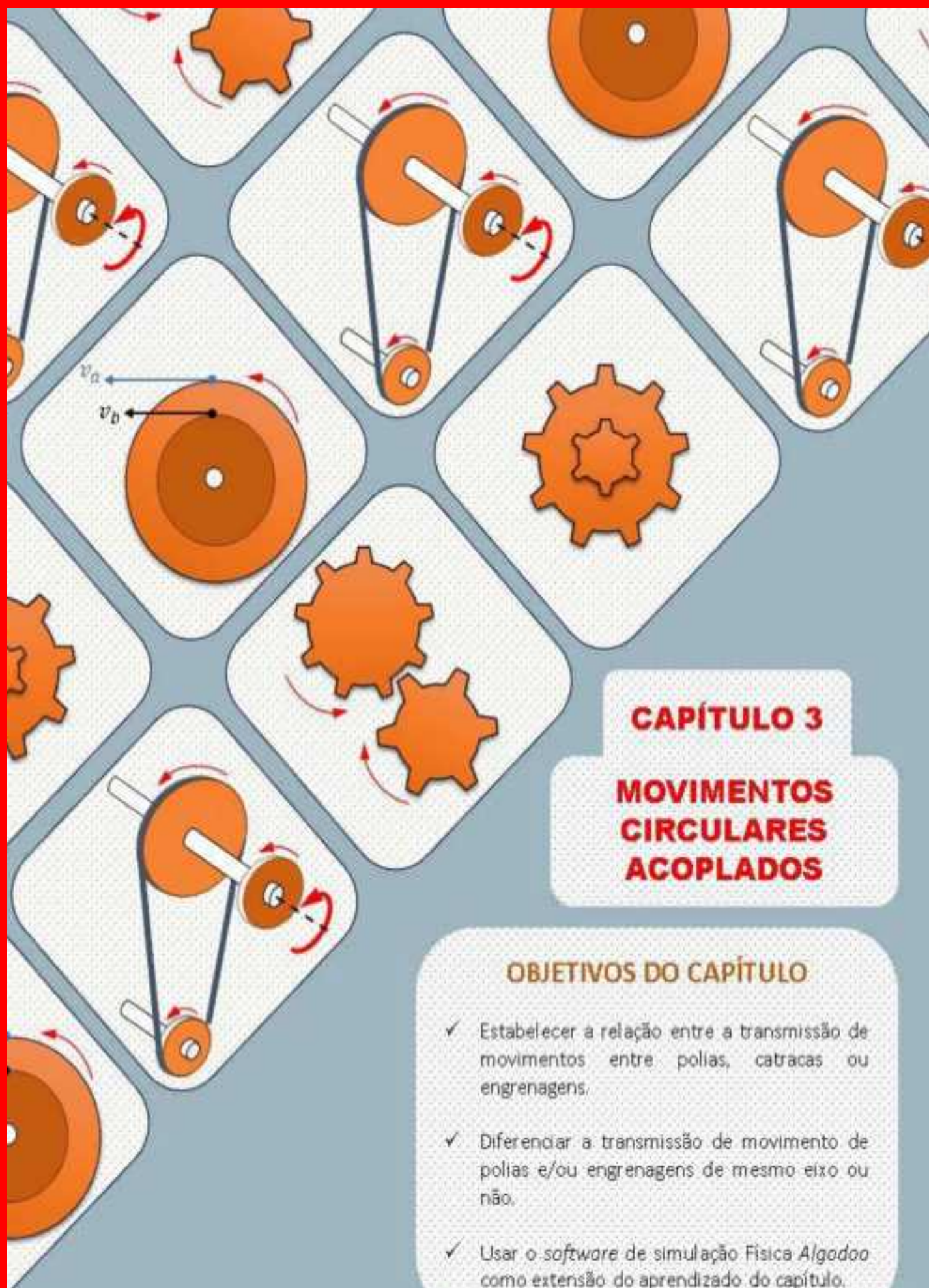
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c \text{ (m/s}^2\text{)} \quad (2.10)$$

- $\vec{a}$ – aceleração;
- $\vec{a}_t$ – aceleração tangencial;
- $\vec{a}_c$ – aceleração centrípeta.

Módulo da aceleração: A aceleração é o vetor resultante da soma das suas duas componentes, a tangencial e a centrípeta. Essas duas componentes são perpendiculares entre si e o **módulo do vetor aceleração** pode ser calculado usando o teorema de Pitágoras:

$$a^2 = a_t^2 + a_c^2 \text{ (m/s}^2\text{)} \quad (2.11)$$

- a – módulo da aceleração;
- a_t – módulo da aceleração tangencial;
- a_c – módulo da aceleração centrípeta.



CAPÍTULO 3

MOVIMENTOS CIRCULARES ACOPLADOS

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Estabelecer a relação entre a transmissão de movimentos entre polias, catracas ou engrenagens.
- ✓ Diferenciar a transmissão de movimento de polias e/ou engrenagens de mesmo eixo ou não.
- ✓ Usar o *software* de simulação Física *Algodoo* como extensão do aprendizado do capítulo.

Em diversas situações, nos deparamos com mecanismos que funcionam em conjunto como partes integrantes de um todo. No contexto dos motores de automóveis, por exemplo, polias e outros componentes rotativos são conectados entre si através de correias, cintas ou mesmo contato direto, utilizando o eixo do motor para criar algum efeito prático. Polias ou engrenagens montadas em eixos distintos transmitem movimento rotativo umas às outras por meio de correias.

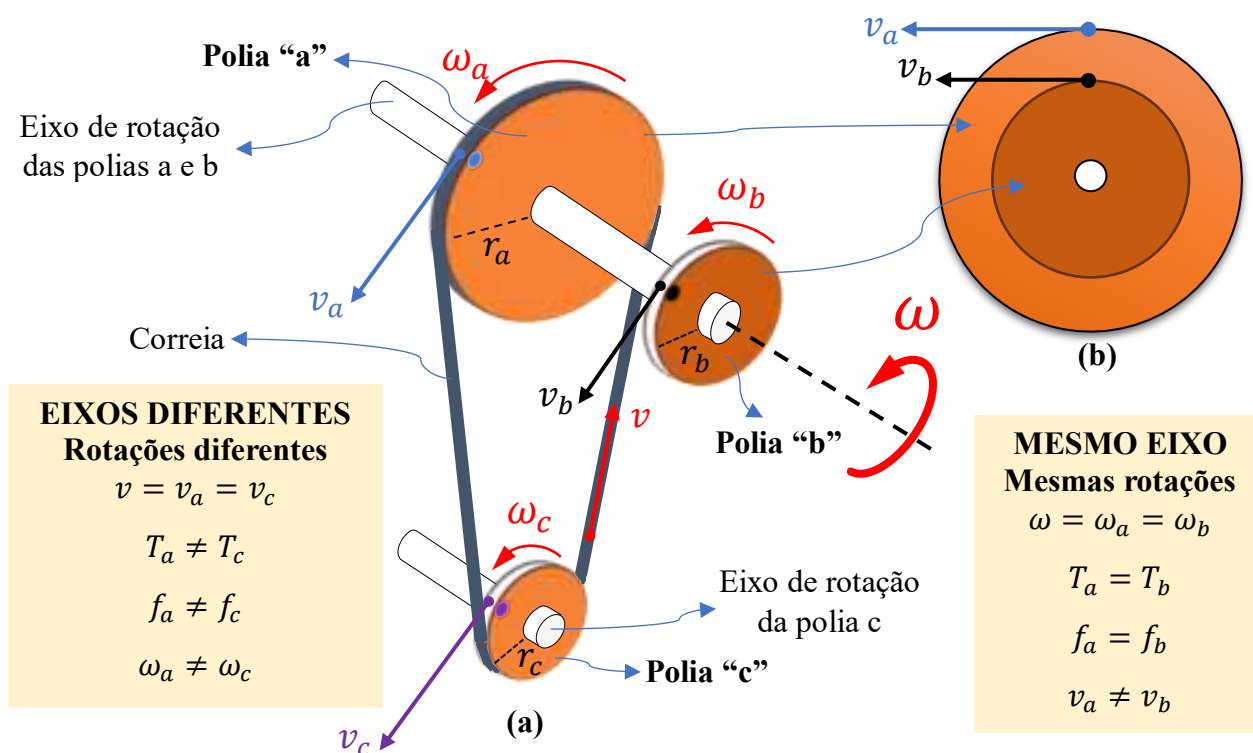


Figura 3.01: Transmissão de rotação entre polias. Em (a) está o sistema completo. Em (b), uma representação das duas polias do mesmo eixo de rotação. Não há escorregamento entre as partes do sistema.

Na **Figura 3.01**, temos um sistema de transmissão de movimentos de rotação entre polias que pertencem ou não ao mesmo eixo, sem escorregamento entre as partes.

As polias “a” e “c” pertencem ao **mesmo eixo**, chamado de **eixo solidário**, e, nesse contexto, elas realizam o **mesmo número de voltas** no mesmo **intervalo de tempo**. Isso significa que suas velocidades angulares são iguais, divergindo em suas velocidades lineares escalares:

$$\omega = \omega_a = \omega_b$$

Como $v = \omega r$, podemos escrever $\omega = \frac{v}{r}$ para pontos nas extremidades de cada uma das polias que pertencem ao mesmo eixo de rotação:

$$\omega_a = \frac{v_a}{r_a} \quad \text{e} \quad \omega_b = \frac{v_b}{r_b}$$

No mesmo eixo, as velocidades angulares das polias são iguais:

$$\omega_a = \omega_b$$

$$\frac{v_a}{r_a} = \frac{v_b}{r_b} \quad (\text{mesmo eixo}) \quad (3.01)$$

v_a – velocidade escalar linear em pontos da extremidade da polia a;

v_b – velocidade escalar linear em pontos da extremidade da polia b;

r_a – raio da polia a;

r_b – raio da polia b.

Como as polias de um mesmo eixo de rotação dão o mesmo número de voltas no mesmo intervalo de tempo, conclui-se que:

$$T_a = T_b \quad \rightarrow \quad f_a = f_b \quad (\text{mesmo eixo})$$

Para **eixos diferentes**, os pontos nas extremidades das polias, as quais estão em contato com a correia, como é o caso das polias “a” e “c” da **Figura 3.01**, possuem a mesma velocidade escalar linear:

$$v = v_a = v_c$$

Sendo $v = \omega r$, temos que:

$$v_a = \omega_a r_a \quad \text{e} \quad v_c = \omega_c r_c$$

Para os eixos distintos, mas acoplados pela mesma correia, v_a e v_c são iguais:

$$v_a = v_c$$

$$\omega_a r_a = \omega_c r_c \quad (\text{eixos diferentes}) \quad (3.02)$$

Com $\omega = 2\pi f$, temos:

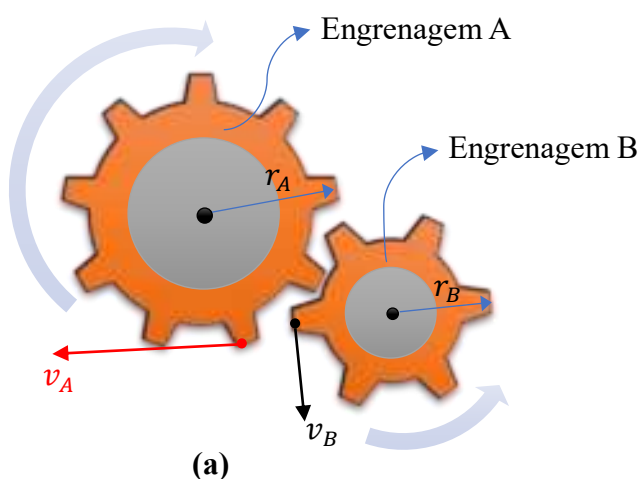
$$2\pi f_a r_a = 2\pi f_c r_c$$

$$f_a r_a = f_c r_c$$

$$\frac{f_a}{f_c} = \frac{r_c}{r_a} \quad (\text{eixos diferentes}) \quad (3.03)$$

Para **engrenagens em contato**, mas com **eixos distintos**, como mostra a **Figura 3.02(a)** a seguir, a transmissão do movimento de rotação possui as mesmas características das polias em eixos diferentes, pois, de fato, elas não pertencem ao mesmo eixo.

Já para engrenagens pertencentes ao **mesmo eixo de rotação**, como na **Figura 3.02(b)**, por estarem ligadas ao mesmo eixo, as características da transmissão do movimento de rotação são as mesmas para as polias em eixos solidários.



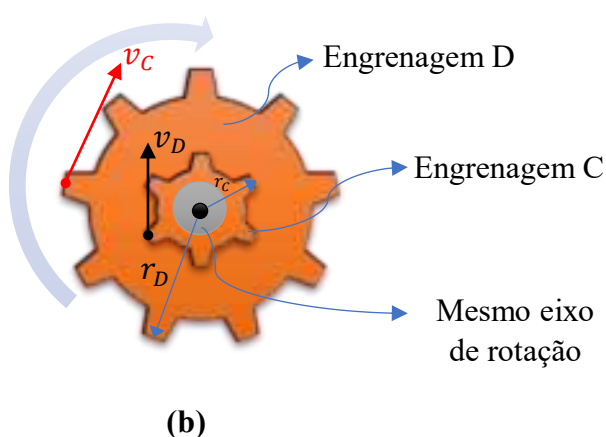
EIXOS DIFERENTES **Rotações diferentes**

$$v_A = v_B$$

$$T_A \neq T_B$$

$$f_A \neq f_B$$

$$\omega_A \neq \omega_B$$



MESMO EIXO **Mesmas rotações**

$$\omega_C = \omega_D$$

$$T_C = T_D$$

$$f_C = f_D$$

$$v_C \neq v_D$$

Figura 3.02: Transmissão de rotação entre engrenagens. Em (a), temos engrenagens em contato e com eixos de rotações diferentes. Em (b), uma representação de duas engrenagens acopladas ao mesmo eixo de rotação. Não há deslizamento entre as polias e os seus eixos.

Para a **Equação 3.02** e a **Equação 3.03**, temos que:

- ω_a – velocidade angular da polia a;
- ω_c – velocidade angular da polia c;
- r_a – raio da polia a;
- r_c – raio da polia c;
- f_a – frequência de rotação da polia a;
- f_c – frequência de rotação da polia c.

USANDO O *ALGODOO* 3.0

A **Figura 3.03** a seguir ilustra um sistema de engrenagens no *software Algodoo*, onde podemos verificar, de maneira intuitiva, as relações de proporcionalidade entre os raios das engrenagens com suas frequências de giro, tanto para engrenagens de mesmo eixo de rotação quanto para eixos distintos.

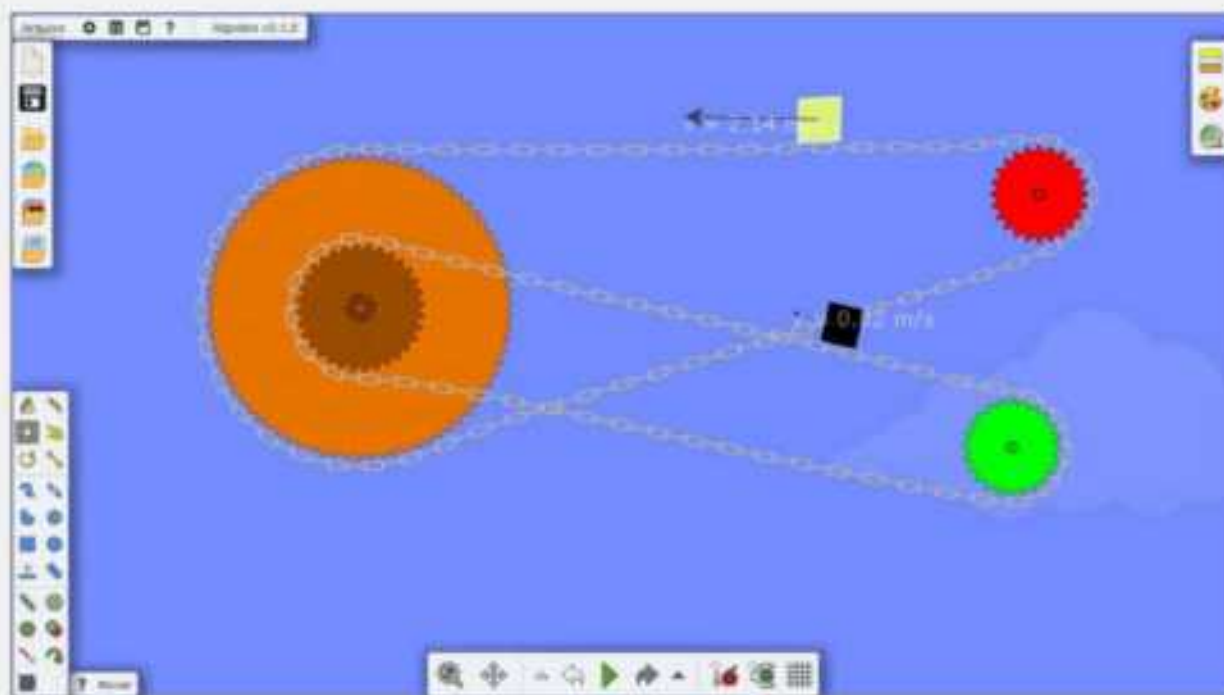


Figura 3.03: Captura de tela do *software Algodoo*: sistema de engrenagens com e sem mesmo eixo de rotação.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: <http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264109>.

Faça o download do aplicativo Algodoo gratuitamente em <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique [aqui](#).

A **Figura 3.04**, a seguir, reforça o fato de que a velocidade angular é inversamente proporcional ao raio da polia ou engrenagem que pertencem a eixos distintos. Na **Figura 3.03**, temos também uma ilustração de que a velocidade linear escalar é diretamente proporcional ao raio para pontos do mesmo eixo de rotação, ou seja, engrenagens maiores possuem, nas suas extremidades, velocidades lineares escalares maiores do que as velocidades nas extremidades das engrenagens menores pertencentes ao mesmo eixo de rotação.

Tanto na **Figura 3.03** quanto na **Figura 3.04** há pequenas oscilações nos valores das velocidades enquanto a simulação está ocorrendo devido aos encaixes das engrenagens e correntes necessitarem de ajustes extremamente precisos para evitar deslizamentos ou corrosões.

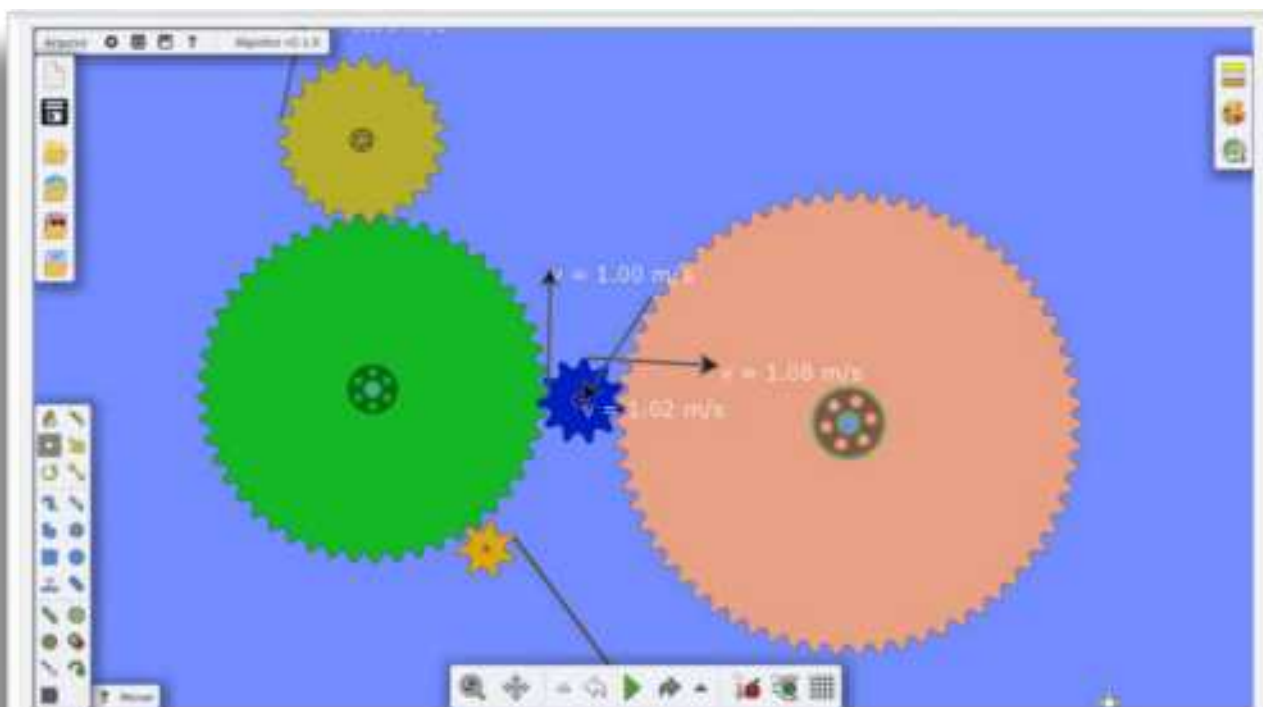


Figura 3.04: Captura de tela do *software Algodoo*: sistema de engrenagens com contato e com diferentes eixos de rotações.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: <http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264032>.

Faça o download do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique [aqui](#).

Clique no link <https://youtu.be/AnWE6YXmk8> ou escaneie o QR code ao lado para assistir ao vídeo do tutorial da animação.



TAREFA PROPOSTA 3.0

Dadas as Tabela 3.01 e Tabela 3.02 a seguir:

Engrenagem	f_A (Hz)	r_A (cm)	$\omega_A = 2\pi r_A$ (rad/s)
A	0,5	40	

Tabela 3.01: Dados para cálculo da velocidade angular da engrenagem A.

Engrenagem	r_B (cm)	$\omega_A r_A = \omega_B r_B$
B	34,3	

Tabela 3.02: Dados para cálculo da velocidade angular da engrenagem B.

Considere que as engrenagens A e B das tabelas acima estão em contato e com eixos de rotações diferentes.

Na **Tabela 3.01**, considere $\pi = 3,14$ e use a equação da última coluna para calcular a velocidade angular da engrenagem A, de acordo com os dados fornecidos nas colunas. Na **Tabela 3.02**, utilize a equação contida na última coluna para encontrar a velocidade angular da engrenagem B, usando os dados das duas colunas.

Não esqueça de que as velocidades angulares de duas engrenagens em contato e com eixos diferentes possuem sentidos de rotações opostos e, portanto, sinais opostos.

Em seguida, clique **AQUI** para verificar a simulação com os resultados para cada engrenagem.

E aí, acertou!?

EXERCÍCIO RESOLVIDO

3.01 – Duas engrenagens A e B estão em contato, mas com eixo de rotações diferentes. A engrenagem A tem raio $0,2\text{ m}$ e frequência de rotação de 8 Hz . Já a engrenagem B possui $0,4\text{ m}$ de raio. Ambas estão fixas nos seus eixos respectivos.

Adote $\pi = 3$ e determine:

- a) a frequência de rotação da engrenagem B;
- b) a velocidade angular de A;
- c) a velocidade angular de B;
- d) A velocidade escalar linear das extremidades das duas engrenagens.

Solução: O exercício trata de um sistema de engrenagens em contatos com eixos distintos. Então, vamos usar as equações para esse tipo de problema.

Letra a: Para calcular a frequência da engrenagem B, vamos usar a **Equação 3.03**:

$$\frac{f_A}{f_B} = \frac{r_B}{r_A}$$

$$f_B r_B = f_A r_A$$

$$f_B = \frac{8 \cdot 0,2}{0,4}$$

$$f_B = \frac{1,6}{0,4}$$

$$f_B = 4 \text{ Hz}$$

Letra b: Para a velocidade angular da engrenagem A, usaremos a **Equação 2.06**:

$$\omega_A = 2\pi f_A$$

$$\omega_A = 2 \cdot 3 \cdot 8$$

$$\omega_A = 48 \text{ rad/s}$$

Letra c: A velocidade angular da engrenagem B também pode ser encontrada usando a **Equação 2.06**:

$$\omega_B = 2\pi f_B$$

$$\omega_B = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$\omega_B = 24 \text{ rad/s}$$

Letra d: Como as engrenagens não possuem o mesmo eixo de rotação, suas extremidades, que estão em contato, possuem a mesma velocidade escalar linear. Assim, vamos usar a **Equação 2.04**:

$$v_A = \omega_A r_A$$

$$v_B = \omega_B r_B$$

$$v_A = 48 \cdot 0,2$$

$$v_B = 24 \cdot 0,4$$

$$v_A = 9,6 \text{ m/s}$$

$$v_B = 9,6 \text{ m/s}$$

Portanto, provamos que as velocidades escalares lineares são as mesmas ($v_A = v_B = 9,6 \text{ m/s}$) para engrenagens em contato, mas com eixos fixos de rotações distintos.

É importante observar que todas as medidas usadas estão no Sistema Internacional – SI.

EXERCÍCIO PROPOSTO

3.01 – Duas engrenagens A e B pertencem ao mesmo eixo fixo de rotação. A engrenagem A tem raio $0,6 \text{ m}$ e frequência de rotação de 3 Hz . Já a engrenagem B possui $0,15 \text{ m}$ de raio e 18 rad/s de velocidade angular.

Adote $\pi = 3$ e determine:

- a frequência de rotação da engrenagem B;
- a velocidade angular de A;
- As velocidades escalares lineares das extremidades das duas engrenagens.

REVISÃO

Movimentos Circulares Acoplados

Polias ou **engrenagens**, em sistemas mecânicos, podem transmitir movimentos uma para outra com a finalidade de ganhar uma certa vantagem mecânica, compartilhando ou não o mesmo eixo de rotação. As grandezas lineares e angulares para esse tipo de sistema se relacionam da seguinte forma:

MESMO EIXO Mesmas rotações

$$\omega_A = \omega_B$$

$$T_A = T_B$$

$$f_A = f_B$$

$$v_A \neq v_B$$

EIXOS DIFERENTES Rotações diferentes

$$v_A = v_B$$

$$T_A \neq T_B$$

$$f_A \neq f_B$$

$$\omega_A \neq \omega_B$$

E essas grandezas, considerando duas polias (ou engrenagens) “a” e “b”, que pertencem ao mesmo eixo de rotação, e uma terceira polia “c” com eixo de rotação diferente, se relacionam da seguinte forma:

$$\frac{v_a}{r_a} = \frac{v_b}{r_b} \quad (\text{mesmo eixo}) \quad (3.01)$$

$$\omega_a r_a = \omega_c r_c \quad (\text{eixos diferentes}) \quad (3.02)$$

$$\frac{f_a}{f_c} = \frac{r_c}{r_a} \quad (\text{eixos diferentes}) \quad (3.03)$$

- v_a – módulo da velocidade linear escalar da extremidade da polia ou engrenagem “a”;
- v_b – módulo da velocidade linear escalar da extremidade da polia ou engrenagem “b”;
- r_a – raio da polia ou engrenagem “a”;
- r_b – raio da polia ou engrenagem “b”;
- r_c – raio da polia ou engrenagem “c”;
- ω_a – velocidade angular da polia ou engrenagem “a”;
- ω_c – velocidade angular da polia ou engrenagem “c”;
- f_a – frequência da polia ou engrenagem “a”;
- f_c – frequência da polia ou engrenagem “c”.


$$K_T = \frac{1}{2} I_T \omega^2$$

$$I = mr^2$$

$$I_P = I_{CM} + Mh^2$$

CAPÍTULO 4

ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Descrever o que é Energia Cinética de Rotação.
- ✓ Conceituar o momento de Inércia de um corpo.
- ✓ Apresentar a definição do Teorema dos Eixos Paralelos.
- ✓ Usar o *software* de simulação Física Algodoo como extensão do aprendizado do capítulo.

A **energia cinética de rotação**, na Física, é um conceito fundamental, que descreve objetos em rotação, sendo uma extensão da energia cinética linear que lida com movimentos de translação.

Esse tipo de energia depende da forma e de como a massa de um corpo é distribuída em um movimento circular. Se considerarmos um corpo com densidade distribuída uniformemente em toda a sua extensão, a sua energia cinética de rotação será influenciada, principalmente, pela distância do ponto em que desejamos calcular essa energia em relação ao eixo de giro. Quanto mais afastado desse eixo, maior será a energia rotacional.

Para calcular esse tipo de energia, não podemos usar, de maneira direta, a equação para cálculo da energia cinética linear para o corpo como um todo, pois cada partícula que o compõe possui uma energia cinética linear correspondente. Então, podemos usar essa equação individualmente para cada partícula e fazer a soma de todas elas para encontrar a energia cinética total do objeto em rotação.

Para apenas uma partícula, temos uma massa pontual m associada e com energia cinética:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Como a velocidade linear da partícula é variável e depende da sua distância para o eixo de rotação, é mais conveniente escrever a energia cinética em termos da velocidade angular por ser constante.

Sendo $v = \omega r$,

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

Acima, o termo mr^2 é o **momento de inércia** (I) de uma partícula que compõe o corpo rígido, onde m é a sua massa, ω é sua velocidade angular e r (raio) é a distância perpendicular da partícula ao eixo de rotação. Logo:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \text{ (joule - J)} \quad (4.01)$$

➤ K – energia cinética de rotação da partícula;

- I – momento de inércia da partícula;
- ω – velocidade angular da partícula.

Generalizando, para calcular a energia cinética de rotação de todo o corpo rígido; precisamos calcular o seu o momento de inércia em relação ao eixo de rotação, já que a velocidade angular de cada partícula que o compõe é constante em qualquer outro ponto.

Assim, podemos escrever:

$$K_T = \frac{1}{2} I_T \omega^2 \text{ (joule - J)} \quad (4.02)$$

- K_T – energia cinética de rotação do corpo rígido;
- I_T – momento de inércia do corpo rígido;
- ω – velocidade angular.

A **Equação 4.02** serve para calcular a energia cinética de um corpo rígido com um número de partículas relativamente pequeno, onde o momento de inercia total do corpo rígido é o resultado da soma de todos os momentos de inércia das partículas que o compõe:

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots + m_n r_n^2$$

A **Figura 4.01** a seguir mostra um mesmo objeto sendo girado de formas distintas. O momento de inércia de um corpo depende da distribuição da massa contida nele em relação ao eixo de rotação. Quanto maior próximo os átomos que compõe o corpo rígido estão do eixo de rotação, maior a facilidade de fazê-lo girar.

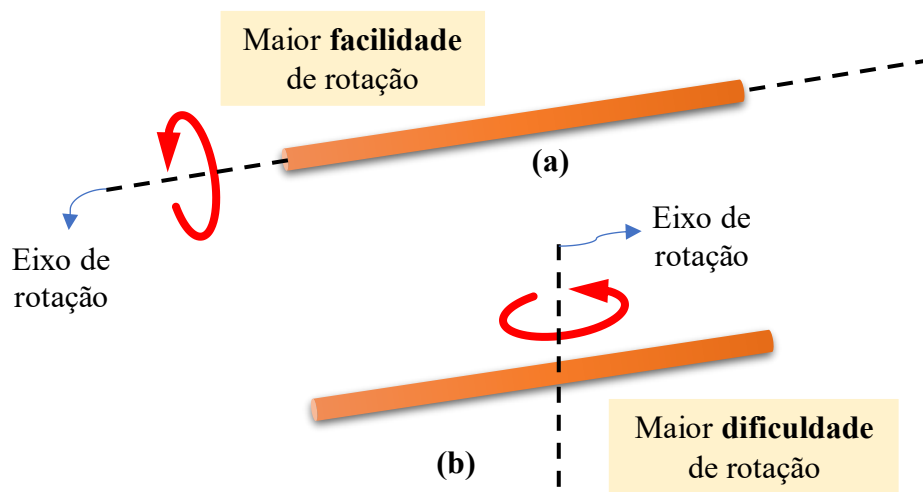


Figura 4.01: Momentos de inércia diferentes para corpos idênticos. Mudou o eixo de rotação, mudou o momento de inércia. Em (a), o eixo de rotação da barra está mais próximo da distribuição de sua massa (menor momento de inércia). Em (b), mais distante (maior momento de inércia).

4.1 - Momento de Inércia - Distribuição Contínua de Massa

Quando um corpo rígido é **contínuo**, como um disco, e possui um grande número de partículas localizadas em proximidade, a aplicação da **Equação 4.02** se torna inviável. A **Tabela 4.01** mostra o momento de inércia de alguns corpos obtidos por meio de cálculos avançados.

Corpo	Momento de Inércia ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)
Esfera maciça em relação a um diâmetro	$I = \frac{2}{5} Mr^2$
Disco em relação ao seu eixo central	$I = \frac{1}{2} Mr^2$
Anel fino em relação ao eixo central	$I = Mr^2$

Tabela 4.01: Momento de inércia de alguns corpos rígidos com densidade uniforme. M representa a massa do objeto e r , o raio.

4.1.1 - Centro de Massa

O ponto de um corpo, ou um sistema de corpos, onde se pode considerar que toda a concentração de massa se concentra sobre ele é chamado de **centro de massa CM**, comumente chamado de centro de gravidade.

Em objetos com densidade uniforme (homogêneos), como uma esfera, por exemplo, esse ponto está no seu centro geométrico, equidistante de todas as suas partes ou superfícies.

O centro geométrico de objetos não homogêneos pode não ser o mesmo do seu **CM** devido às suas características irregulares., dificultando a sua análise para cálculos envolvendo essa distribuição de massa.

O **CM** é um ponto importante para a análise da dinâmica rotacional. A torção de um corpo rígido é (veremos adiante) descrita, principalmente, em relação ao centro de massa.

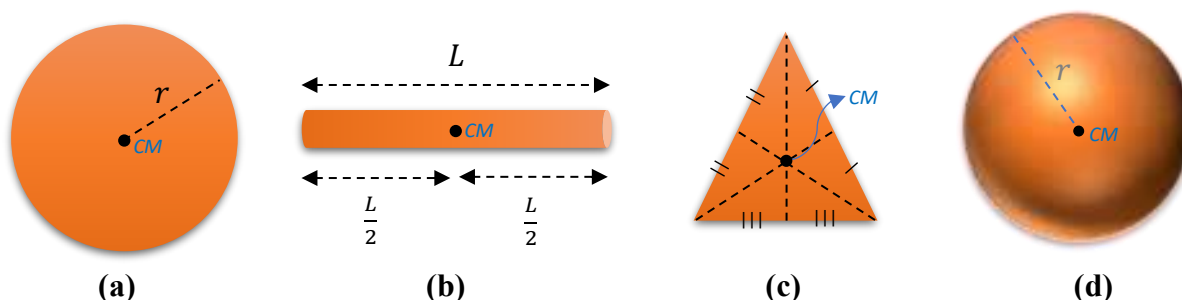


Figura 4.02: Representação de corpos rígidos homogêneos (densidades constantes). Em (a), um disco com centro de massa no centro. Em (b), uma barra com centro de massa no ponto que a divide ao meio. Em (c), uma placa triangular com centro de massa no ponto de encontro das suas três medianas. Em (d), uma esfera maciça com centro de massa em seu centro.

A **Figura 4.02** mostra o centro de massa de alguns corpos rígidos com distribuição de massa constante.

Iremos dar a uma atenção maior em estudar o momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de massa. Quando precisaremos calcular o momento de inércia em outro eixo, vamos calculá-lo em função do momento de inércia que passa pelo *CM*. No segundo caso, utilizamos o teorema dos eixos paralelos.

4.1.2 - Teorema dos Eixos Paralelos

O **teorema dos eixos paralelos** é um modelo matemático que serve para calcular o momento de inércia de um corpo em relação a um ponto localizado em um eixo não passa pelo seu centro de massa, desde que conheçamos o momento de inércia em relação a outro ponto localizado no eixo que passa pelo seu *CM*.

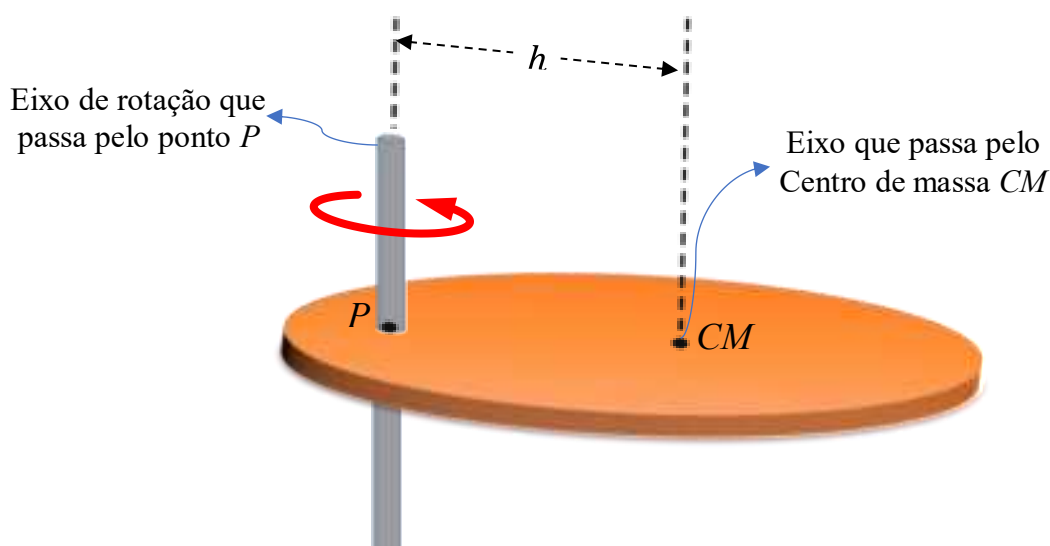


Figura 4.03: Momento de inércia de um *P* de um corpo rígido em um eixo a uma distância *h* a outro eixo paralelo a ele que passa pelo centro de massa desse corpo.

A **Figura 4.03** mostra o eixo de rotação de um corpo que é paralelo ao eixo que passa pelo seu centro de massa, sendo *h* a distância perpendicular entre os eixos.

Nesse caso, o momento de inércia no ponto *P* em função do momento de inércia do centro de massa, ao qual precisaríamos demonstrar por meio de cálculos avançados, é:

$$I_P = I_{CM} + Mh^2 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2\text{)} \quad (4.03)$$

- I_P – momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa pelo ponto *P*;
- I_{CM} – momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa;

- M – massa total do corpo rígido;
- h – distância perpendicular entre os dois eixos (do ponto P e do CM).

IMPORTANTE

É preciso saber qual o valor do momento de inércia de um corpo em relação ao eixo que passa pelo seu **centro de massa** para o uso do **teorema dos eixos paralelos**, objetivando o cálculo do momento de inércia de um corpo rígido em relação a um eixo que passa por um ponto arbitrário desse corpo. Ademais, como o próprio nome do teorema sugere, os dois eixos (o do centro de massa e o que se deseja calcular o momento de inércia) precisam ser **paralelos** entre si e a distância de um em relação ao outro ser perpendicular.

USANDO O *ALGODOO* 4.0

A **Figura 4.04** a seguir ilustra quatro corpos idênticos com momentos de inércia diferentes para seus respectivos eixos de rotação, mostrando que quanto mais próximo esse eixo ficar do seu centro de massa, maior será a facilidade em girar o corpo.

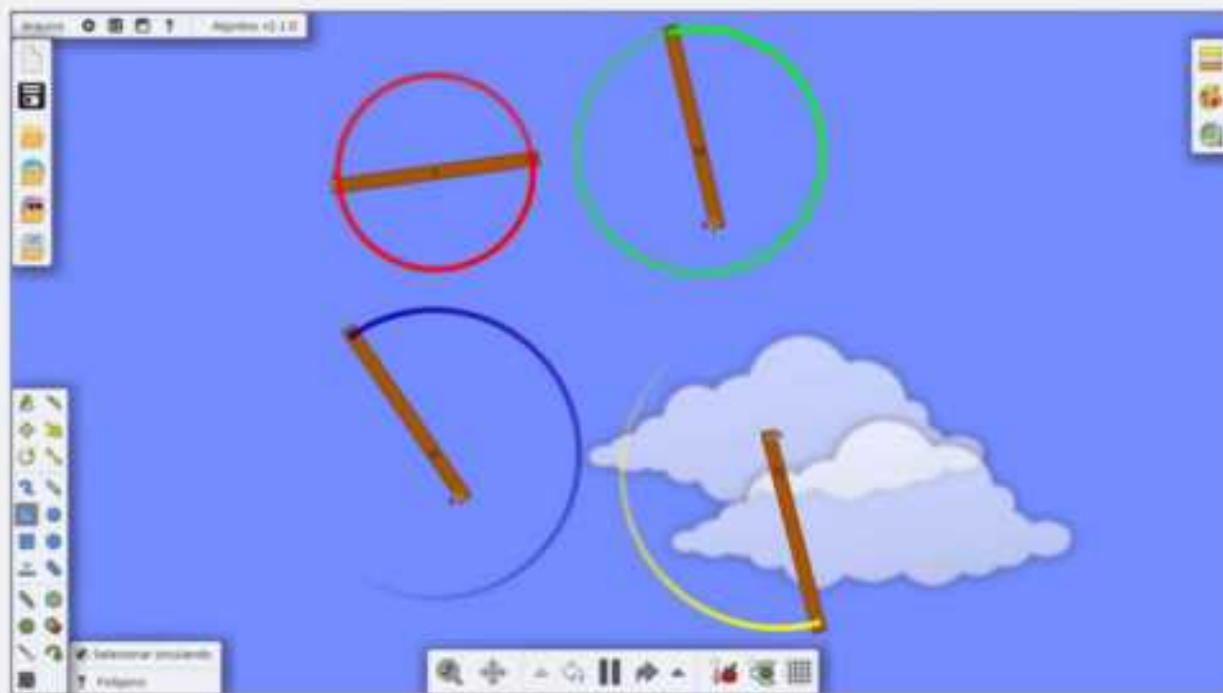


Figura 4.04: Captura de tela do software *Algodoo*: momento de inércia distintos para corpos idênticos.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: <http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264173>.

Faça o download do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do software, clique [aqui](#).

Na **Figura 4.05**, está descrito o gráfico **energia angular x velocidade angular** referente

a uma simulação semelhante à representada na **Figura 4.04**. Nela, está ilustrada uma parábola que descreve a energia de rotação do corpo variando com o quadrado da velocidade angular, pois foi aplicada uma força constante para fazer a barra girar e, assim, configurando um movimento circular uniformemente acelerado.

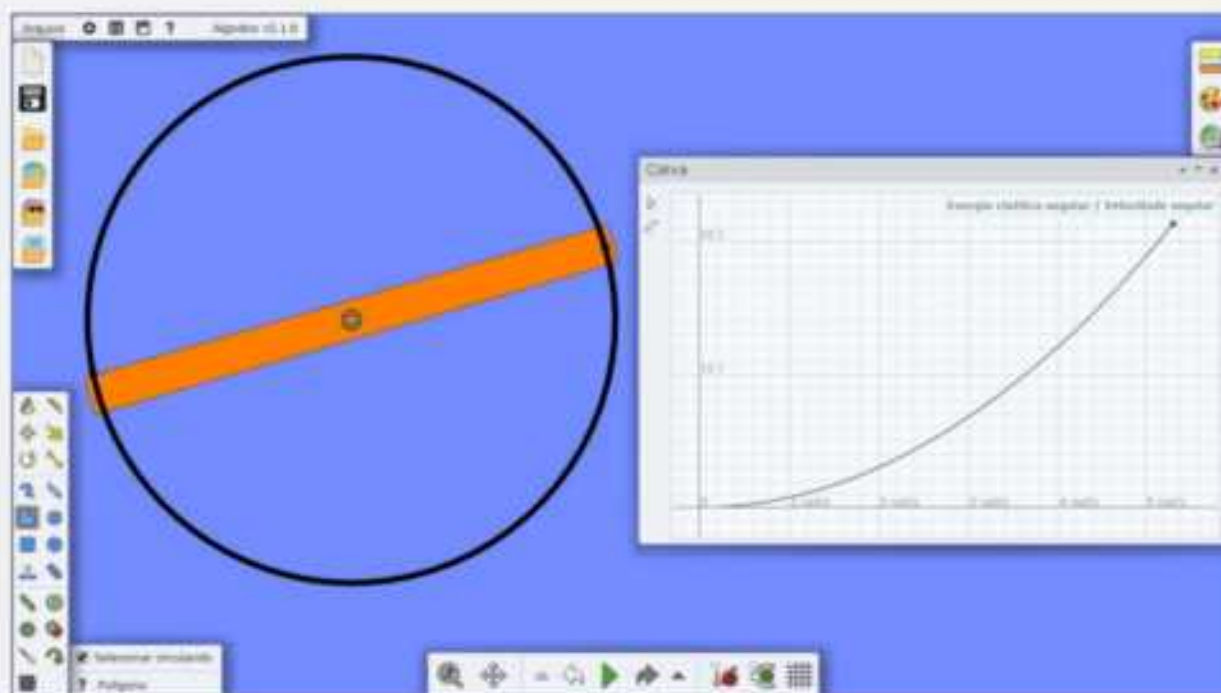


Figura 4.05: Captura de tela do software Algodoo: gráfico energia angular x velocidade angular para um corpo com densidade constante.

Fonte: os autores.

Simulação disponível em: <http://www.algodoo.com/algobx/details.php?id=264175>.

Faça o download do aplicativo Algodoo gratuitamente em <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do software, clique [aqui](#).

Clique no link <https://youtu.be/dqFJggYWbOY> ou escaneie o QR code ao lado para assistir ao vídeo do tutorial da animação.



TAREFA PROPOSTA 4.0

Dada a **Tabela 4.02**:

Disco	f (Hz)	m (kg)	r (m)	$\omega = 2\pi f$ (rad/s)	$I = \frac{mr^2}{2}$ (kgm ²)	$K = \frac{I\omega^2}{2}$ (J)
A	1	16	4			
B	2	8	3			
C	3	4	2			
D	4	2	1			

Tabela 4.02: Tabela para cálculo da velocidade angular, momento de inércia e energia angular cinética dos discos homogêneos da Tarefa Proposta 4.0.

Na **Tabela 4.02**, constam os dados de quatro discos rígidos homogêneos. Considere $\pi = 3,14$ e utilize esses dados nas equações da tabela para calcular as velocidades angulares, os momentos de inércia e as energias cinéticas de rotação, também chamada de energia angular cinética.

Depois dos cálculos, clique **AQUI** para conferir na simulação os resultados.

Veja abaixo na **Figura 4.06** como verificar a massa, a velocidade angular, o momento de inércia e a energia angular cinética do objeto, além de outros dados:

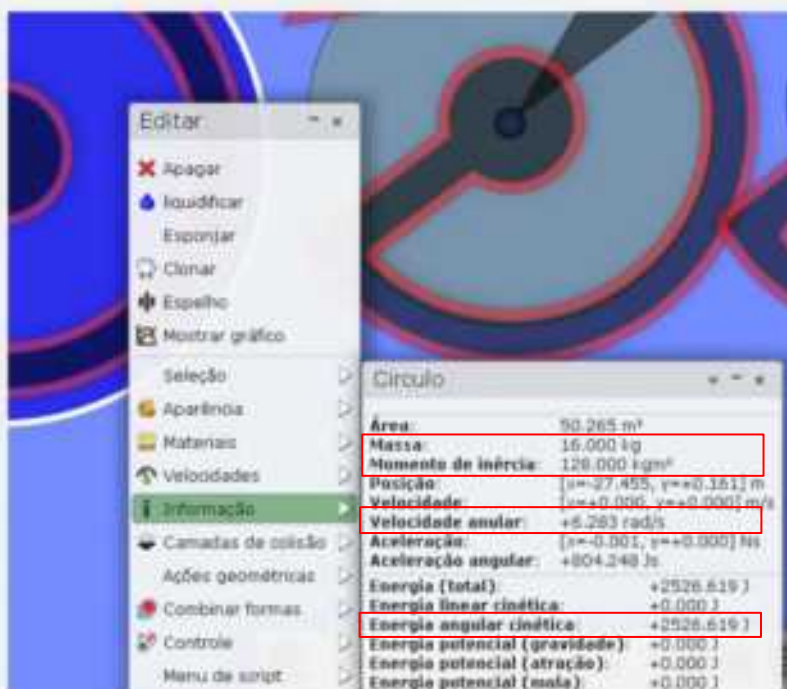


Figura 4.06: Captura de tela do *software Algodoo*: verificação das informações dos resultados da simulação.
Fonte: os autores.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar as animações.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique [aqui](#).

No *Algodoo*, clique com o botão direito do mouse sobre o objeto e vá até a aba “*informações*” para conseguir consultar os dados.

É importante mencionar que os objetos da simulação no *software* foram construídos de acordo com os dados da tabela para, além de buscar uma maior interatividade, comprovar a precisão do aplicativo.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

4.01 – Qual é a energia cinética de rotação de uma partícula, de um corpo rígido, com um momento de inércia de $0,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ em relação ao seu eixo de rotação e uma velocidade angular de 5 rad/s ?

Solução: Para calcular a energia cinética de rotação de uma partícula do corpo rígido, podemos usar a **Equação 4.01**:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Substituindo os valores dados na questão:

$$K = \frac{1}{2} 0,1 \cdot 5^2$$

$$K = 0,05 \cdot 25$$

$$K = 1,25 \text{ J}$$

Portanto, a energia cinética de rotação da partícula é de 1,25 joules.

4.02 – O momento de inércia de um corpo rígido, de massa 2 kg, em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa, é de 0,02 kg.m². Qual o momento de inércia em relação a um ponto *P* desse corpo por onde passa outro eixo de rotação, distante 0,1 metros perpendicularmente do eixo que passa pelo centro de massa?

Solução: Vamos usar o teorema dos eixos paralelos para resolver esse problema, pois se trata de dois eixos em um corpo rígido, sendo um deles passando pelo seu centro de massa. Para isso, vamos usar a **Equação 4.03**:

$$I_P = I_{CM} + Mh^2$$

Substituindo os valores dados na questão:

$$I_P = 0,02 + 2 \cdot 0,1^2$$

$$I_P = 0,02 + 2 \cdot 0,01$$

$$I_P = 0,02 + 0,02$$

$$I_P = 0,04 \text{ kg.m}^2$$

Portanto, o momento de inércia do corpo rígido em relação ao ponto *P* por onde passa o novo eixo é 0,04 kg . m².

4.03 – Um ponto material com uma massa de 0,5 kg está em rotação ao redor de um eixo perpendicular a ele. A distância entre o eixo e o ponto material é de 0,2 metros. Determine o momento de inércia desse ponto material em relação ao eixo de rotação.

Solução: Para calcular o momento de inércia de uma partícula em relação ao seu eixo de rotação, usaremos $I = mr^2$:

$$I = mr^2$$

Substituindo os dados fornecidos no comando da questão:

$$I = 0,5 \cdot 0,2^2$$

$$I = 0,5 \cdot 0,04$$

$$I = 0,02 \text{ kg.m}^2$$

Portanto, o momento de inércia do ponto material em relação ao eixo de rotação é de 0,02 kg.m^2 .

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

4.01 – Qual é a energia cinética de rotação de uma partícula contida em um corpo rígido com um momento de inércia de $0,15 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ em relação ao seu eixo de rotação, quando ela gira com uma velocidade angular de 7 rad/s ?

4.02 – O momento de inércia de um corpo rígido, com uma massa de 3 kg , em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa, é de $0,015 \text{ kg.m}^2$. Qual é o momento de inércia em relação a um ponto Q desse corpo, por onde passa outro eixo de rotação, que está a uma distância de $0,2$ metros perpendicularmente ao eixo que passa pelo seu centro de massa?

4.03 – Um ponto material de massa 1 kg gira em torno de um eixo perpendicular a ele. A distância entre o eixo de rotação e o ponto material é de $0,5$ metros. Determine o momento de inércia deste ponto material em relação ao eixo de rotação.

Saiba mais...

Como já vimos, para se calcular a energia cinética de rotação de apenas uma partícula de um corpo rígido usamos a **Equação 4.01**:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

No entanto, para uma quantidade limitada de partículas, definimos que bastaria somar as energias cinéticas de rotação de todas as partículas que compõe o corpo rígido, conforme a **Equação 4.02**:

$$K = \frac{1}{2} I_T \omega^2$$

O momento de inércia total das partículas também pode ser escrito da seguinte forma:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2, \text{ com } n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Reescrevendo a equação da energia cinética de rotação para o corpo rígido com um número de partículas baixa e limitada:

$$K = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

Para um corpo rígido com um número muito grande de partículas muito próximas umas das outras, nos deparamos com uma **distribuição contínua** de massa. Nesse caso, trocamos o somatório por uma integral:

$$I = \int r^2 dm \quad (\text{corpo contínuo})$$

Sendo dm um elemento infinitesimal de massa que compõe o corpo rígido.

É a partir da equação do momento de inércia para corpos contínuos que se chega as equações para outras formas geométricas, como anéis, discos, esferas, por exemplo.

REVISÃO

Energia Cinética de Rotação

Energia Cinética de Rotação: Uma partícula ou um corpo rígido como um todo, em movimento circular, possui **Energia Cinética de Rotação**, que pode ser calculada por meio das equações:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (J) \quad (4.01)$$

$$K_T = \frac{1}{2} I_T \omega^2 \quad (J) \quad (4.02)$$

- K – energia cinética de rotação da partícula;
- I – momento de inércia da partícula;
- ω – velocidade angular da partícula ou do corpo rígido;
- K_T – energia cinética de rotação total do corpo rígido;
- I_T – momento de inércia total do corpo rígido.

Teorema dos eixos paralelos: O momento de inércia de uma partícula é calculado através do produto da sua massa pelo quadrado do raio da trajetória de rotação ($I = mr^2$). Para um corpo rígido, a equação para se obter seu momento de inércia vai depender do formato do corpo, da distribuição de sua massa, além da distância do ponto onde se deseja calcular o momento de inércia para o eixo de rotação. Esse eixo pode ou não passar pelo centro de massa do corpo. O **teorema dos eixos paralelos** nos permite calcular o momento de inércia de um corpo em relação a qualquer ponto P que pertença a ele, desde que se possua o momento de inércia em relação a outro ponto que esteja em um eixo que passe pelo seu centro de massa por meio da equação:

$$I_P = I_{CM} + Mh^2 \quad (kgm^2) \quad (4.03)$$

- I_P – momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa pelo ponto P ;
- I_{CM} – momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa pelo centro de massa;
- M – Massa total do corpo rígido;
- h – distância perpendicular entre os dois eixos (do ponto P e do CM).

$$\tau = I\alpha$$

$$\tau = r \cdot F_t$$

$$\tau = r \cdot F \sin \phi$$

$$\tau = r_{\perp} \cdot F$$

CAPÍTULO 5

TORQUE

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Definir o que é torque.
- ✓ Estudar apenas a intensidade do torque.
- ✓ Fazer a conexão entre as grandezas lineares e rotacionais para calcular o torque produzido por uma força.
- ✓ Usar o software de simulação Física Algodoo como extensão do aprendizado do capítulo.

O **torque** ($\vec{\tau}$) ou **momento de uma força** é uma grandeza vetorial (iremos tratar essa grandeza como vetor no mais adiante), definido como a tendência de rotação sofrida por um corpo que está sujeito a uma força e descreve a capacidade dessa força aplicada fazer o objeto girar ao redor de um ponto onde existe um eixo de rotação.

Para um bom desempenho no movimento de rotação, é importante considerar que a força aplicada para girar o corpo deve ter uma intensidade adequada para vencer a resistência à rotação do objeto; que quanto maior a **distância** do ponto de rotação (eixo), maior a eficácia do torque; e que o **ângulo** entre a força aplicada e o vetor posição que vai do eixo de rotação ao ponto de aplicação da força influencia no torque produzido.

Assim, o módulo do torque depende da intensidade da força aplicada, da distância do ponto de rotação e do ângulo de aplicação dessa força.

A **Figura 5.01** a seguir mostra um corpo rígido que está livre para girar, ou seja, não há resistência a sua rotação e, conseqüentemente, não há força de resistência ao seu giro em relação a um eixo.

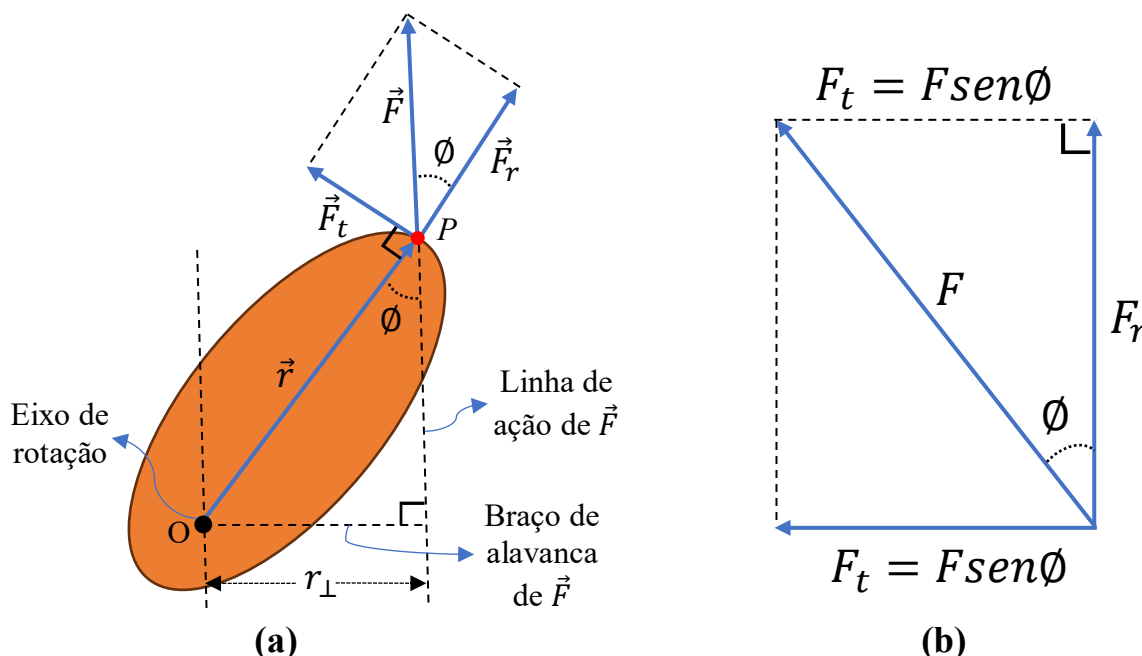


Figura 5.01: Representação de um corpo rígido, fixo no eixo de rotação que passa pelo ponto O, sob a influência de uma força $\vec{F}$ que produz um torque. Em (a), o corpo sob a influência da força que produz o torque. Em (b), o módulo das componentes perpendiculares da força $\vec{F}$.

O torque gerado pela força $\vec{F}$ induz a rotação do corpo rígido representado na **Figura 5.01(a)** em torno do eixo fixo de rotação que passa pelo ponto O, que se encontra perpendicular ao plano da superfície e se estende para fora da dela. Na realidade, apenas a **componente**

tangencial da força provoca a rotação. A componente radial $\vec{F}_r$ não produz rotação, visto que ela tem a mesma direção da reta que passa pelo ponto O.

Para calcular o módulo do torque, ou seja, a capacidade de uma força $\vec{F}$ fazer um corpo girar, precisamos levar em consideração não apenas o módulo da componente tangencial da força, mas também a distância entre o ponto de aplicação dessa força e o ponto que está sobre o eixo de rotação. Quanto maior a força aplicada e quanto maior a distância de aplicação dessa força em relação ao eixo de rotação, maior será o torque, ou seja, o módulo do torque é diretamente proporcional a esses dois fatores:

$$\tau = r \cdot F_t \text{ (N} \cdot \text{m)} \quad (5.01)$$

- τ – módulo do torque produzido pela força $\vec{F}$;
- r – distância entre o eixo de rotação e a força $\vec{F}$ aplicada;
- F_t – módulo componente tangencial da força $\vec{F}$;

Como $\vec{F}_t$, $\vec{F}_r$ e $\vec{F}$ formam um triângulo retângulo, conforme mostrado na **Figura 5.01(b)**, podemos calcular o módulo de $\vec{F}_t$ em função do módulo de $\vec{F}$ usando as relações trigonométricas de um triângulo retângulo:

$$\text{sen}\phi = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \phi}{\text{hipotenusa}}$$

O cateto oposto a ϕ é F_t e a hipotenusa é a diagonal do polígono formado pelo pelas retas simétricas e paralelas às componentes, ou seja, a hipotenusa é F . Assim:

$$\text{sen}\phi = \frac{F_t}{F} \quad \rightarrow \quad F_t = F \text{sen}\phi$$

Substituindo F_t na **Equação 5.01**:

$$\tau = r \cdot F \text{sen}\phi \text{ (N} \cdot \text{m)} \quad (5.02)$$

- τ – módulo do torque produzido pela força $\vec{F}$;
- r – distância entre o eixo de rotação e a força $\vec{F}$ aplicada;
- F – módulo da força $\vec{F}$;
- ϕ – ângulo formado entre o vetor $\vec{r}$ e a força $\vec{F}$.

O ângulo $\emptyset$ formado entre os vetores $\vec{F}$ e $\vec{F}_r$ é o mesmo ângulo formado entre os vetores $\vec{F}$ e $\vec{r}$, pois, além de esses dois ângulos serem opostos pelo mesmo vértice, $\vec{F}_r$ e $\vec{r}$ estão na mesma direção radial.

Outra forma equivalente de se calcular o módulo do torque é usar o módulo da componente de $\vec{r}$ que é perpendicular às retas paralelas que passam pelo eixo de rotação e a que coincide com a direção do vetor $\vec{F}$ (linha de ação de $\vec{F}$). Essa distância é chamada de **braço de alavanca** $r_{\perp}$.

Sendo $r_{\perp} = r \sin \emptyset$:

$$\tau = r \cdot F \sin \emptyset = r \sin \emptyset \cdot F = r_{\perp} F$$

$$\tau = r_{\perp} \cdot F \quad (N \cdot m) \quad (5.03)$$

$$\tau = r \sin \emptyset \cdot F \quad (N \cdot m) \quad (5.04)$$

- τ – módulo do torque produzido pela força $\vec{F}$;
- r – distância entre o eixo de rotação e a força $\vec{F}$ aplicada;
- F – módulo da força $\vec{F}$;
- $r_{\perp}$ – braço de alavanca (módulo da componente de $\vec{r}$ ortogonal à linha de ação de $\vec{F}$);
- $\emptyset$ – ângulo formado o vetor $\vec{r}$ e a força $\vec{F}$.

Usamos, até o momento, apenas uma forma para definir o módulo do torque. Mas se várias forças forem aplicadas ao corpo rígido com o objetivo de fazê-lo girar? Para esse caso, basta calcular a intensidade da força resultante e encontrar o módulo da componente tangencial dessa força.

De acordo com a segunda lei de Newton:

$$(F_t)_R = m a_t$$

em que $(F_t)_R$ é o módulo da componente tangencial da força resultante $\vec{F}_R$, e a_t , o módulo da aceleração tangencial.

Conforme a **Equação 5.01**:

$$\tau_R = r \cdot (F_t)_R = r \cdot m a_t$$

Acontece que $a_t = ar$ (Equação 2.09). Então:

$$\tau_R = r \cdot m \cdot ar = mr^2 \cdot \alpha$$

A expressão mr^2 corresponde ao momento de inércia do corpo rígido ou de uma partícula.

Assim:

$$\tau_R = I\alpha \quad (N \cdot m) \quad (5.05)$$

- τ_R – módulo do torque resultante produzido por $\vec{F}_R$;
- I – momento de Inércia;
- α – aceleração angular produzida pelo torque.

Para uma única força, podemos usar:

$$\tau = I\alpha \quad (N \cdot m) \quad (5.06)$$

O torque devido à componente tangencial de $\vec{F}$ produz uma aceleração angular do corpo rígido em volta do eixo fixo de rotação.

IMPORTANTE

Apesar de termos usado, basicamente, o módulo do torque para análise das situações deste tópico, ele é uma grandeza vetorial. Discutiremos sua natureza vetorial mais adiante.

No caso do não uso do torque como grandeza vetorial, atribuímos um valor positivo ou negativo para ele, dependendo sentido da rotação do corpo ou partícula. No sentido anti-horário, o torque é positivo. No horário, negativo.

USANDO O ALGODOO 5.0

A Figura 5.02 a seguir ilustra seis discos rígidos homogêneos idênticos, ou seja, possuem o mesmo raio, a mesma massa, a mesma distribuição de massa (densidade constante) e, conseqüentemente, possuem centro de massa nos seus centros geométricos. Cada disco possui um eixo fixo de rotação no seu CM e estão submetidos à mesma força tangencial, mas aplicadas a distâncias diferentes do eixo em cada disco.

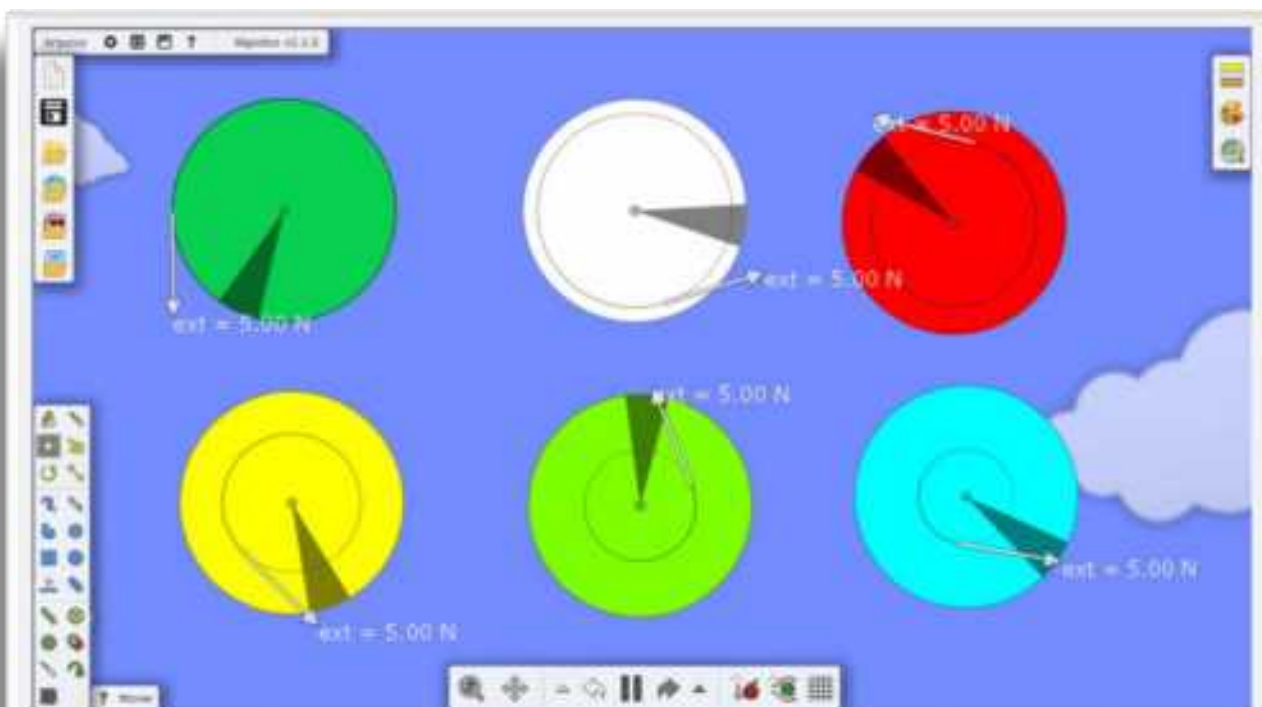


Figura 5.02: Captura de tela do software Algodoos: torques diferentes para forças iguais aplicadas em corpos idênticos.

Fonte: os autores.

Simulação disponível em: <http://www.algodoos.com/algobox/details.php?id=264329>.

Faça o download do aplicativo Algodoos gratuitamente em <http://www.algodoos.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do software, clique [aqui](#).

Clique no link <https://youtu.be/WgqG2CuJgBY> ou escaneie o QR code ao lado para assistir ao vídeo do tutorial da animação.



Ao acessar a simulação, você pode observar que quanto mais distante uma mesma força for aplicada do eixo de rotação, maior será a tendência desse corpo girar, ou seja, maior será o torque.

TAREFA PROPOSTA 5.0

Dada a Tabela 5.01:

Barra	r (m)	F_t (N)	$\tau = r \cdot F_t$ (N . m)
A	4	30	
B	3	32	
C	2	45	
D	1	75	

Tabela 5.01: Dados para cálculo do torque de quatro barras homogêneas da Tarefa Proposta 5.0.

Na Tabela 5.01 constam os dados de quatro barras homogêneas idênticas para se calcular

os torques exercidos sobre elas. As forças aplicadas correspondem apenas as suas componentes tangenciais. Utilize a equação da última coluna da tabela e calcule o torque exercido sobre cada barra e descubra qual delas receberá a maior indução à rotação.

Com posse dos resultados, responda: foi a barra A? Foi a B? Será a C? Ou foi a D?

Clique **AQUI** e descubra se você acertou.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5.01 – Uma força de 50 N é aplicada perpendicularmente à linha que liga o centro de um disco ao ponto onde foi submetida à força, o qual está localizado na extremidade do disco. Essa linha mede 20 cm e o disco está fixo a um eixo de rotação que passa pelo seu centro, fazendo-o girar no sentido horário. De acordo com o enunciado, calcule o torque produzido por essa força.

Solução: A linha que liga o centro do disco ao ponto em que a força foi aplicada corresponde à medida do raio. Além disso, o fato de a força ser perpendicular ao raio representa a componente tangencial da força. Com os dados da questão, podemos usar a **Equação 5.01** para calcular o torque:

Antes de iniciar os cálculos, devemos nos atentar às unidades. Observe que 20 cm é igual a $0,2\text{ m}$.

$$\tau = r \cdot F_t$$

$$\tau = 0,2 \cdot 50$$

$$\tau = 10\text{ Nm}$$

Como o torque faz o corpo girar no sentido horário, o seu valor é negativo:

$$\tau = -10\text{ Nm}$$

Portando, o torque exercido pela força no disco é de -10 Nm .

5.02 – A **Figura 5.03** a seguir mostra um corpo rígido fixo a um eixo de rotação (ponto O) e submetido a uma força $\vec{F}$ de intensidade 40 N no ponto P. O eixo de rotação é perpendicular ao plano do papel e o raio da trajetória circular a que o corpo está submetido mede $1,5\text{ m}$, formando um ângulo de 30° com a força aplicada. Dessa forma, calcule o torque realizado pela força $\vec{F}$.

Dado: $\sin 30^\circ = 0,5$.

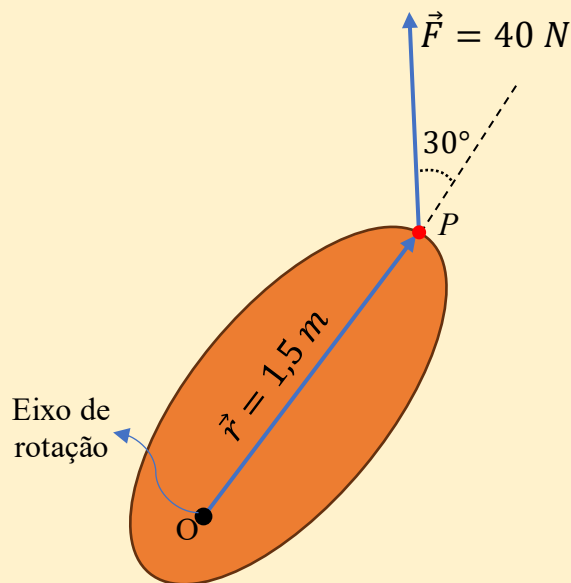


Figura 5.03: Exercício Resolvido 5.02.

Solução: O problema trata de uma força sendo aplicada em um ponto do corpo rígido que está fixo a um eixo de rotação. Com os dados da questão, podemos usar a **Equação 5.02** para calcular o torque:

$$\tau = r \cdot F \sin \theta$$

$$\tau = 1,5 \cdot 40 \cdot 0,5$$

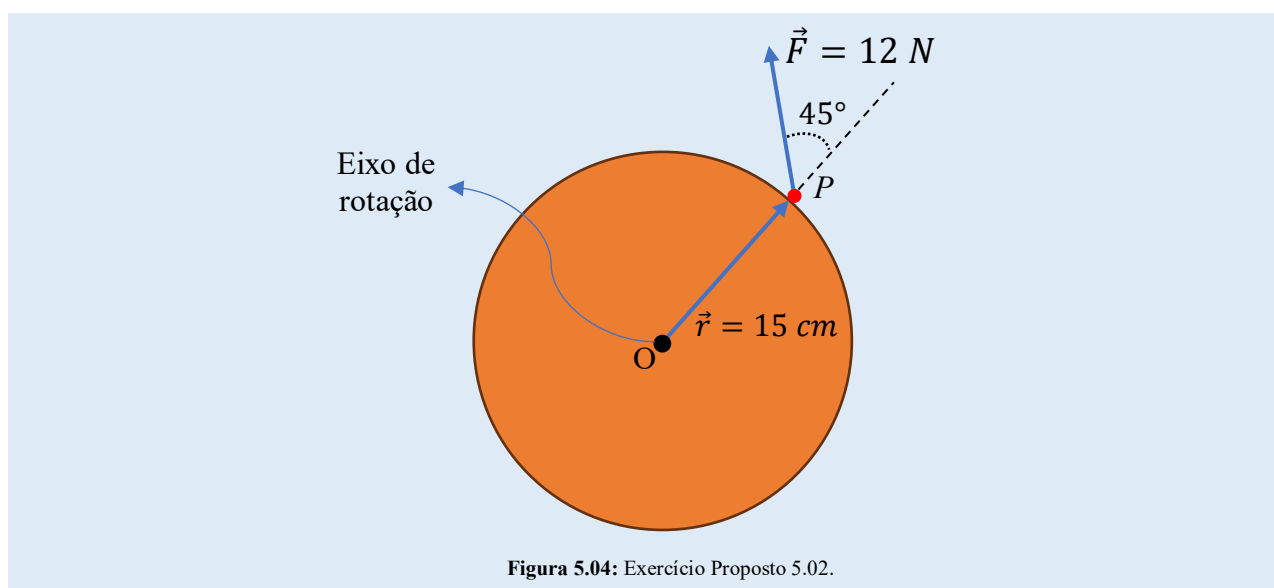
$$\tau = 30 \text{ N.m}$$

Se fizermos a decomposição da força $\vec{F}$ nas suas componentes ortogonais, veremos que a componente tangencial da força, responsável pelo torque, fará o corpo girar no sentido anti-horário e, portanto, o torque é positivo e igual a 30 Nm

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5.01 – Uma força de 130 N é aplicada perpendicularmente à linha que liga o centro de um disco ao ponto onde foi submetida à força, o qual está localizado na extremidade do disco. Essa linha mede 15 cm e o disco está fixo a um eixo de rotação que passa pelo seu centro, fazendo-o girar no sentido anti-horário. De acordo com o enunciado, calcule o torque produzido por essa força.

5.02 – A **Figura 5.04** a seguir ilustra um disco rígido fixo a um eixo de rotação (ponto O) e submetido a uma força $\vec{F}$ de intensidade 12 N no ponto P. O eixo de rotação é perpendicular ao plano do papel e o raio da trajetória circular a que o corpo está submetido mede 15 cm e forma um ângulo de 45° com a força aplicada. Considere $\sin 45^\circ = 0,7$ e calcule o torque realizado pela força $\vec{F}$.



Saiba mais...

O módulo do torque se dá pelo produto da intensidade da força aplicada sobre um ponto do corpo rígido com o módulo do vetor posição que vai do eixo de rotação a esse ponto, além do seno do ângulo formado entre esses dois vetores. Essa equação já foi dada anteriormente, conforme a **Equação 5.02**.

O torque também é um vetor e seu sentido se dá pela regra da mão direita, a qual veremos mais adiante.

REVISÃO

Torque

Torque: A capacidade de uma força $\vec{F}$ de fazer um corpo girar é chamado de **torque**, que, por sua vez, depende da intensidade dessa força, da distância entre ela e o eixo de rotação, além do ângulo formado entre a força e o vetor posição $\vec{r}$ que vai do eixo de rotação ao ponto onde está sendo aplicada a força. Para calcular o módulo do torque, podemos usar as seguintes equações:

$$\tau = r \cdot F_{\perp} \quad (N \cdot m) \quad (5.01)$$

$$\tau = r \cdot F \sin \phi \quad (N \cdot m) \quad (5.02)$$

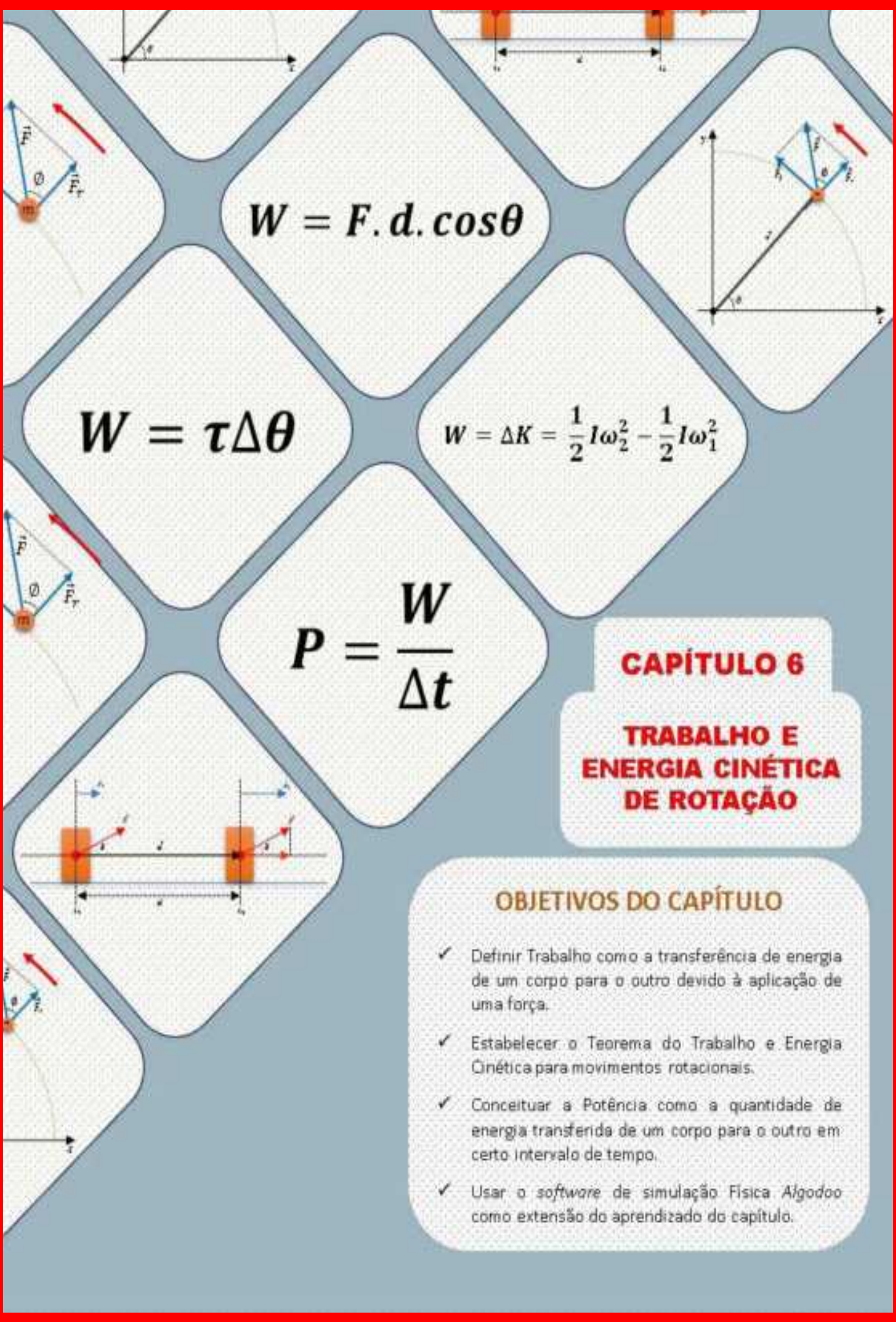
$$\tau = r_{\perp} \cdot F \quad (N \cdot m) \quad (5.03)$$

$$\tau = r \sin \phi \cdot F \quad (N \cdot m) \quad (5.04)$$

$$\tau_R = I \alpha \quad (N \cdot m) \quad (5.05)$$

$$\tau = I \alpha \quad (N \cdot m) \quad (5.06)$$

- τ – módulo do torque produzido pela força $\vec{F}$;
- r – distância entre o eixo de rotação e a força $\vec{F}$ aplicada;
- $F_{\perp}$ – módulo da componente tangencial da força $\vec{F}$;
- F – módulo da força $\vec{F}$;
- ϕ – ângulo formado entre o vetor $\vec{r}$ e a força $\vec{F}$;
- $r_{\perp}$ – braço de alavanca (módulo da componente de $\vec{r}$ que é ortogonal à linha de ação de $\vec{F}$);
- I – momento de inércia;
- α – aceleração angular;
- τ_R – torque resultante (se houver mais de uma força aplicada).


$$W = F \cdot d \cdot \cos\theta$$

$$W = \tau \Delta\theta$$

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

CAPÍTULO 6

TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Definir Trabalho como a transferência de energia de um corpo para o outro devido à aplicação de uma força.
- ✓ Estabelecer o Teorema do Trabalho e Energia Cinética para movimentos rotacionais.
- ✓ Conceituar a Potência como a quantidade de energia transferida de um corpo para o outro em certo intervalo de tempo.
- ✓ Usar o software de simulação Física Algodoo como extensão do aprendizado do capítulo.

Trabalho (W) é a grandeza física escalar responsável por transferir energia de um corpo para o outro devido à atuação de uma força $\vec{F}$. Quando um corpo rígido de massa m é acelerado em consequência dessa força, ela realiza um trabalho sobre ele, ou seja, o trabalho mede quanto de força foi capaz de mudar a posição de um corpo de um ponto para o outro, independentemente da sua trajetória.

Para um movimento linear, como o trabalho depende da força aplicada sobre o corpo rígido e do deslocamento ocasionado por ela, para calcular sua intensidade devemos levar em consideração a intensidade da força aplicada, o módulo do deslocamento sofrido pelo corpo enquanto submetido à força, além do ângulo formado entre a força e o deslocamento.

Vamos supor um corpo rígido de massa m , sob ação de uma força **constante** $\vec{F}$, percorre uma trajetória retilínea, sofrendo um deslocamento $\vec{d}$, formando um ângulo θ ente $\vec{F}$ e $\vec{d}$, conforme a **Figura 6.01** a seguir:

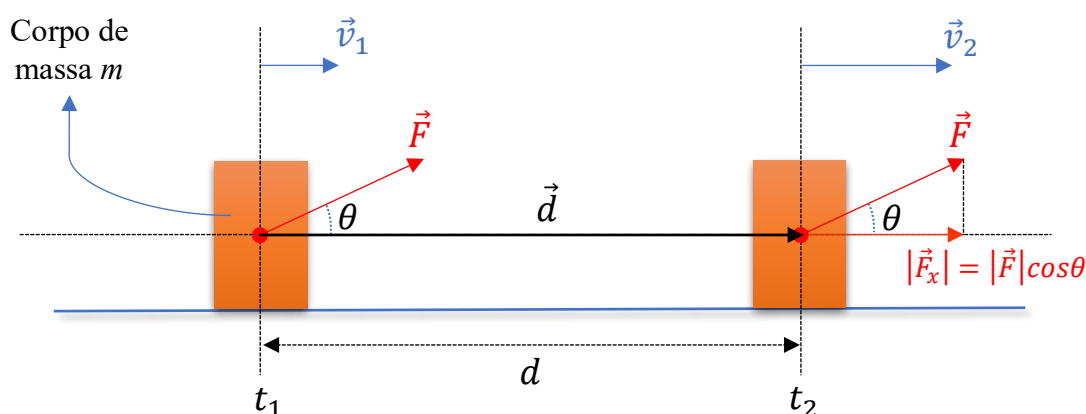


Figura 6.01: Corpo rígido de massa m em trajetória retilínea do instante t_1 a t_2 , submetido a uma força constante $\vec{F}$ e descrevendo um deslocamento $\vec{d}$, formando um ângulo θ com a força aplicada.

Para que o corpo de massa m da **Figura 6.01** sofra esse deslocamento paralelo ao seu plano de apoio, mesmo submetido a uma força constante com direção diferente da sua, é necessário que a força resultante tenha a mesma direção e o sentido do deslocamento, visto que há outras forças atuando sobre o corpo, como a força peso e a força de atrito, por exemplo.

Assim, como já mencionado, o trabalho realizado sobre um corpo depende da intensidade da força aplicada, do módulo do deslocamento sofrido pelo corpo enquanto submetido à força, além do ângulo formado entre a força e o deslocamento e é diretamente proporcional a eles:

$$W = F \cdot d \cdot \cos\theta \quad (J) \quad (6.01)$$

- W – trabalho realizado sobre o corpo;
- F – módulo da força aplicada sobre o corpo;
- d – módulo do deslocamento sofrido pelo corpo;
- θ – ângulo formado entre $\vec{F}$ e $\vec{d}$.

A unidade do trabalho é o joule (J) e, de fato, trabalho é energia. Não qualquer energia, mas a energia útil capaz de realizar um deslocamento em um corpo.

Na **Equação 6.01**, $F\cos\theta$ é o módulo da componente da força aplicada sobre o corpo que tem a mesma direção e sentido do deslocamento.

Supondo que $\vec{F}$ e $\vec{d}$, agora, possuem **mesma direção e sentido**. O ângulo formado sobre eles é $\theta = 0^\circ$, sendo $\cos 0^\circ = 1$. Nesse caso, a **Equação 6.01** se reduz a:

$$W = F \cdot d \quad (J) \quad (\text{mesmo sentido}) \quad (6.02)$$

Vamos considerar que, na **Equação 6.02**, F seja o módulo da única força que atua sobre um corpo e, portanto, ela é a força resultante. Pela segunda lei de Newton, $F_R = ma$. Assim:

$$W = F_R d$$

$$W = m \cdot a \cdot d$$

De acordo com a equação de Torricelli ($v_1^2 = v_2^2 + 2ad$), podemos isolar o termo (ad),

$$v_1^2 = v_2^2 + 2ad$$

$$ad = \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2$$

Fazendo a substituição:

$$W = m \left(\frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2 \right)$$

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Acontece que $\frac{1}{2}mv^2$ corresponde à energia cinética linear. Então, podemos concluir que o trabalho corresponde à variação da energia cinética de um corpo, o qual definimos como **Teorema do Trabalho e Energia Cinética**.

$$W = K_2 - K_1 = \Delta K$$

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \text{ (J) (Teorema do Trabalho e Energia Cinética) (6.03)}$$

- W – trabalho realizado sobre o corpo;
- ΔK – variação da energia cinética;
- m – massa do corpo;
- v_1 – velocidade linear escalar inicial do corpo;
- v_2 – velocidade linear escalar final do corpo.

Analogamente, quando um torque acelera um corpo fazendo-o girar, esse torque realiza um trabalho sobre ele e, conseqüentemente, há uma variação na energia cinética de rotação desse corpo. Vamos considerar também que a única energia que muda nesse corpo é a energia cinética de rotação. Podemos relacionar, agora, a variação da energia cinética ΔK ao trabalho por meio do Teorema do Trabalho e Energia Cinética, sendo que, nesse caso, a energia cinética é a de rotação.

$$W = \Delta K = K_2 - K_1$$

De acordo com a **Equação 4.01**, $K = \frac{1}{2}I\omega^2$. Logo:

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \text{ (J) (Teorema do Trabalho e Energia Cinética) (6.04)}$$

- W – trabalho realizado sobre o corpo;
- ΔK – variação da energia cinética de rotação;
- I – momento de inércia do corpo;
- ω_1 – velocidade angular inicial do corpo;
- ω_2 – velocidade angular final do corpo.

A **Equação 6.04** é para o trabalho realizado sobre uma partícula, mas podemos generalizar para um corpo rígido como um topo, basta usar o momento de inércia do corpo.

Quando uma partícula se desloca ao longo de uma trajetória circular e percorre uma distância que corresponde a um arco de circunferência igual a s , apenas a componente tangencial da força executa um torque sobre ela. Assim, a componente F_t realiza trabalho sobre a partícula.

Então, podemos escrever o trabalho da seguinte maneira:

$$W = F_t \cdot d$$

Para uma pequena distância percorrida, o arco descrito pela trajetória coincide com o seu deslocamento. Logo:

$$W = F_t \cdot s$$

De acordo com a **Equação 1.01**, $\theta = \frac{s}{r}$ e, portanto, $s = r \cdot \theta$. Entende-se que θ é o ângulo formado entre uma posição angular inicial e uma posição angular final. Logo $\Delta\theta = \theta - \theta_0$. Assim:

$$W = F_t \cdot r \cdot \Delta\theta$$

Conforme a **Equação 5.01**, $\tau = F_t \cdot r$. Portanto, podemos escrever o trabalho realizado sobre uma partícula em função de um torque constante aplicado sobre ela do seguinte modo:

$$W = \tau \Delta\theta \text{ (J)} \quad (6.05)$$

- W – trabalho realizado sobre a partícula;
- τ – torque realizado sobre a partícula;
- $\Delta\theta$ – deslocamento angular;

A **Figura 6.02** a seguir mostra um corpo rígido simples, de massa m , livre para girar em torno de um eixo fixo que passa pelo ponto O. O corpo está preso na extremidade de uma barra de massa desprezível e está submetido a uma força $\vec{F}$, que gera um torque sobre ele, fazendo-o girar.

Vamos considerar que apenas a energia cinética de rotação varia. Durante a rotação, essa força realizará um trabalho sobre o corpo rígido, ocasionando em um deslocamento angular.

O torque associado à componente tangencial da força aplicada sobre o corpo de massa m faz o corpo girar, adquirindo energia cinética de rotação e, assim, realizando um trabalho sobre ele.

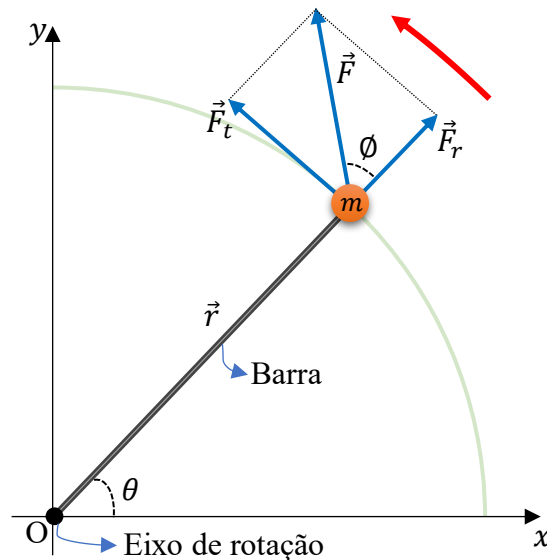


Figura 6.02: Corpo rígido de massa m em rotação preso à extremidade de uma barra fina de comprimento r e de massa desprezível.

Concluimos, assim, que o trabalho realizado sobre um objeto fixo em um eixo de rotação produz um deslocamento angular sobre ele. Confirmamos também, de acordo com a **Tabela 1.02**, que o módulo do deslocamento (d) é o equivalente linear do deslocamento angular $\Delta\theta$.

6.1 - Potência

A **Potência (P)** está relacionada com a quantidade de energia que é recebida ou cedida por um corpo em certo intervalo de tempo, ou seja, ela mensura o quão rápido ocorre essa transferência de energia.

Como o trabalho é energia útil, a taxa de variação da energia com o qual o trabalho é realizado é a caracterização da potência. Podemos calcular a potência mecânica de um corpo em movimento, submetido a uma força constante, da seguinte forma:

$$P = \frac{W}{\Delta t} \quad (W - \text{watt}) \quad (6.06)$$

- P – potência;
- W – trabalho cedido ou recebido;
- Δt – intervalo de tempo.

A potência relacionada à energia mecânica, que, no nosso caso, estamos trabalhando com a energia cinética de rotação; só se aplica a sistemas **dissipativos**, uma vez que não existindo força dissipativa de energia, como o atrito, por exemplo, haverá conservação da energia e, portanto, não existirá trabalho realizado.

Podemos também calcular a potência apresentada por um corpo em movimento de rotação a partir da **Equação 6.06**:

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

$$P = \frac{\tau \Delta \theta}{\Delta t}$$

$$P = \tau \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

Conforme a **Equação 1.03**, para um pequeno intervalo de tempo, podemos considerar a velocidade angular média como a velocidade angular instantânea em determinado instante. Logo, $\frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \omega$ e, portanto:

$$P = \tau \omega \quad (W) \quad (6.07)$$

- P – potência;
- τ – torque;
- ω – velocidade angular.

A potência, de fato, mostra o quão eficiente um objeto é capaz de converter uma energia recebida em outra forma de energia o mais rápido possível. Quanto mais rápido isso ocorrer, maior é a sua potência.



IMPORTANTE

No SI, a unidade da potência é o *watt*, representando pela letra “ W ” em homenagem ao inventor escocês James Watt (1736 a 1819) pelas suas contribuições científicas. Com isso, é importante não confundir a unidade de potência com a grandeza escalar trabalho, também representada pela letra “ W ”, a qual é derivada do inglês (*work*).

USANDO O ALGODOO 6.0

A **Figura 6.03** e a **Figura 6.04** a seguir mostram a mesma simulação no *AlgodoO* de um corpo de massa m preso na extremidade de uma barra fina de 40 *cm* e massa desprezível. Em cada situação, o corpo apresenta uma posição angular diferente, destacando que houve a realização de um trabalho feito por uma força constante.



Figura 6.03: Captura de tela do *software Algodoo*: corpo de massa m preso à extremidade de uma barra fina de massa desprezível, submetido a uma força tangencial de $0,05 \text{ N}$ e com velocidade angular de $3,09 \text{ rad/s}$.
Fonte: os autores.



Figura 6.04: Captura de tela do *software Algodoo*: mesmo corpo de massa m da **Figura 6.03** em uma posição angular diferente, preso à extremidade de uma barra fina de massa desprezível, submetido a uma força tangencial de $0,05 \text{ N}$ e com velocidade angular de $3,14 \text{ rad/s}$.
Fonte: os autores.

Simulações disponíveis em: <http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264384>.

Faça o download do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique [aqui](#).

Clique no link <https://youtu.be/MUGqLNPcdSE> ou escaneie o QR code ao lado para assistir ao vídeo do tutorial da animação.



A partir dessas duas situações descritas, podemos extrair os dados e usar a **Equação 6.04** ou a **Equação 6.05** para calcular o trabalho realizado sobre o corpo, considerando que não exista efeitos gravitacionais agindo sobre ele.

TAREFA PROPOSTA 6.0

Uma barra homogênea e muito fina de 500 g de massa e 3 m de comprimento está fixa em um eixo de rotação em uma de suas extremidades e livre para girar. A barra está submetida a uma força constante que a faz girar, variando a sua energia cinética de rotação. A única energia que muda na barra é a sua energia angular.

A equação para calcular o momento de inércia de uma barra fina homogênea é $I = \frac{mL^2}{12}$, em que m é a massa da barra e L , o seu comprimento (ou a distância do eixo de rotação ao ponto onde se deseja calcular o momento de inércia).

Use a **Tabela 6.01** a seguir e calcule o momento de inércia na extremidade da barra fina homogênea em que não se encontra o eixo de rotação.

m (kg)	L (m)	$I = \frac{mL^2}{12}$ (kgm ²)
0,5	3	

Tabela 6.01: Dados para cálculo do momento de inércia da barra fina homogênea.

Em seguida, com posse do momento de inércia da barra fina, calcule a energia cinética de rotação para dois pontos da trajetória de acordo com a velocidade angular de cada ponto, conforme dados da **Tabela 6.02** (Lembre-se que o momento de inércia é constante para pontos de uma mesma trajetória circular):

Ponto	I (kgm ²)	ω (rad/s)	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$ (J)
A		3,52	
B		4,18	

Tabela 6.02: Dados para cálculo da energia cinética de rotação para dois pontos da trajetória circular da extremidade da barra fina homogênea.

Depois de calcular a energia cinética de rotação de cada ponto, acesse a simulação clicando **AQUI**, dê *play* na simulação e pause exatamente quando a velocidade angular corresponder ao valor no ponto A, ou seja, 3.52 rad/s . Se passou do valor, aperte no seu teclado **ctrl+z** para voltar a simulação e repetir o processo até conseguir parar no valor pretendido. Parado no valor exato, clique com o botão direito sobre a barra e acesse às informações para verificar se você acertou os cálculos. Repita o mesmo processo para ter o resultado da energia cinética de rotação no ponto B.

Coloque os valores das energias cinéticas na **Tabela 6.02** e use a **Tabela 6.03** para calcular o trabalho realizado sobre a barra através do Teorema do Trabalho e Energia Cinética:

$K_A \text{ (J)}$	$K_B \text{ (J)}$	$W = K_B - K_A \text{ (J)}$

Tabela 6.03: Dados para cálculo do trabalho realizado sobre a barra fina homogênea.

A **Figura 6.05** a seguir mostra, mais uma vez, como verificar o guia **informações** para verificação dos dados:

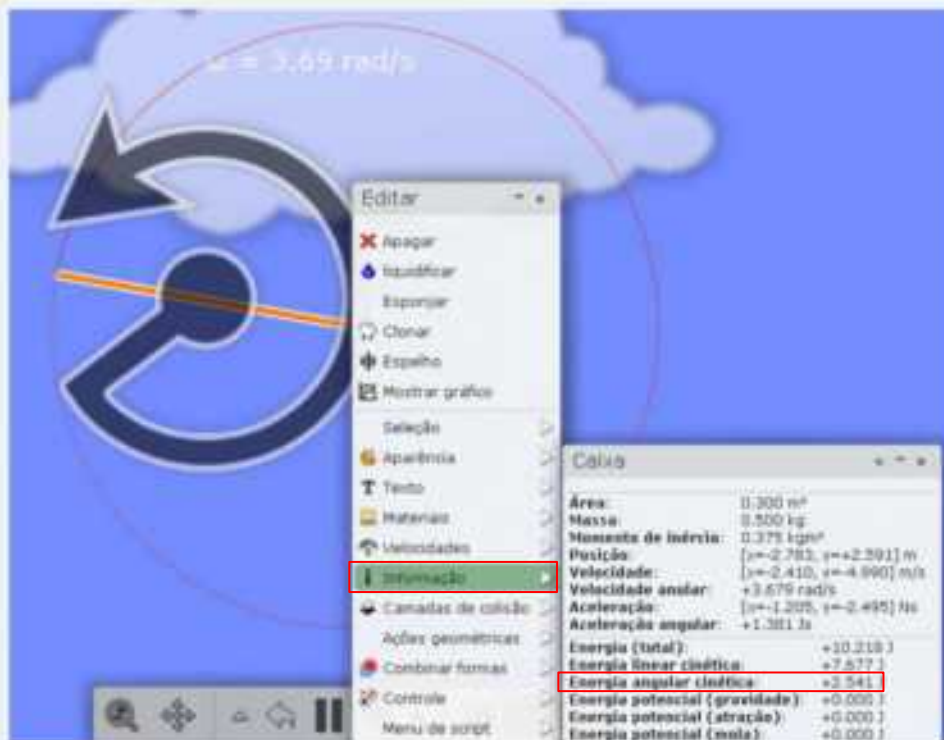


Figura 6.05: Captura de tela do software Algodoo: como obter acesso aos dados físicos de um objeto em simulação. Fonte: os autores.

Faça o download do aplicativo Algodoo gratuitamente em: <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do software, clique [aqui](#).

E aí, conseguiu fazer o passo a passo do experimento e acertar os resultados?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

6.01 – Uma partícula de massa 5 g está em movimento circular distante 20 cm do seu eixo fixo de rotação. Em certo instante, a partícula se encontra em um ponto A com velocidade angular de 4 rad/s e, depois de um certo tempo, ela estará em um ponto B com velocidade angular de 7 rad/s. Considere que a força aplicada sobre a partícula seja constante, como também a única energia que varia no corpo seja a energia cinética de rotação e calcule o trabalho realizado para a partícula ir de A até B.

Solução: A questão nos fornece a velocidade angular da partícula em cada ponto, além da sua massa associada à sua distância do eixo de rotação. Podemos calcular o trabalho realizado sobre a partícula usando a **Equação 6.04** (Teorema do Trabalho e Energia Cinética):

$$W = \Delta K$$

$$W = K_B - K_A$$

$$W = \frac{1}{2} I \omega_B^2 - \frac{1}{2} I \omega_A^2$$

O momento de inércia de uma partícula igual a mr^2 :

$$W = \frac{1}{2} mr^2 \omega_B^2 - \frac{1}{2} mr^2 \omega_A^2$$

Sendo $m = 5 \text{ g} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ e $r = 20 \text{ cm} = 2 \cdot 10^{-1} \text{ m}$:

$$W = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot (2 \cdot 10^{-1})^2 \cdot 7^2 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot (2 \cdot 10^{-1})^2 \cdot 4^2$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 49 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 16$$

$$W = 490 \cdot 10^{-5} - 160 \cdot 10^{-5}$$

$$W = 330 \cdot 10^{-5}$$

$$W = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Portanto, considerando que a única energia que muda seja a energia cinética de rotação, o trabalho realizado sobre a partícula para ela ir do ponto A até o ponto B foi de $3,3 \cdot 10^{-3} \text{ J}$.

6.02 – A **Figura 6.06** ilustra uma partícula de massa m , presa em uma barra fina de massa desprezível, distante 40 cm do seu eixo fixo de rotação. Em certo instante, a partícula encontra-se sobre o eixo positivo de x e uma força de 30 N , com inclinação de 30° sobre o eixo em que ela se encontra, começa a agir sobre ela, fazendo-a girar no sentido anti-horário. Considere que a força aplicada sobre a partícula seja constante, como também a única energia que varia no corpo seja a energia cinética de rotação, calcule o trabalho realizado para a partícula sofrer um deslocamento angular de 45° , conforme ilustra a figura a seguir.

Dado: $\sin 30^\circ = 0,5$

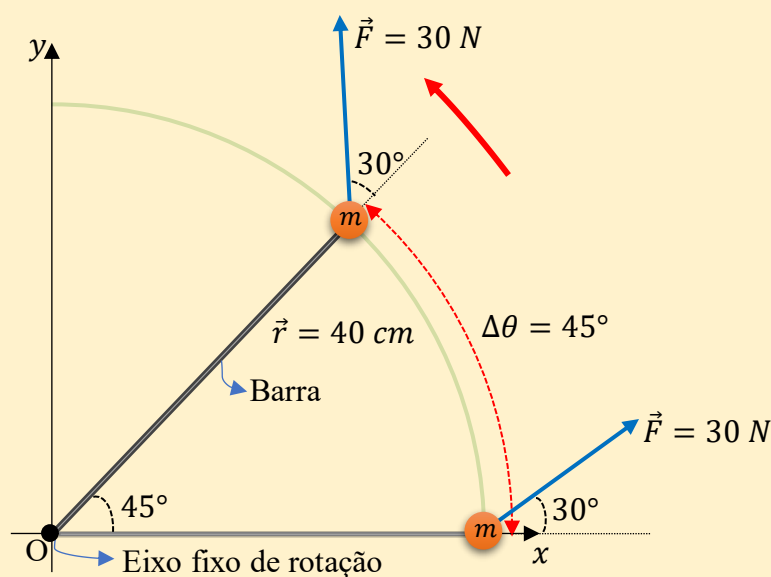


Figura 6.06: Exercício Resolvido 6.02 - Corpo rígido em rotação preso na extremidade de uma barra fina de massa desprezível.

Solução: Como a questão nos fornece o raio da trajetória circular, a força aplicada e o ângulo entre o vetor $\vec{r}$ e $\vec{F}$, além do deslocamento angular sofrido pela partícula, podemos calcular o trabalho sofrido por ela usando a **Equação 6.05**:

$$W = \tau \Delta\theta$$

Como $\tau = r \cdot F \sin\theta$ e 45° corresponde a $0,785$ em radianos:

$$W = r \cdot F \sin 30^\circ \cdot \Delta\theta$$

Sendo $r = 40\text{ cm} = 4 \cdot 10^{-1}\text{ m}$ e $\sin 30^\circ = 0,5$:

$$W = 4 \cdot 10^{-1} \cdot 30 \cdot 0,5 \cdot 0,785$$

$$W = 47,1 \cdot 10^{-1}$$

$$W = 4,71\text{ J}$$

Portanto, considerando que a única energia que muda seja a energia cinética de rotação, o trabalho realizado fazer um deslocamento angular de 45° é de $4,71 \text{ J}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

6.01 – Uma partícula de massa 8 g está em movimento de rotação distante 25 cm do seu eixo fixo de giro. Numa posição angular A, a partícula se encontra com velocidade angular de 2 rad/s e, depois de um certo tempo, ela estará em uma posição angular B com velocidade angular de 9 rad/s . Considere que a força aplicada sobre a partícula seja constante, como também a única energia que varia no corpo seja a energia cinética de rotação e calcule o trabalho realizado para a partícula fazer esse deslocamento.

6.02 – A seguir, a **Figura 6.07** representa uma partícula de massa m , presa em uma barra fina de massa desprezível, distante 30 cm do seu eixo fixo de rotação. Em certo instante, a partícula encontra-se sobre o eixo positivo de x e uma força constante de 50 N , com inclinação de 45° sobre o eixo em que ela se encontra, começa a agir sobre ela, fazendo-a girar no sentido anti-horário. Considere que a única energia que varia no corpo seja a energia cinética de rotação e calcule o trabalho realizado para a partícula sofrer um deslocamento angular de 50° , conforme ilustra a figura a seguir. (Dado: $\sin 45^\circ = 0,71$) e que 50° corresponda a $0,87$ radianos.

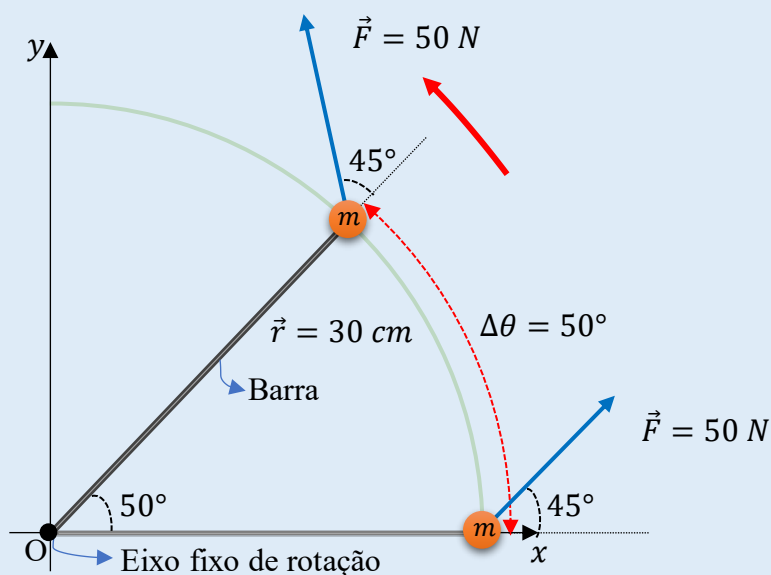


Figura 6.07: Exercício Proposto 6.02 - Corpo rígido em rotação preso na extremidade de uma barra fina de massa desprezível.

Saiba mais...

Para um eixo restrito a uma direção, como o eixo x , por exemplo, podemos calcular o trabalho, para força variável ou não, utilizando a seguinte equação:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

A taxa com a qual o trabalho é realizado é a potência:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Se a força que realiza o trabalho for constante e tenha a mesma direção do deslocamento, o trabalho se reduz a:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

$$W = F \int_{x_1}^{x_2} dx$$

$$W = Fd$$

Para a potência com força constante:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$P = \frac{d}{dt} Fd$$

$$P = F \frac{d}{dt} d$$

A derivada do deslocamento em relação ao tempo é a velocidade:

$$P = Fv$$

Quando uma partícula se desloca de uma distância infinitesimal ds ao longo de uma trajetória circular, apenas a componente tangencial da força é que realiza o torque sobre ela. Assim, o trabalho infinitesimal dW poderá ser escrito da seguinte maneira:

$$dW = F_t \cdot ds$$

Sendo ds o deslocamento infinitesimal devido a um trabalho infinitesimal associado.

Para um deslocamento ds , temos um deslocamento $d\theta$ e, conforme a **Equação 1.01**, $ds = r d\theta$. Logo:

$$dW = F_t \cdot r d\theta$$

Sendo $\tau = F_t \cdot r$:

$$dW = \tau d\theta$$

Integrando dos dois lados:

$$\int dW = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta$$

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta$$

Essa equação é válida para qualquer corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo.

Para um torque gerado por uma força constante:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta$$

$$W = \tau \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta$$

$$W = \tau \cdot \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$W = \tau \cdot (\theta_2 - \theta_1)$$

$$W = \tau \Delta\theta$$

Como a potência é a derivada do trabalho em relação ao tempo, para um torque constante:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$P = \tau \frac{d\theta}{dt}$$


Sendo $\frac{d\theta}{dt} = \omega$:

$$P = \tau \omega$$

Essa é a potência mecânica associada ao movimento de rotação.

REVISÃO

Trabalho e Energia Cinética de Rotação

Trabalho: O Trabalho mecânico é a energia útil capaz de mudar a posição de um corpo de um ponto para o outro, independentemente da sua trajetória, ou seja, ele mede o quanto de força foi capaz de realizar esse deslocamento. Para calcular o trabalho, usaremos a equação:

$$W = F \cdot d \cdot \cos\theta \quad (J) \quad (6.01)$$

- W – trabalho realizado sobre o corpo;
- F – módulo da força aplicada sobre o corpo;
- d – módulo do deslocamento sofrido pelo corpo;
- θ – ângulo formado entre $\vec{F}$ e $\vec{d}$.

Quando $\vec{F}$ e $\vec{d}$ possuírem o mesmo sentido:

$$W = F \cdot d \quad (J) \quad (6.02)$$

Teorema do Trabalho e Energia Cinética: O trabalho também pode ser calculado pelo Teorema do Trabalho e Energia Cinética por meio das equações:

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (J) \quad (\text{Teorema do Trabalho e Energia Cinética}) \quad (6.03)$$

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \quad (J) \quad (\text{Teorema do Trabalho e Energia Cinética}) \quad (6.04)$$

- W – trabalho realizado sobre o corpo;
- ΔK – variação da energia cinética de rotação;
- m – massa do corpo;
- v_1 – velocidade linear escalar inicial do corpo;
- v_2 – velocidade linear escalar final do corpo;
- I – momento de inércia;
- ω_1 – velocidade angular inicial do corpo;
- ω_2 – velocidade angular final do corpo.

Trabalho e Torque: Também podemos escrever o **trabalho** em função do **torque** e do **deslocamento angular**:

$$W = \tau \Delta\theta \text{ (J)} \quad (6.05)$$

- W – trabalho realizado sobre o corpo;
- τ – módulo do torque produzido pela força $\vec{F}$;
- $\Delta\theta$ – deslocamento angular.

Potência: A **potência** mecânica está relacionada com a quantidade de trabalho realizado pelo corpo em certo intervalo de tempo. Para uma força constante, a potência pode ser calculada por meio das equações:

$$P = \frac{W}{\Delta t} \text{ (W - watt)} \quad (6.06)$$

$$P = \tau \omega \text{ (W - watt)} \quad (6.07)$$

- P – trabalho realizado sobre o corpo;
- W – trabalho realizado sobre o corpo;
- Δt – intervalo de tempo;
- τ – módulo do torque produzido por uma força constante $\vec{F}$;
- ω – velocidade angular.

IMPORTANTE: A grandeza trabalho é representada pela letra “ W ” do inglês “*work*”. Já a unidade de potência, no SI, a letra “ W ” significa “*watt*” em homenagem ao inventor escocês James Watt (1736 a 1819), devido as suas contribuições científicas.



CAPÍTULO 7

ROLAMENTO

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Definir o que é um movimento de rolagem.
- ✓ Mostrar que o movimento de rolamento é uma combinação dos movimentos de rotação pura e translação pura.
- ✓ Destacar o cálculo do movimento de rolamento como um movimento de rotação pura.
- ✓ Usar o *software* de simulação Física Algodoo como extensão do aprendizado do capítulo.

7.1 - O que é Rolamento?

Nos capítulos anteriores, observamos a importância, na Física, do estudo das rotações. Em relação às aplicações desse estudo, a mais importante é, provavelmente, o estudo do **rolamento** de corpos rígidos, que possuem características de movimento idênticas aos das rodas. Talvez, a roda seja uma das principais invenções de toda a história. Com ela, foi possível tornar o transporte muito mais rápido, contribuindo para a evolução de cidades e da tecnologia humana ao longo dos tempos. É fácil perceber que, hoje em dia, é impossível de imaginar um mundo sem o uso delas. Basta observar bicicletas, motocicletas, carros, caminhões, ônibus e muitos outros veículos sobre rodas em nossa volta.

Apesar de o transporte sobre rodas ser bastante antigo, muito de novo pode ser criado usando essa engenharia, como o *Segway*, por exemplo, que consiste em um veículo elétrico semelhante a um patinete. Nele, é possível uma pessoa se movimentar linearmente e girar rapidamente em torno do seu próprio eixo ao mesmo tempo. O uso do rolamento vem sendo praticado pelo homem ao longo dos séculos e, certamente, muitas invenções ainda surgirão usando esse princípio. Assim, quando um corpo está, ao mesmo tempo, descrevendo os movimentos de **translação** e **rotação**, ele está descrevendo um movimento de **rolamento**.

A **Figura 7.01** a seguir ilustra uma esfera homogênea descrevendo um movimento de rolagem sobre um plano inclinado. Observe que a esfera possui um movimento de giro enquanto descreve um movimento linear.

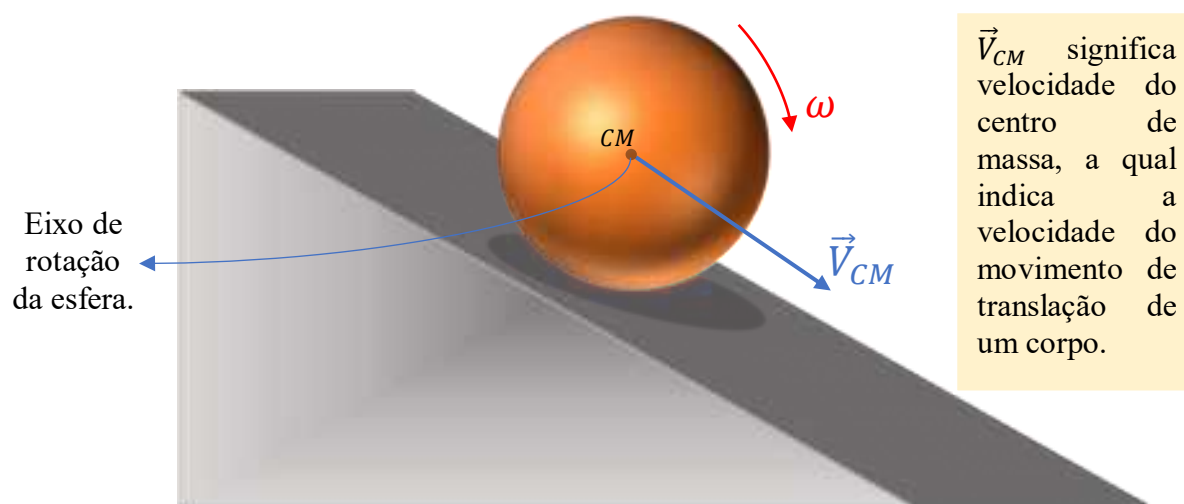


Figura 7.01: Esfera homogênea de massa m em movimento de rolamento sobre um plano inclinado.

7.2 – Rolamento: uma combinação de Rotação e Translação

Como vimos, rolamento é a combinação do movimento linear de um corpo, chamado de **translação**, com o de movimento de giro em torno de um eixo fixo, chamado de **rotação**. Em outras palavras, rolamento é uma associação dos movimentos simultâneos de rotação com o movimento de rotação de um corpo, como um pneu de uma bicicleta em movimento retilíneo, por exemplo.

Neste capítulo, vamos considerar apenas corpos que **rolam suavemente** em uma superfície, ou seja, objetos que descrevem movimento de rolagem sem escorregar (deslizar) ou quicar nela. Esse movimento é chamado de **rolamento suave**.

Nesse tipo de rolamento, apesar de o centro dos objetos se moverem em linha reta paralela à superfície, um outro ponto do corpo diferente desse centro não realiza o mesmo movimento. Todavia, vamos estudar a combinação desses movimentos tratando o movimento linear de translação do centro de massa e rotação do resto do corpo em torno desse centro de massa.

A **Figura 7.02** ilustra as linhas que descrevem as trajetórias de dois pontos distintos de um objeto em rolamento.

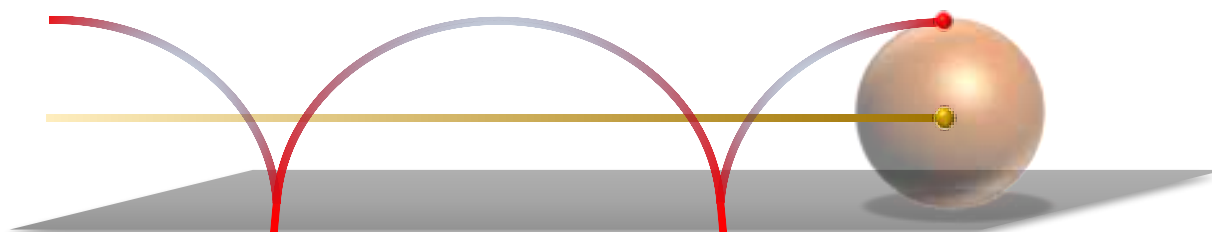


Figura 7.02: Esfera maciça homogênea rolando da esquerda para direita em um movimento combinado de rotação e translação sem deslizamento.

Observe que na **Figura 7.02**, o ponto de cor “amarelado”, que se encontra no centro da esfera, realiza um movimento de translação, enquanto o ponto de cor vermelha, posicionado na extremidade superior da esfera, realiza uma trajetória extremamente distinta. Como o movimento descrito pela esfera não sofreu deslizamento, se trata de um rolamento suave, o que pode não ser tão simples de ser analisado.

Para entender melhor o movimento de rolamento, observe a seguir a **Figura 7.03** e perceba que um ponto O , contido no centro de massa da roda, se move com velocidade constante $\vec{V}_{CM}$. Por outro lado, um ponto P , que está sempre em contato com o solo, também se move com a velocidade $\vec{V}_{CM}$, uma vez que esses dois pontos caminham juntos no mesmo sentido no movimento de translação.

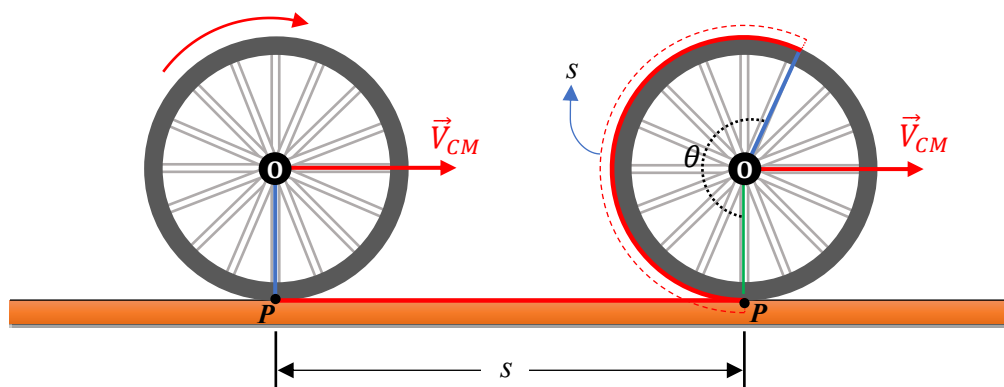


Figura 7.03: Roda descrevendo um movimento de rolamento com velocidade do centro de massa $\vec{V}_{CM}$.

Na **Figura 7.03**, o movimento da roda pode ser visto de várias perspectivas, dependendo do referencial adotado. Vamos considerar uma pessoa parada na calçada, olhando um ciclista passar como um dos referenciais, e o próprio ciclista como o outro referencial. Durante um intervalo de tempo Δt , o observador da calçada enxerga os pontos O e P se deslocarem em linha reta a uma distância s . Já o ciclista observa apenas a roda girar, descrevendo um ângulo θ com o ponto P que está tocando o solo, descrevendo, no mesmo intervalo de tempo Δt , um arco de circunferência com a mesma medida s observada pela pessoa na calçada.

Como já vimos anteriormente, um arco de circunferência pode ser relacionado com o ângulo de rotação e o raio da trajetória circular (**Equação 1.01**), que, nesse caso, é o raio R da roda da bicicleta:

$$s = \theta R \text{ (m)} \quad (7.01)$$

- s – arco de circunferência da trajetória;
- θ – ângulo de giro da roda;
- R – raio da roda.

Como as distâncias descritas pelos movimentos de rotação e translação são as mesmas (s), podemos relacionar a velocidade linear escalar do centro de massa “ V_{CM} ” de uma roda homogênea com a velocidade linear escalar da extremidade dessa mesma roda para movimentos constantes. De acordo com a **Equação 3.03**, $v = \omega R$. Logo:

$$V_{CM} = \omega R \text{ (m/s)} \quad (7.02)$$

- V_{CM} – velocidade do centro de massa da roda;
- ω – velocidade angular da roda;
- R – raio da roda.

A **Figura 7.04** a seguir mostra que o movimento de rolamento é, de fato, a combinação dos movimentos individuais dos dois tipos de movimentos que vimos até então: o movimento de **translação puro** e o movimento de **rotação puro**. Na rotação pura, todos os pontos da roda se movem com a mesma velocidade angular e todos os pontos da sua borda se movem à mesma velocidade linear escalar. Na translação pura, todos os pontos da roda se movem com a mesma velocidade linear escalar, que é a mesma velocidade do seu centro de massa.

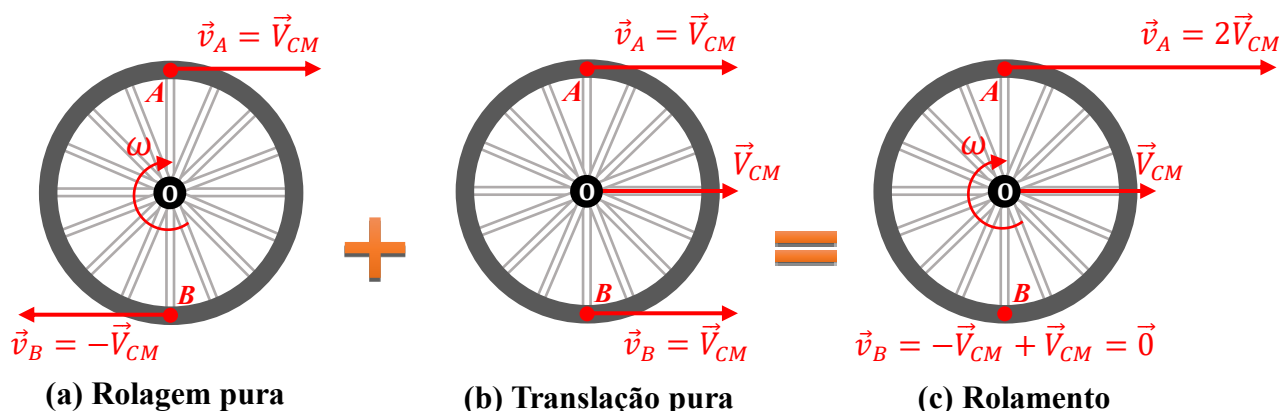


Figura 7.04: Movimento de rolagem de uma roda como a combinação dos movimentos de rotação e translação puros. Em (a), a roda gira apenas em torno do seu eixo. Em (b), a roda não gira e faz apenas o movimento de translação. Em (c), a combinação entre (a) e (b), ou seja, a roda gira em torno do próprio eixo enquanto se move linearmente em um movimento de translação.

Podemos observar as características de um movimento apenas de giro da roda (rotação pura) na **Figura 7.04(a)**. Nela, é como se o eixo estivesse estacionário e todos os pontos da roda possuem a mesma velocidade angular, enquanto a velocidade linear, em pontos dessa roda, depende da distância desse eixo de rotação. Para pontos que descrevem a mesma trajetória circular, o módulo da velocidade linear permanece constante com o passar do tempo, mas sua direção e sentido muda a cada instante.

Na **Figura 7.04(b)**, a roda não gira, faz apenas um movimento linear (translação pura) para direita. Nela, observamos que todos os pontos da roda possuem a mesma velocidade linear, que é a velocidade do centro de massa $\vec{V}_{CM}$.

Já na representação da **Figura 7.04(c)**, é ilustrada a combinação entre os movimentos em (a) e (b). Como resultado, temos que a roda descreve um movimento linear para direita enquanto gira em torno do seu centro de massa no sentido horário. Esse é o movimento de rolamento, que, como já conceituamos várias vezes, consiste na junção dos movimentos de rotação e translação.

Observe que nas três representações da **Figura 7.04**, existem três pontos posicionados no mesmo lugar a serem considerados: o ponto A, o qual faz parte da extremidade superior da roda; o ponto B, que se localiza na extremidade inferior; e o ponto O, que está no centro da roda e, portanto, no seu centro de massa, pois estamos considerando uma roda homogênea. Como

resultado algébrico dessa combinação, as velocidades do ponto A dos movimentos de rotação pura e translação pura possuem mesmo módulo direção e sentido, tendo como resultante no movimento de rolagem $\vec{v}_A = 2\vec{V}_{CM}$. No ponto B, as velocidades possuem mesmo módulo, mas sentidos opostos; o que resulta em uma velocidade nula $\vec{v}_B = \vec{0}$ no movimento de rolamento. Como no centro da roda (ponto O) a velocidade linear é nula na rotação pura, a velocidade de rolamento, nesse ponto, é apenas $\vec{V}_{CM}$.

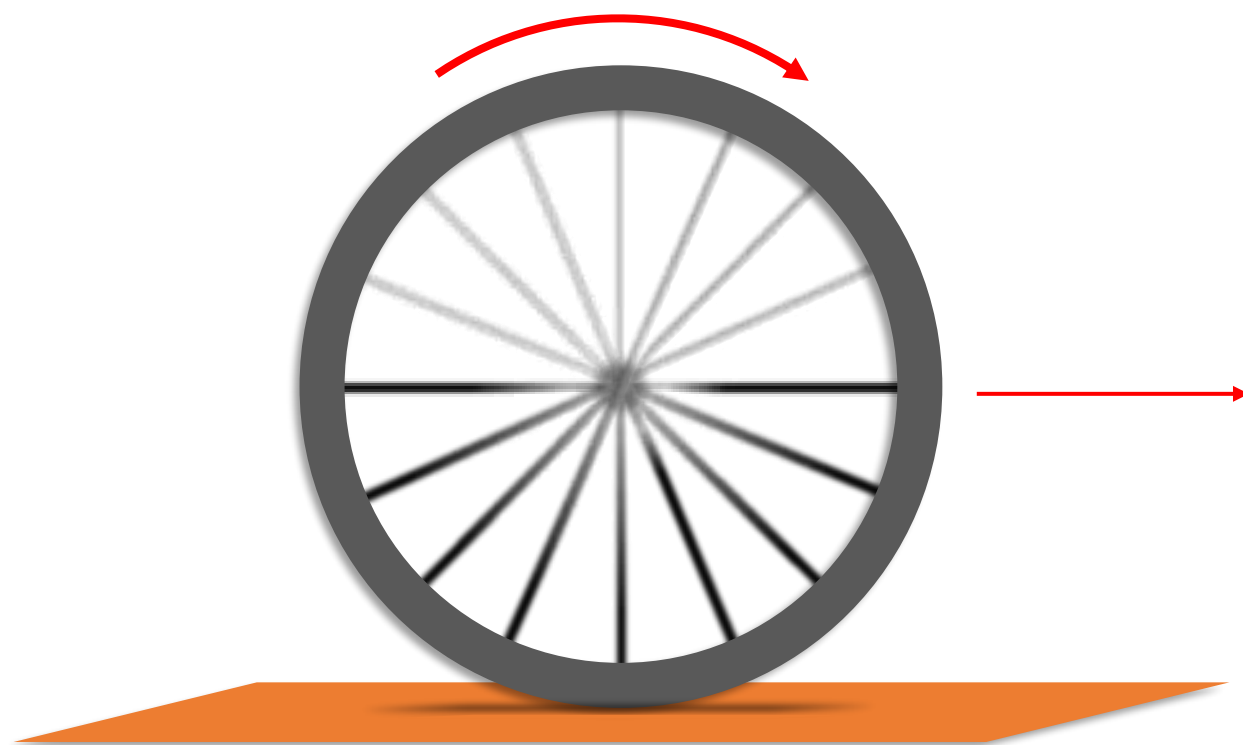


Figura 7.05: Roda de uma bicicleta em movimento para a direita. Os raios de cima estão menos nítidos porque estão se movendo mais devagar.

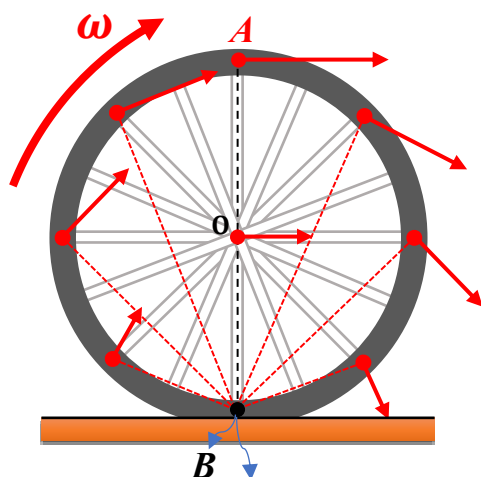
Na **Figura 7.05**, podemos confirmar os resultados da **Figura 7.04**, em que os raios de cima de uma roda de bicicleta em movimento estão menos nítidos do que os raios de baixo pelo fato da diferença de velocidade entre eles em um movimento de rolamento.

7.3 – Rolamento como uma Rotação Pura

O movimento de rolagem de uma roda também pode ser descrito como um movimento de rotação pura em que o eixo de rotação passa pelo ponto da roda que está em contato com o solo. Como exemplo, vamos usar a **Figura 7.04(c)**: o ponto de contato entre a roda e o solo é o ponto B. Nesse exemplo, a velocidade linear em qualquer ponto da roda é perpendicular à linha que liga esse ponto ao ponto “B”, sendo a velocidade angular da roda constante em todos os pontos da roda, os quais descrevem arcos de circunferências cujos centros é o ponto de contato

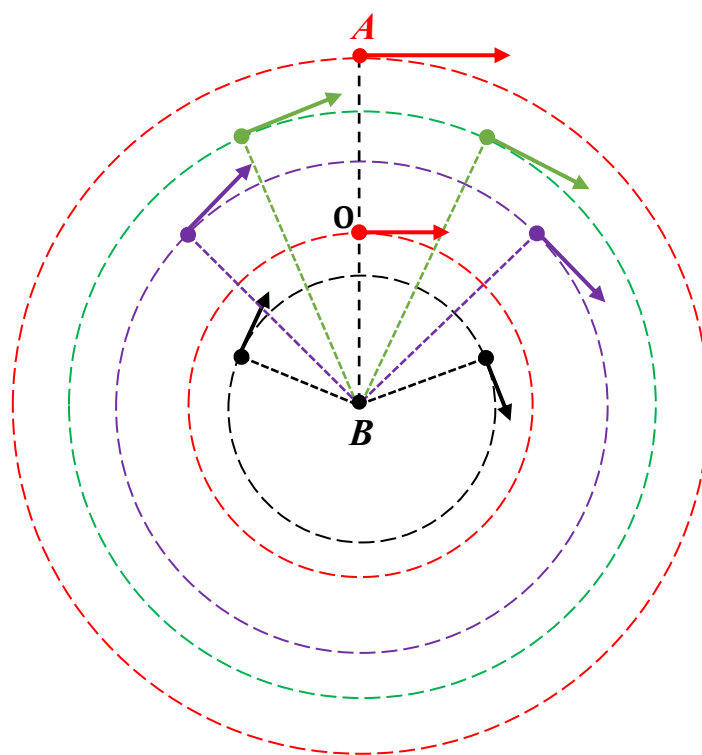
entre a roda e o solo, ou seja, o ponto “B”.

A **Figura 7.06** a seguir ilustra as velocidades instantâneas em alguns pontos da roda, os quais seus valores podem ser obtidos combinando os movimentos de rotação e translação puros, como mostrado na **Figura 7.04**.



A velocidade linear no ponto “B”, nesse movimento de rolamento, é nula, pois as velocidades combinadas, nesse ponto, dos movimentos de rotação e translação são opostas.

(a)



(b)

Figura 7.06: Representação do movimento de rolamento como uma rotação pura, com eixo de rotação de passa pelo ponto B. Em (a), a representação dos vetores velocidades em diversos pontos da roda. Em (b), a trajetória circular que esses pontos descreveriam se analisados como rotação pura.

Nas duas ilustrações da **Figura 7.06**, as velocidades lineares estão representadas nos mesmos pontos da roda em movimento de rolamento. Em (b), as linhas tracejadas revelam as trajetórias circulares do movimento com a análise de uma rotação pura, mesmo o movimento não sendo desse tipo. Como a velocidade angular é constante em cada ponto, podemos provar os valores para as velocidades do movimento de rolamento descrito na **Figura 7.04(c)**.

Como o módulo da velocidade linear escalar em cada ponto é $v = \omega r$, vamos calcular as velocidades nos pontos conhecidos da **Figura 7.04(c)** com base nas informações da **Figura 7.06(b)**:

Para o Ponto A:

$$v_A = \omega r_A$$

Acontece que o ponto O é o centro da roda, o qual divide ao meio a distância entre o ponto B e o ponto A, ou seja, o raio da trajetória do ponto A é igual a duas vezes o raio da roda

($r_A = 2R$):

$$v_A = \omega \cdot 2R$$

De acordo com a **Equação 7.02**, ωR representa a velocidade do centro de massa. Logo, podemos escrever:

$$v_A = 2v_{CM}$$

Para o ponto O, a distância para o ponto B é o próprio raio da roda. Assim:

$$v_O = v_{CM}$$

Para o ponto B, a distância para o eixo de rotação é zero, tendo em vista que ele está no eixo de rotação. Logo:

$$v_B = 0$$

USANDO O ALGODOO 7.0

A **Figura 7.07** abaixo mostra um objeto circular com densidade constante (centro de massa localizado no seu centro geométrico) com movimento de rolagem enquanto desce uma rampa. Nesse movimento, podemos observar que o corpo possui tanto velocidade angular, referente a sua rotação, quanto velocidade linear do seu centro de massa, referente ao seu movimento de translação.

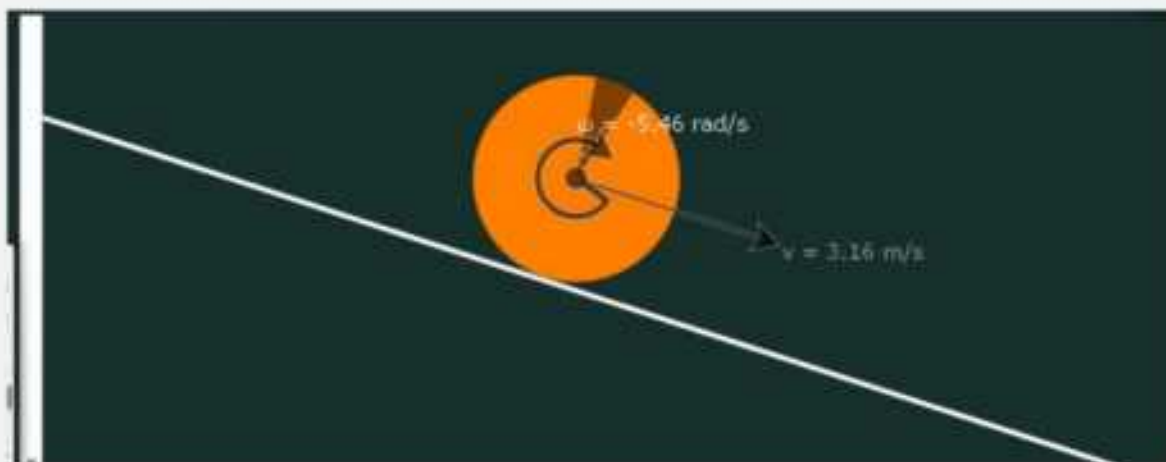


Figura 7.07: Recorte de captura de tela do *software Algodoo*: movimento de rolamento suave de um objeto homogêneo circular descendo uma rampa.

Fonte: os autores.

Simulação disponível em: <http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264516>.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique [aqui](#).

Na **Figura 7.08** a seguir, você pode visualizar as trajetórias de dois pontos de um objeto circular homogêneo: um no centro do objeto e outro na sua extremidade. Você vai observar que a trajetória do ponto localizado no centro de massa fará uma trajetória retilínea, enquanto o outro ponto fará uma trajetória extremamente distinta.

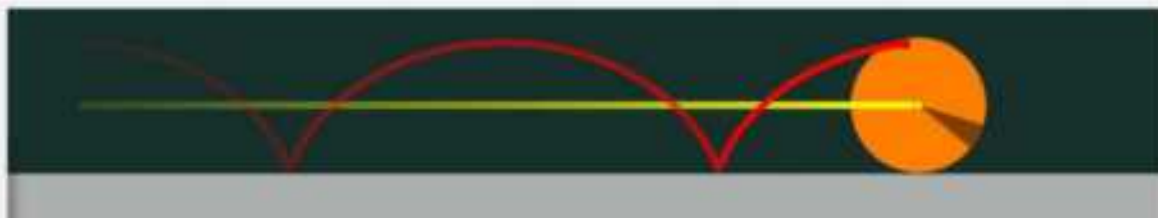


Figura 7.08: Recorte de captura de tela do *software Algodoo*: trajetórias de dois pontos distintos em um movimento de rolamento. Fonte: os autores.

Simulação disponível em: <http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264517>.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique [aqui](#).

Podemos também verificar, no *software*, que o movimento de rolamento pode ser visto como um movimento de rotação pura, em que o eixo de rotação é o ponto de contato entre o objeto circular e o solo. Observe que, na **Figura 7.09**, os pontos da trajetória em vermelho possuem o dobro da velocidade linear escalar de que pontos que estão na trajetória em preto, confirmando que pontos da extremidade são duas vezes mais rápidos que o centro de massa.

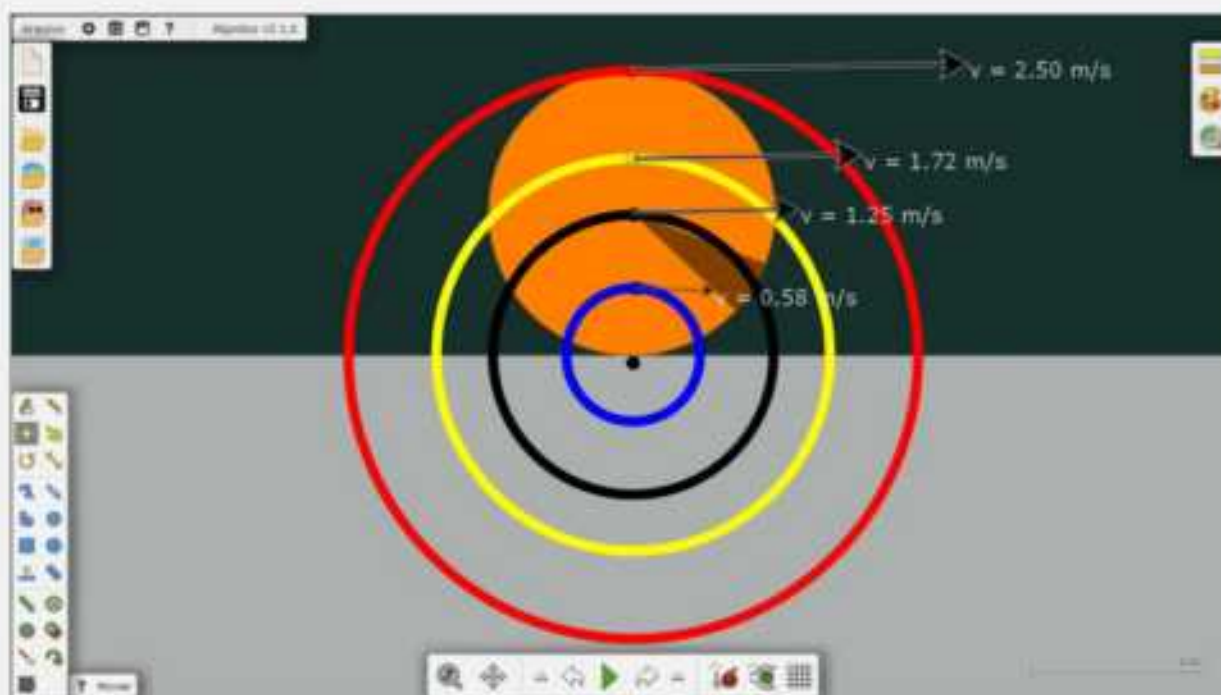


Figura 7.09: Captura de tela do *software Algodoo*: rolamento como uma rotação pura. Fonte: os autores.

Simulação disponível em: <http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264518>.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em: <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique [aqui](#).

Como já vimos, o movimento de rolamento é a combinação dos movimentos individuais de rotação e translação. A **Figura 7.10** e a **Figura 7.11** mostram as simulações desses movimentos individuais e suas características. Na **Figura 7.10**, há apenas o movimento de translação, em que podemos observar que a velocidade angular em todos os pontos do corpo é nula (deslizamento total), enquanto a velocidade linear é constante para qualquer ponto.

Já a **Figura 7.11**, reforça a ideia de que em um movimento de rotação pura, a velocidade angular é constante em todos os pontos do corpo e as velocidades lineares em pontos opostos são simétricas, ou seja, possuem o mesmo módulo e direção, mas sentidos opostos. Também é importante lembrar que nesse tipo de movimento o módulo da velocidade linear varia de acordo com a distância do ponto a ser analisado com o eixo fixo de rotação.

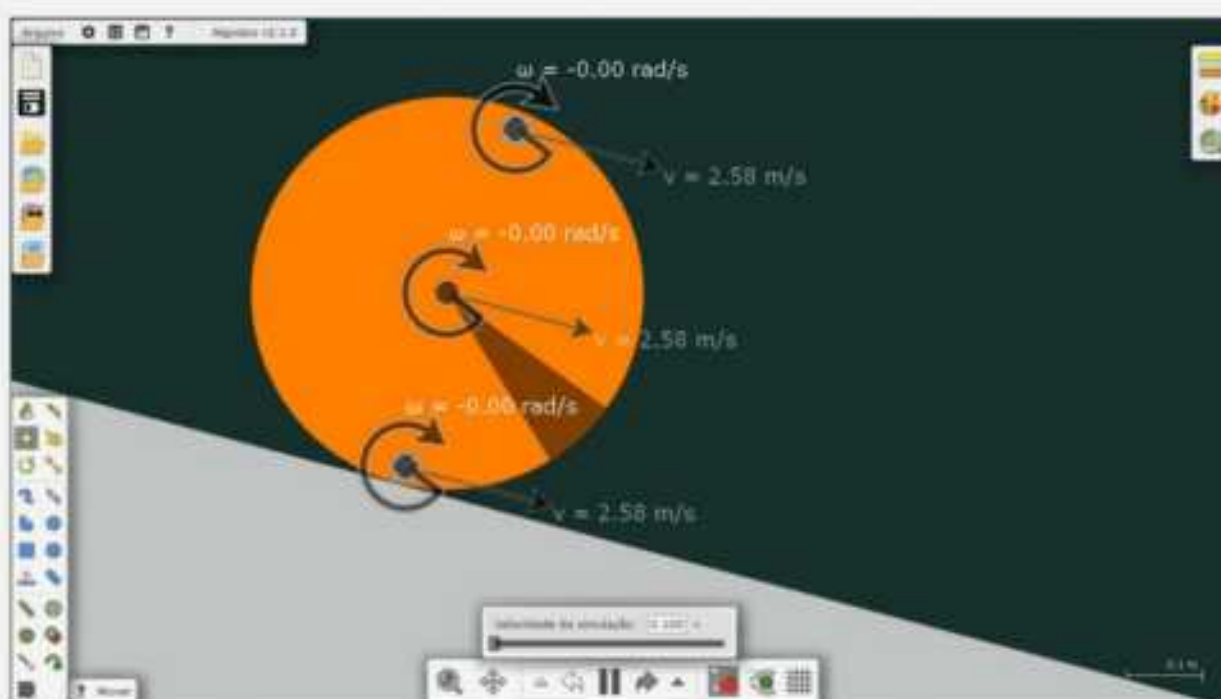


Figura 7.10: Captura de tela do software *Algodoo*: movimento de translação pura.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: <http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264540>.

Faça o download do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do software, clique [aqui](#).

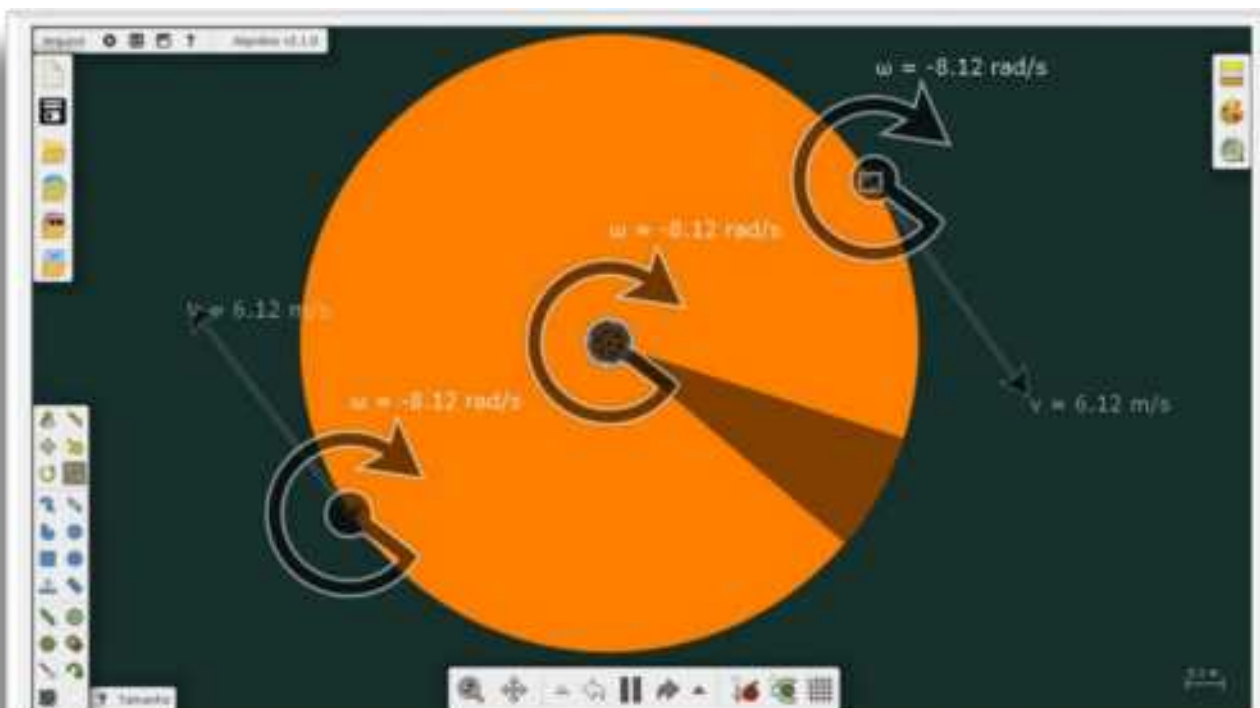


Figura 7.11: Captura de tela do software Algodoo: rotação pura com velocidades angulares constantes e velocidades lineares simétricas.

Fonte: o autor.

Simulação disponível em: <http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264541>.

Faça o download do aplicativo Algodoo gratuitamente em <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do software, clique [aqui](#).

Clique no link <https://youtu.be/rj3gIA2DJ9s> ou escaneie o QR code ao lado para assistir ao vídeo do tutorial das animações.



TAREFA PROPOSTA 7.0

Uma roda homogênea de 40 cm de raio R está em movimento de rolamento suave (sem deslizamento) com velocidade angular constante e frequência de giro de 4 Hz, conforme a **Figura 7.12** abaixo.

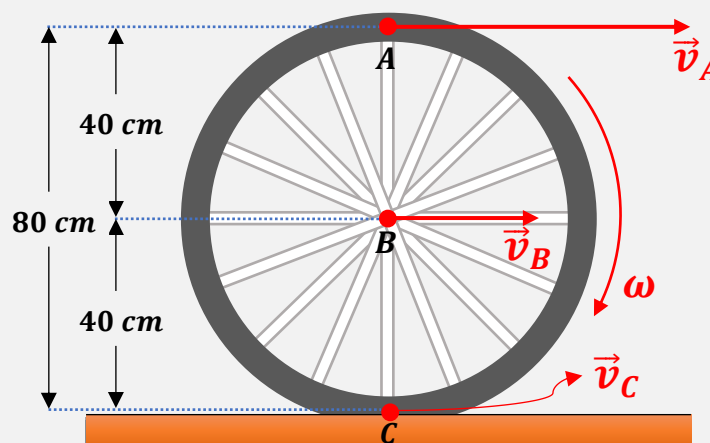


Figura 7.12: Tarefa Proposta 7.0 – Roda de raio 40 cm descrevendo um movimento de rolamento.

Utilize a **Tabela 7.01** a seguir, que contém os dados deste problema, e calcule as velocidades angulares, além das velocidades lineares para os pontos **A**, **B** e **C**. Não deixe de observar que o ponto **A** está localizado na extremidade superior da roda, bem como o ponto **B** está no centro de massa, além do ponto **C** estabelecer contato entre a roda e o solo.

Dica: utilize o fato de o movimento de rolamento poder ser calculado como um movimento de rotação pura.

CÁLCULO DO ROLAMENTO COMO ROTAÇÃO PURA				
Ponto	Distância para o ponto C (Contato com o solo)	Frequência (Hz)	Velocidade Angular (rad/s) ($\omega = 2\pi f$)	Velocidade Linear (m/s) ($v = 2\pi r f$)
A	$2R$	0,5		
B	R	0,5		
C	0	0,5		

Tabela 7.01: Tarefa Proposta 7.0 – Dados para cálculo das velocidades angulares e lineares de três pontos distintos de uma roda em movimento de rolagem.

Depois dos cálculos, você deve perceber que, por possuir frequência de giro constante, as velocidades angulares de todos os pontos são iguais e a velocidade linear do ponto A tem o dobro da velocidade linear do ponto B, além da velocidade do ponto C ser nula.

Em seguida, clique **AQUI** para conferir a simulação que constam os resultados.

E aí, acertou?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

7.01 – A **Figura 7.13** a seguir mostra uma roda homogênea de raio $R = 30\text{ cm}$ em movimento de rolagem com velocidade angular constante. Considere a frequência de giro da roda igual 2 Hz , $\pi = 3,14$ e calcule a velocidade angular da roda, além da velocidade linear para os pontos **A**, **B** e **C** da imagem.

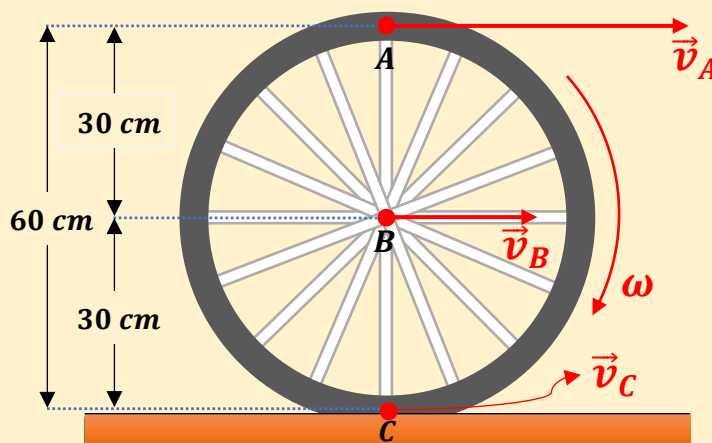


Figura 7.13: Exercício Resolvido 7.01 – Roda homogênea de raio 30 cm descrevendo um movimento de rolamento.

Solução: Para calcular a velocidade angular em de cada ponto, vamos utilizar a **Equação 2.06**:

$$\omega = 2\pi f$$

Para o ponto **A**, temos:

$$\omega_A = 2\pi f_A$$

Substituindo os dados:

$$\omega_A = 2 \cdot 3,14 \cdot 2$$

$$\omega_A = 12,56 \text{ rad/s}$$

Como visto, essa velocidade angular é constante para todos os pontos do corpo. Basta observar que a velocidade angular, de acordo com a **Equação 2.06**, depende da frequência e, como as frequências nos três pontos são iguais, as velocidades angulares nos pontos **B** e **C** também são as mesmas do ponto **A**. Logo:

$$\omega_A = \omega_B = \omega_C = 12,56 \text{ rad/s}$$

Portanto, as velocidades angulares para todos os pontos da roda são constantes e iguais a $12,56 \text{ rad/s}$.

Para calcular as velocidades lineares nos pontos em questão, podemos calcular a velocidade do centro de massa, que corresponde ao ponto **B** e, em seguida, calcular dos outros dois pontos. Podemos também usar o conceito de rolamento como rotação pura. Vamos calcular primeiro usando esse último conceito. Para isso, vamos fazer uso da **Equação 2.03**, lembrando que o (r) dessa equação corresponde à distância do ponto onde se deseja calcular a velocidade ao ponto de contato da roda com o solo, que, no caso, é o ponto **C**:

Para o ponto **A**:

$$v_A = 2\pi r_A f_A$$

Sendo $r_A = 2R$ - $R = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$ - $f_A = 2 \text{ Hz}$:

$$v_A = 4\pi R f_A$$

Substituindo os dados:

$$v_A = 4 \cdot 3,14 \cdot 0,3 \cdot 2$$

$$v_A = 7,54 \text{ m/s}$$

Para o ponto **B**, temos que $r_B = R - R = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$ - $f_B = 2 \text{ Hz}$. Logo:

$$v_B = 2\pi r_B f_B$$

$$v_B = 2\pi R f_B$$

$$v_B = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,3 \cdot 2$$

$$v_B = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,3 \cdot 2$$

$$v_B = 3,77 \text{ m/s}$$

Para o ponto **C**, não há distância para o ponto de contato da roda com o solo, visto que esse é o próprio ponto de contato. Logo:

$$v_c = 2\pi r_c f_c$$

$$v_c = 2 \cdot 3,14 \cdot 0 \cdot 2$$

$$v_c = 0$$

Usando a **Equação 7.02**:

$$V_{CM} = \omega R$$

Substituindo os dados:

$$V_{CM} = 12,56 \cdot 0,3$$

$$V_{CM} = 3,77 \text{ m/s}$$

O Ponto **B** está no centro de massa da roda, logo:

$$v_B = V_{CM} = 3,77 \text{ m/s}$$

O ponto **A** está na extremidade superior da roda, logo:

$$v_A = 2V_{CM} = 2 \cdot 3,77 = 7,54 \text{ m/s}$$

No ponto **C**, a velocidade é nula por se tratar do ponto de contato entre a roda e o solo em um movimento de rolagem.

Portanto, todos os cálculos para as intensidades das velocidades lineares nos três pontos foram os mesmos para os dois casos e seus valores para os pontos **A**, **B** e **C** são, respectivamente, iguais a $7,54 \text{ m/s}$, $3,77 \text{ m/s}$ e 0 .

7.02 – Uma roda homogênea, de raio igual a 25 cm , está em movimento de rolamento suave com velocidade angular constante de 15 rad/s . Determine o módulo da sua velocidade do centro de massa, além das suas velocidades das extremidades superior e inferior.

Solução: Para calcular a intensidade da velocidade do centro de massa, usaremos a **Equação 7.02**:

$$V_{CM} = \omega R$$

Substituindo os dados na questão:

$$V_{CM} = 15 \cdot 0,25$$

$$V_{CM} = 3,75\text{ m/s}$$

Para a extremidade superior, temos que:

$$v_{superior} = 2V_{CM}$$

$$v_{superior} = 2 \cdot 3,75$$

$$v_{superior} = 7,5\text{ m/s}$$

A extremidade inferior corresponde ao ponto de contato da roda com a superfície na qual ela está deslocando-se. Assim, sua a velocidade neste ponto é zero.

Portanto, os módulos das velocidades do centro de massa, da extremidade superior e o da inferior da roda são, respectivamente, iguais a $3,75\text{ m/s}$, $7,5\text{ m/s}$ e 0 .

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7.01 – A **Figura 7.14** a seguir mostra uma roda homogênea de raio $R = 50\text{ cm}$ em movimento de rolagem com velocidade angular constante. Considere a frequência de giro da roda igual $1,5\text{ Hz}$, $\pi = 3,14$ e calcule a velocidade angular da roda, além da velocidade linear para os pontos **A**, **B** e **C** da imagem.

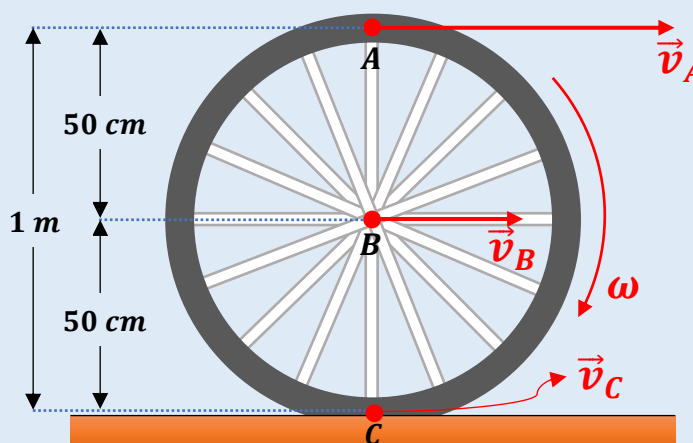


Figura 7.14: Exercício Proposto 7.01 – Roda homogênea de raio 50 cm descrevendo um movimento de rolamento.

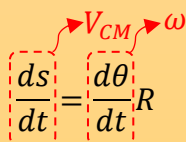
7.02 – Uma roda homogênea, de raio igual a 28 cm , está em movimento de rolamento suave com velocidade angular constante de 20 rad/s . Determine o módulo da sua velocidade do centro de massa, além das suas velocidades das extremidades superior e inferior.

Saiba mais...

A distância percorrida por um objeto circular com densidade constante, como uma roda homogênea, por exemplo, em um movimento de rolamento é igual ao arco descrito pelo seu movimento de giro. Assim, podemos estabelecer a relação entre o arco e o ângulo de giro:

$$s = \theta R$$

A velocidade linear do centro de massa V_{CM} da roda é obtida derivando-se s em relação ao tempo, ao passo que para se obter a velocidade angular em qualquer ponto do corpo, é preciso derivar o ângulo de giro θ também em relação ao tempo. Assim:


$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} R$$

$$V_{CM} = \omega R$$

REVISÃO

Rolamento

O que é Rolamento

Quando um corpo está, ao mesmo tempo, descrevendo os movimentos de **translação** e **rotação**, ele está descrevendo um movimento de **rolamento**.

Quando não há deslizamento no movimento de rolagem, chamamos esse movimento de **rolamento suave**.

Rolamento: uma combinação de Translação e Rotação

A combinação dos movimentos individuais de rotação (**rotação pura**) com o movimento de translação (**translação pura**) resulta no movimento de **rolamento**.

Nesse tipo de movimento, a distância percorrida por uma roda, por exemplo, tem a mesma medida que o arco de circunferência descrito por ela no mesmo intervalo de tempo. Esse arco de circunferência é dado por:

$$s = \theta R \text{ (m)} \quad (7.01)$$

- s – arco de circunferência da trajetória;
- θ – ângulo de giro da roda;
- R – raio da roda.

Como as medidas da distância e do arco descritos são iguais, podemos relacioná-los e calcular a velocidade do centro de massa da roda por meio da seguinte equação:

$$V_{CM} = \omega R \text{ (m/s)} \quad (7.02)$$

- V_{CM} – velocidade do centro de massa da roda;
- ω – velocidade angular da roda;
- R – raio da roda.

É importante observar que, no movimento de rolamento suave, a velocidades angular ω , em qualquer ponto da roda (ou de um corpo em rolamento) é constante:

$$\omega = \text{constante}$$

A velocidade linear tem valores distintos para distâncias diferentes em relação ao centro da roda, sendo a velocidade linear da sua extremidade superior dada por:

$$\vec{v}_{superior} = 2\vec{V}_{CM}$$

- $\vec{v}_{superior}$ – velocidade da extremidade superior da roda;
- $\vec{V}_{CM}$ – velocidade do centro de massa da roda.

Já para a extremidade inferior (contato com o solo), a velocidade linear é nula:

$$\vec{v}_{inferior} = \vec{0}$$

Rolamento como uma Rotação Pura

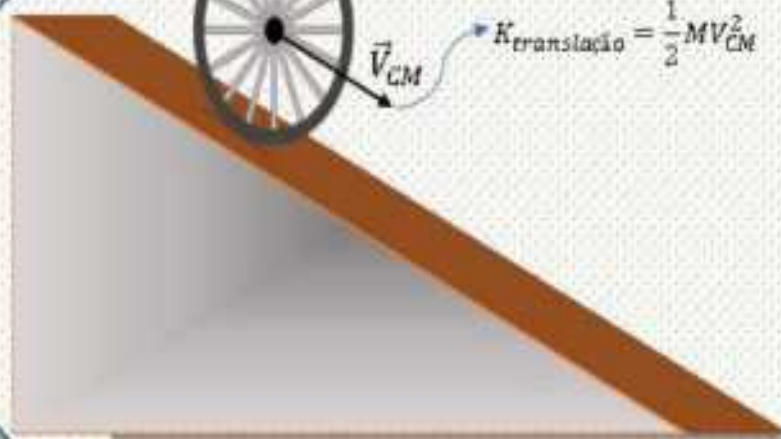
Os resultados acima referentes aos valores das velocidades lineares em pontos distintos de um corpo rígido em rolamento podem ser obtidos tratando o movimento de rolamento como se fosse um movimento de **rotação pura**, considerando o ponto de contato entre o corpo e a superfície como se fosse o eixo de rotação (veja a **Figura 7.06**).

$$K_{\text{translação}} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$



$$K_{\text{rotação}} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

$$K_{\text{translação}} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$



$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$



$$K_{\text{rotação}} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$



CAPÍTULO 8

ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Definir Energia Cinética de Rolamento como a combinação das energias cinéticas de rotação e translação.
- ✓ Demonstrar a equação para cálculo da Energia Cinética de Rolamento por meio do Teorema dos Eixos Paralelos.
- ✓ Usar o software de simulação Física Algodoo como extensão da aprendizagem do capítulo.

A **energia cinética de rolamento** de um corpo corresponde à soma das suas energias cinéticas de rotação e de translação, pois já sabemos que o movimento de rolagem é a combinação desses dois tipos de movimentos.

Para calcular a energia cinética de rolamento, vamos considerar o movimento de rolagem de uma roda homogênea em relação a um observador estacionário. Encarando o movimento dessa roda como o de uma rotação pura em torno de um eixo que passa pelo ponto **B** da **Figura 7.06**, o qual não representa o seu centro de massa, a sua energia cinética é calculada de acordo com a **Equação 4.02**:

$$K = \frac{1}{2} I_B \omega^2$$

em que I_B é o momento de inércia da roda em relação ao eixo que passa pelo ponto **B** e ω , a velocidade angular da roda.

Para calcular o momento de inércia de qualquer ponto de um corpo, nesse caso o da roda, basta sabermos o momento de inércia desse corpo em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa por meio do Teorema dos Eixos paralelos (**Equação 4.03**):

$$I_B = I_{CM} + Mh^2$$

sendo I_{CM} o momento de inércia da roda em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa, M a massa da roda e h a distância perpendicular entre os dois eixos (o que passa pelo centro de massa e o que passa pelo ponto **P**), que, para a roda, representa a medida do seu raio R .

$$I_B = I_{CM} + MR^2$$

Substituindo I_B na equação da energia cinética de rotação:

$$K = \frac{1}{2} (I_{CM} + MR^2) \omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2$$

De acordo com a **Equação 7.02**, $V_{CM} = \omega R$. Logo:

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M \boxed{\omega R} \cdot \boxed{\omega R} \rightarrow \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2 \quad (J) \quad (8.01)$$

- K – energia cinética de rolamento;
- I_{CM} – momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de massa;
- ω – velocidade angular;
- M – massa do corpo;
- V_{CM} – velocidade do centro de massa.

Para a roda, podemos interpretar a **Equação 8.01** como $\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$ sendo a sua energia cinética associada ao seu movimento de rotação em torno do eixo que passa pelo seu centro de massa (**Figura 7.04(a)**), e o termo $\frac{1}{2} M V_{CM}^2$ como a energia cinética associada ao movimento de translação do centro de massa da roda (**Figura 7.04(b)**).

⚠ IMPORTANTE

Um corpo em movimento de rolamento possui dois tipos de energias cinéticas: uma associada ao movimento de rotação ($\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$) em torno do eixo que passa pelo centro de massa e uma associada ao movimento de translação do centro de massa ($\frac{1}{2} M V_{CM}^2$).

A **Figura 8.01** a seguir ilustra uma roda homogênea com velocidade angular ω e velocidade do seu centro de massa $\vec{V}_{CM}$ descendo uma rampa. Associada a essas velocidades, temos as energias cinéticas de rotação e translação correspondentes, resultando na sua energia cinética de rolamento.

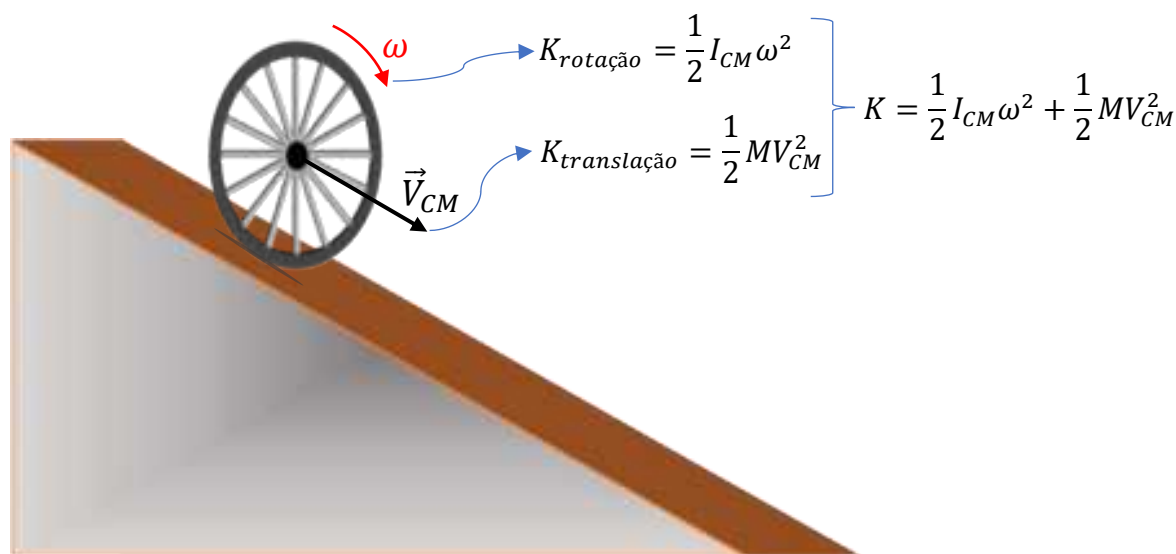


Figura 8.01: Roda homogênea descrevendo um movimento de rolamento em um plano inclinado, com energia cinética de rotação $K_{rotação} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$, energia cinética de translação $K_{translação} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2$ e energia cinética de rolamento $K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$ sendo a soma das duas primeiras.

USANDO O *ALGODOO* 8.0

A **Figura 8.02** abaixo mostra a simulação de um ônibus em MRU.

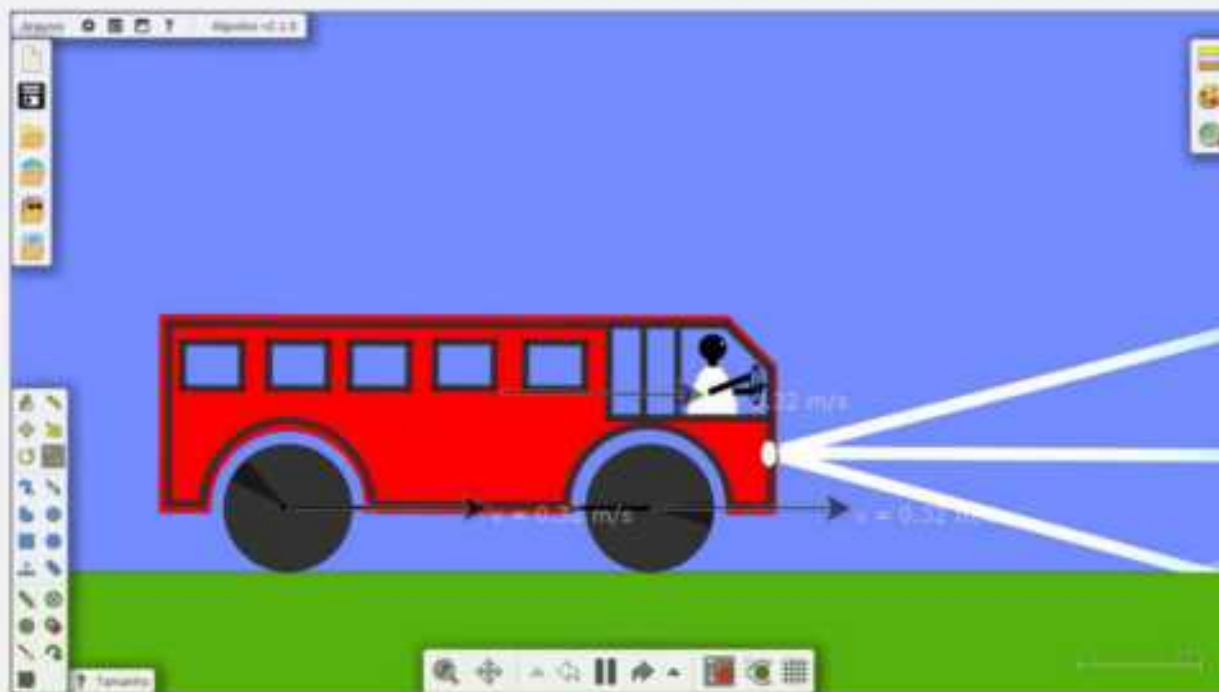


Figura 8.02: Captura de tela do software *Algodoos*: Ônibus em movimento retilíneo uniforme (MRU) com rodas em movimento de rolagem.

Fonte: os autores.

Simulação disponível em: <http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264563>.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoos* gratuitamente em <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do software, clique [aqui](#).

Clique no link <https://youtu.be/oTs1tM5xmzE> ou escaneie o QR code ao lado para assistir ao vídeo do tutorial da animação.



Na **Figura 8.02**, a velocidade linear escalar do ônibus é a mesma da velocidade do centro de massa da roda, pois a roda é homogênea e tem seu centro de massa no seu centro geométrico. A roda também possui energia cinética de rotação, sendo sua energia cinética de rolamento podendo ser calculada por meio da **Equação 8.01**.

TAREFA PROPOSTA 8.0

Vamos utilizar a **Figura 8.02** para esta tarefa. Vamos calcular a energia cinética de rolamento de uma das rodas do ônibus (as duas são idênticas e possuem a mesma energia cinética de rolamento). Para isso, considere os dados da **Tabela 8.01** a seguir para calcular o momento de inércia que passa pelo centro de massa da roda:

$m \text{ (kg)}$	$R \text{ (m)}$	$I_{CM} = \frac{1}{2}mR^2 \text{ (kg.m}^2\text{)}$
1,5	0,5	

Tabela 8.01: Tabela para calcular o momento de inércia de uma roda homogênea da Tarefa Proposta 8.0.

Agora, use $\pi = 3,14$ e calcule a velocidade angular da roda usando a **Tabela 8.02** abaixo (lembre-se de que o movimento em sentido horário corresponde a uma velocidade angular negativa):

$f \text{ (Hz)}$	$\omega = 2\pi f \text{ (rad/s)}$
0,1	

Tabela 8.02: Tabela para calcular a velocidade angular da roda homogênea da Tarefa Proposta 8.0.

Calcule, agora, a velocidade do centro de massa da roda, considerando, novamente, $\pi = 3,14$ e utilizando os dados da **Tabela 8.03** a seguir:

$\omega \text{ (rad/s)}$	$R \text{ (m)}$	$V_{CM} = \omega R \text{ (m/s)}$
	0,5	

Tabela 8.03: Tabela para calcular a velocidade do centro de massa da roda homogênea da Tarefa Proposta 8.0.

Por fim, utilize os dados encontrados nas tabelas anteriores e calcule a energia cinética de rolamento da roda de acordo com os dados da **Tabela 8.04**:

$I_{CM} \text{ (kg.m}^2\text{)}$	$\omega \text{ (rad/s)}$	$M \text{ (kg)}$	$V_{CM} \text{ (m/s)}$	$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}MV_{CM}^2 \text{ (J)}$
		1,5		

Tabela 8.04: Tabela para calcular a energia cinética de rolamento da roda homogênea da Tarefa Proposta 8.0.

Em seguida, clique **AQUI** para verificar a simulação com os resultados para cada disco.

E aí, acertou!?

Não esqueça de que, para verificar as informações de energia cinética linear, angular e total, é necessário clicar com o botão direito do *mouse* sobre o objeto e ir até a guia “**Informações**” no aplicativo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

8.01 – Um veículo está em movimento retilíneo uniforme com velocidade linear escalar de 20 m/s . Suas rodas, homogêneas e idênticas, cada uma com massa $M = 10 \text{ kg}$ e raio $R = 25 \text{ cm}$, por consequência do movimento linear do veículo, possuem velocidade angular constante e seus momentos de inércia podem ser calculados por meio da equação $\left(I = \frac{1}{2}MR^2\right)$, em que M é a massa da roda e R , o seu raio. De acordo com o enunciado, determine, para uma das rodas do veículo:

- a) a sua velocidade do centro de massa;
- b) a sua velocidade angular;
- c) o seu momento de inércia;
- d) a sua energia cinética de rotação;
- e) a sua energia cinética de translação;
- f) a sua energia cinética de rolamento.

Solução:

a) Como o veículo encontra-se em MRU, sua velocidade escalar linear é a mesma da velocidade do centro de massa da roda, uma vez que esse ponto se encontra no seu eixo de rotação, localizado no seu centro geométrico. Logo:

$$V_{CM} = 20 \text{ m/s}$$

b) Para calcular a velocidade angular da roda, vamos usar a **Equação 7.02**:

$$V_{CM} = \omega R$$

$$\omega = \frac{V_{CM}}{R}$$

Substituindo os dados e sabendo que $25 \text{ cm} = 0,25 \text{ m}$:

$$\omega = \frac{20}{0,25}$$

$$\omega = \frac{20}{0,25}$$

$$\omega = 80 \text{ rad/s}$$

c) Sabendo que o eixo de giro da roda do veículo passa pelo seu centro de massa, localizado no seu centro geométrico, podemos usar a equação dada no problema para calcular o seu momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de massa:

$$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$$

Substituindo os dados:

$$I_{CM} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 0,25^2$$

$$I_{CM} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,25^2$$

$$I_{CM} = 5 \cdot 0,0625$$

$$I_{CM} = 0,3125 \text{ kg.m}^2$$

d) Para calcular a energia cinética de rotação, usaremos a parte da **Equação 8.01**, associada a esse tipo de movimento, visto que a roda está em movimento de rolamento e essa energia faz parte da sua composição.

$$K_{Rotação} = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

Substituindo os dados:

$$K_{rotação} = \frac{1}{2} \cdot 0,3125 \cdot 80^2$$

$$K_{rotação} = \frac{1}{2} \cdot 0,3125 \cdot 6400$$

$$K_{rotação} = 0,3125 \cdot 3200$$

$$K_{rotação} = 0,3125 \cdot 3200$$

$$K_{rotação} = 1000 \text{ J}$$

e) Para calcular a energia cinética de translação, vamos usar a outra parte da **Equação 8.01**, associada a esse movimento:

$$K_{translação} = \frac{1}{2}MV_{CM}^2$$

Substituindo os dados:

$$K_{\text{translação}} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 20^2$$

$$K_{\text{translação}} = 5 \cdot 400$$

$$K_{\text{translação}} = 2000 \text{ J}$$

f) Para calcular a energia cinética de rolamento, basta usar a **Equação 8.01** ou, simplesmente, somar as energias cinéticas de rotação e translação calculadas nos itens “d” e “e”:

$$K = K_{\text{rotação}} + K_{\text{translação}}$$

$$K = 1000 + 2000$$

$$K = 3000 \text{ J}$$

Portanto, de acordo com todos os valores dados e calculados no problema, chegamos à conclusão de que a energia cinética de rolamento da roda do veículo é de 3000 J.

EXERCÍCIO PROPOSTO

8.01 – Um carro está em movimento retilíneo uniforme com velocidade linear escalar de 15 m/s. Suas rodas, homogêneas e idênticas, cada uma com massa $M = 8 \text{ kg}$ e raio $R = 20 \text{ cm}$, por consequência do movimento linear do veículo, possuem velocidade angular constante. De acordo com o enunciado, determine, para uma das rodas do veículo:

Use $\left(I = \frac{1}{2}MR^2\right)$ para calcular o momento de inércia da roda.

- a) a sua velocidade do centro de massa;
- b) a sua velocidade angular;
- c) o seu momento de inércia;
- d) a sua energia cinética de rotação;
- e) a sua energia cinética de translação;
- f) a sua energia cinética de rolamento.

REVISÃO

Energia Cinética de Rolamento

A **energia cinética de rolamento** de um corpo corresponde à soma das suas energias cinéticas associadas à rotação e à translação, pois o movimento de rolagem é a combinação desses dois tipos de movimentos.

A energia cinética de rotação é dada por:

$$K_{\text{rotação}} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \quad (J)$$

E a energia cinética de translação é expressa da seguinte forma:

$$K_{\text{translação}} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 \quad (J)$$

Sendo a energia cinética de rolamento a soma dessas duas:

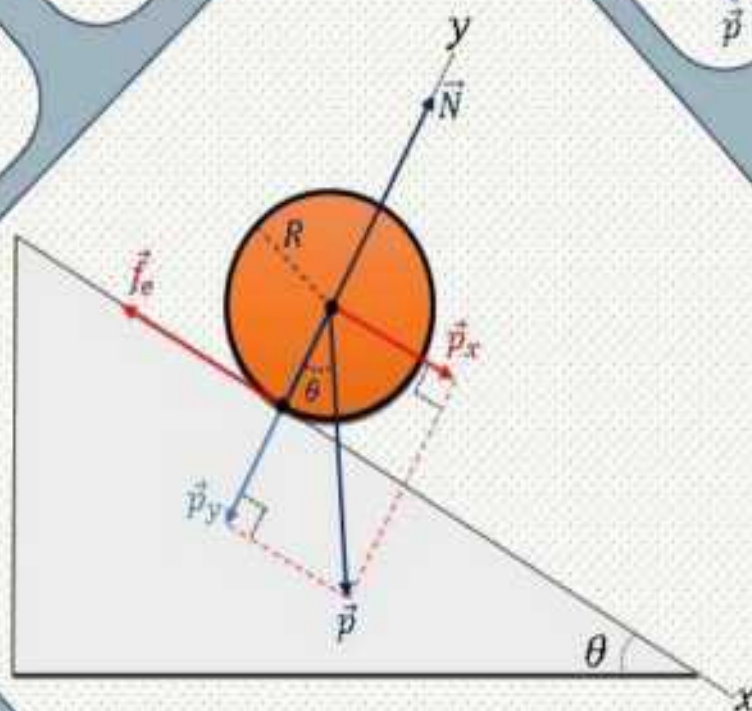
$$K = K_{\text{rotação}} + K_{\text{translação}}$$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2 \quad (J) \quad (8.01)$$

- K – energia cinética de rolamento;
- I_{CM} – momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de massa;
- ω – velocidade angular;
- M – massa do corpo;
- V_{CM} – velocidade do centro de massa.

:

$$a_{CM} = \frac{g \sin \theta}{1 + I_{CM}/MR^2}$$



CAPÍTULO 9

AS FORÇAS DE ROLAMENTO

$$a_{CM} = \frac{g \sin \theta}{1 + I_{CM}/MR^2}$$

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Mostrar quais as forças que atuam em um objeto redondo em rolamento.
- ✓ Ilustrar as forças de rolamento que atuam em um objeto redondo descendo em um plano inclinado.
- ✓ Demonstrar a equação para se calcular a aceleração do centro de massa de um corpo redondo descendo uma rampa.
- ✓ Usar o software de simulação Física Algodoo como extensão do aprendizado do capítulo.

Até agora, estudamos apenas as variáveis relacionadas ao movimento de rolamento sem considerar as forças que interferem na tendência de haver deslizamento. Neste capítulo, vamos verificar algumas situações e observar quais são as forças contidas no movimento de rolagem.

9.1 – Atrito e Rolamento

Quando uma roda se move aceleradamente, ela está sujeita a uma **força de atrito** no ponto em contato com o solo. A aceleração a qual a roda está submetida é devido a uma força que age sobre ela para aumentar ou diminuir a sua velocidade. Essa aceleração é chamada de **aceleração do centro de massa** $\vec{a}_{CM}$, e tem a mesma direção do movimento.

Essa força também produz uma aceleração angular α , fazendo a roda girar mais rápido ou mais lentamente, criando uma tendência de deslizamento no ponto de contato com o solo, o que não aconteceria se a velocidade da roda fosse constante, como mostrado na **Figura 7.03**.

A força que age sobre a roda para se opor a essa tendência de deslizamento é a **força de atrito**.

A **Figura 9.01** a seguir mostra uma roda em movimento horizontal de rolagem aceleradamente sem deslizar.

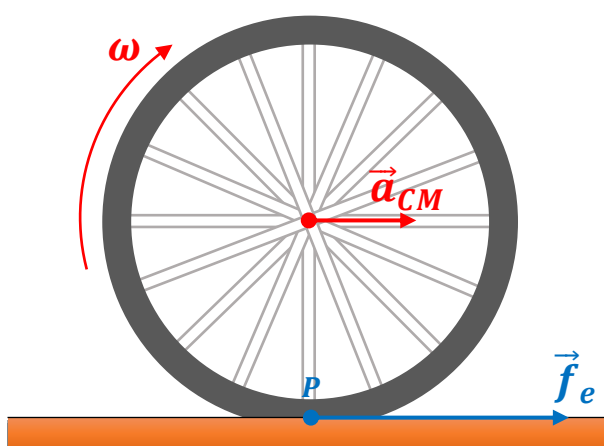


Figura 9.01: Roda em movimento retilíneo acelerado com movimento de rolamento sem sofrer deslizamento.

Na **Figura 9.01**, a roda não desliza e, portanto, seu movimento é de rolamento suave e a **força de atrito é estático** $\vec{f}_e$. Para uma força constante, temos também uma aceleração do centro de massa constante. Assim, a aceleração do centro de massa da roda é análoga à

componente tangencial da aceleração (**Equação 2.09**) que age sobre a roda, uma vez que todos os pontos de um corpo em movimento de translação possuem as mesmas características.

$$a_{CM} = \alpha r \quad (m/s^2) \quad (9.01)$$

- a_{CM} – aceleração do centro de massa da roda;
- α – aceleração angular da roda;
- R – raio da roda;

Se houver deslizamento no ponto P , a força de atrito será a **força de atrito cinético** $\vec{f}_c$. Nesse caso, a **Equação 9.01** não poderá ser usada, pois não se trata de um movimento de rolamento suave.

Se o movimento da roda da **Figura 9.01** fosse de frenagem, tanto a aceleração do centro de massa $\vec{a}_{CM}$ quanto a força de atrito estático $\vec{f}_e$ teriam sentidos opostos aos mostrados na figura.

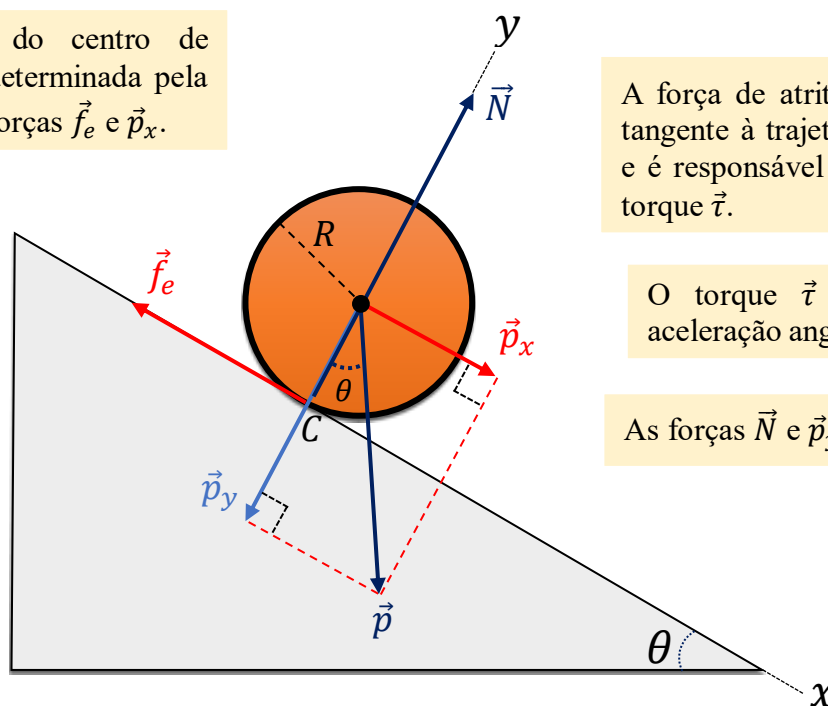
9.2 – Rolamento no Plano Inclinado

Considere um corpo redondo, homogêneo (densidade constante), de massa M e raio R , descrevendo um movimento de rolamento suave ao longo de um eixo x de uma rampa inclinada, formando um ângulo θ com o solo, conforme mostra a **Figura 9.02** a seguir.

A aceleração do centro de massa $\vec{a}_{CM}$ é determinada pela resultante das forças $\vec{f}_e$ e $\vec{p}_x$.

$$p_x = p \sin \theta$$

$$p_y = p \cos \theta$$



A força de atrito estático $\vec{f}_e$ é tangente à trajetória de rotação e é responsável por produzir o torque $\vec{\tau}$.

O torque $\vec{\tau}$ produz uma aceleração angular do corpo.

As forças $\vec{N}$ e $\vec{p}_y$ se equilibram.

Figura 9.02: Corpo redondo em rolamento suave ao longo de um plano inclinado que forma um ângulo θ com o plano horizontal.

As forças que agem sobre o corpo em rolamento suave da **Figura 9.02** são:

- A **força peso** $\vec{p}$ (força gravitacional) que atua sobre o corpo e tem sentido para baixo, sendo a origem desse vetor no centro de massa do corpo. Sua componente $\vec{p}_y$ tem mesmo módulo de $\vec{N}$, mas sentidos opostos e, por isso, se equilibram. Sua componente $\vec{p}_x$ tem a mesma direção da aceleração do centro de massa $\vec{a}_{CM}$ e da força de atrito estático $\vec{f}_e$.
- A **força normal** que é ortogonal à superfície de contato com o corpo (rampa) e atua nesse ponto de contato (C).
- A **força de atrito estático** $\vec{f}_e$ que atua no ponto de contato entre o corpo e a superfície e se opõe à tendência do deslizamento.

Vamos fazer uma representação das forças no plano cartesiano para podemos chegar à equação para cálculo do módulo da aceleração do centro de massa do corpo. Veja a **Figura 9.03** a seguir:

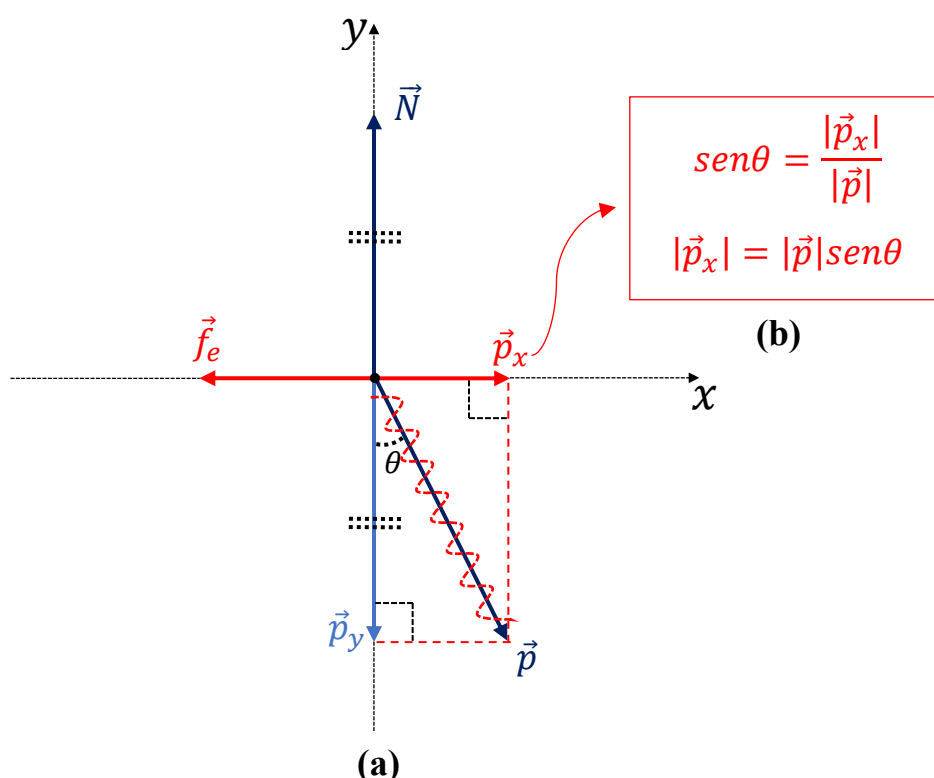


Figura 9.03: Representação das forças do corpo redondo da **Figura 9.02**. Em (a), todas as forças que atuam sobre o corpo. Em (b), o valor do módulo da componente x da força.

Pela **Figura 9.03**, observamos que as únicas forças que não se equilibram são as duas forças que atuam no eixo x: a força de atrito estático $\vec{f}_e$ e a componente x da força peso $\vec{p}_x$, que, de acordo com a **Figura 9.03(b)**, possui módulo $p\text{sen}\theta$.

Pela segunda lei de Newton, a resultante das forças que atuam sobre um corpo corresponde ao produto de sua massa pela aceleração produzida por essa força:

$$\vec{F}_R = m\vec{a} \quad (I)$$

Para o movimento de rolamento do corpo redondo da **Figura 9.02**, não é correto afirmar que a força de atrito estático $\vec{f}_e$ é máximo, mas apenas dizer que ela é suficiente para que não haja deslizamento e que o corpo role suavemente. Como $\vec{f}_e$ está no eixo negativo de x , enquanto $\vec{p}_x$ está no positivo, vamos escrever o módulo da força resultante $\vec{F}_R$ da seguinte maneira:

$$p_x - f_e = Ma_{CM} \quad (II)$$

sendo M a massa do corpo redondo em movimento de rolamento para baixo da rampa e a_{CM} a sua aceleração do centro de massa.

A força responsável para produzir o torque e fazer o corpo girar em torno do eixo que passa pelo centro de massa é a força de atrito estático $\vec{f}_e$, pois haveria apenas deslizamento se ela não atuasse em um movimento acelerado. De acordo com a **Equação 5.02**:

$$\tau = rF\sin\theta \quad (III)$$

sendo r o raio R da roda e F a intensidade da força de atrito estático f_e que age sobre ela. O ângulo θ é o ângulo formado entre R e F , que, nesse caso, vale 90° , sendo o $\sin 90^\circ = 1$. Logo:

$$\tau = Rf_e \quad (IV)$$

Usando a forma angular para o módulo do torque resultante sobre um corpo (**Equação 5.05**), temos:

$$\tau_R = I_{CM}\alpha \quad (V)$$

Igualando as equações IV e V referentes ao torque:

$$\begin{aligned} I_{CM}\alpha &= Rf_e \\ f_e &= \frac{I_{CM}\alpha}{R} \end{aligned} \quad (VI)$$

Substituindo VI em II:

$$p_x - \frac{I_{CM}\alpha}{R} = Ma_{CM} \quad (VII)$$

Em VII, $p_x = p\sin\theta = Mg\sin\theta$ e, de acordo com a **Equação 9.01**, $a_{CM} = \alpha R$. Logo:

$$p_x = M g \sen \theta \quad (\text{VIII})$$

$$\alpha = \frac{a_{CM}}{R} \quad (\text{IX})$$

Substituindo VIII e IX em VII:

$$M g \sen \theta - \frac{I_{CM}}{R} \cdot \frac{a_{CM}}{R} = M a_{CM}$$

$$M g \sen \theta - \frac{I_{CM} a_{CM}}{R^2} = M a_{CM}$$

$$\frac{M g \sen \theta}{M} - \frac{I_{CM} a_{CM}}{M R^2} = \frac{M a_{CM}}{M}$$

$$g \sen \theta - \frac{I_{CM} a_{CM}}{M R^2} = a_{CM}$$

$$-\frac{I_{CM} a_{CM}}{M R^2} - a_{CM} = -g \sen \theta$$

$$\frac{I_{CM} a_{CM}}{M R^2} + a_{CM} = g \sen \theta$$

$$a_{CM} \left(\frac{I_{CM}}{M R^2} + 1 \right) = g \sen \theta$$

$$a_{CM} = \frac{g \sen \theta}{\frac{I_{CM}}{M R^2} + 1}$$

$$a_{CM} = \frac{g \sen \theta}{1 + \frac{I_{CM}}{M R^2}}$$

$$a_{CM} = \frac{g \sen \theta}{1 + I_{CM}/M R^2} \quad (m/s^2) \quad (9.02)$$

- a_{CM} – módulo da aceleração do centro de massa do corpo redondo;
- g – módulo da aceleração da gravidade;
- θ – ângulo formado entre a horizontal e a inclinação da rampa;
- I_{CM} – momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de massa;
- M – massa do corpo;
- R – raio do corpo redondo.

Caso a força de atrito estático fosse máxima ($f_{m\acute{a}x}$), poderíamos usar a seguinte equação:

$$(f_e)_{m\acute{a}x} = \mu_e N \quad (N) \quad (9.03)$$

De modo que depois do deslizamento:

$$f_c = \mu_c N \quad (N) \quad (9.04)$$

- $(f_e)_{m\acute{a}x}$ – força de atrito estático máxima;
- μ_e – coeficiente de atrito estático da superfície;
- N – força de contato normal;
- f_c – força de atrito cinético;
- μ_c – coeficiente de atrito cinético da superfície.

A força de contato normal N depende da superfície de contato. Para planos horizontais, ela se equilibra com a força peso $\vec{p}$. No caso de um plano inclinado, ela se equilibra com a componente y do peso do corpo em que desce a rampa.

A partir do momento em que a força de atrito excede o seu máximo, o corpo em rolamento começa a deslizar e a força de atrito diminui, passando a ser cinético. Esse mesmo fenômeno ocorre quando uma caixa está em um plano inclinado e só começa a ser mover (deslizar) depois que a força resultante oposta à força de atrito excede o seu máximo.

Logicamente, o corpo redondo começa a descer uma rampa sem que seja necessário que a força de atrito máximo seja ultrapassada porque, no movimento de rolamento, um corpo também possui o movimento de rotação e, portanto, à medida que ele gira, também descreve um movimento retilíneo.

Apesar da importância de se considerar o deslizamento em um movimento de rolamento, vamos nos concentrar, como já foi imposto neste capítulo, em rolamentos suaves, ou seja, aqueles tipos de movimentos em que não há deslizamentos enquanto o corpo rola.

No entanto, antes de prosseguirmos, veja a seguir a **Figura 9.04**, que mostra o gráfico da evolução da força de atrito conforme é aplicada uma força no sentido do movimento do corpo:

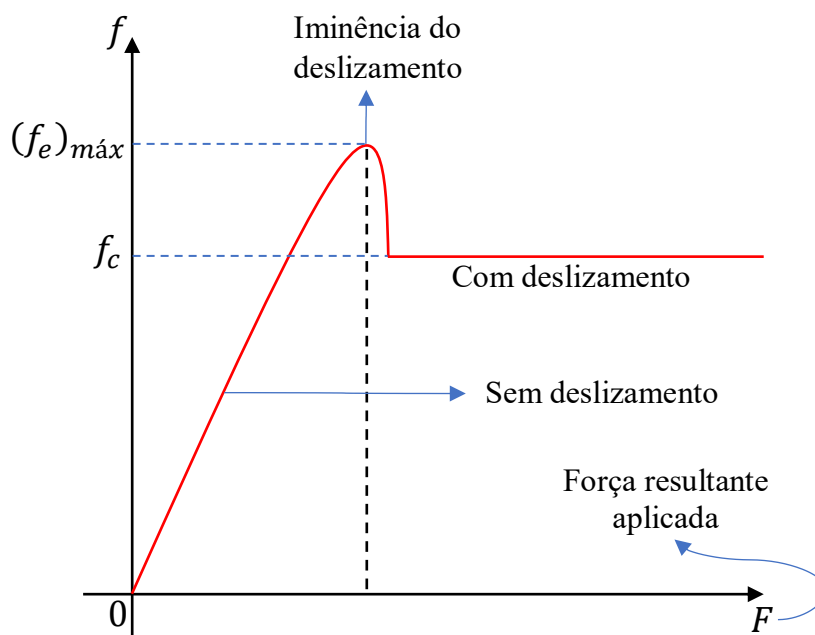


Figura 9.04: Gráfico do desempenho da força de atrito agindo em um corpo.

USANDO O ALGODOO 9.0

A Figura 9.05 e a Figura 9.06 abaixo mostram as principais forças que agem sobre um corpo em movimento de rolamento.

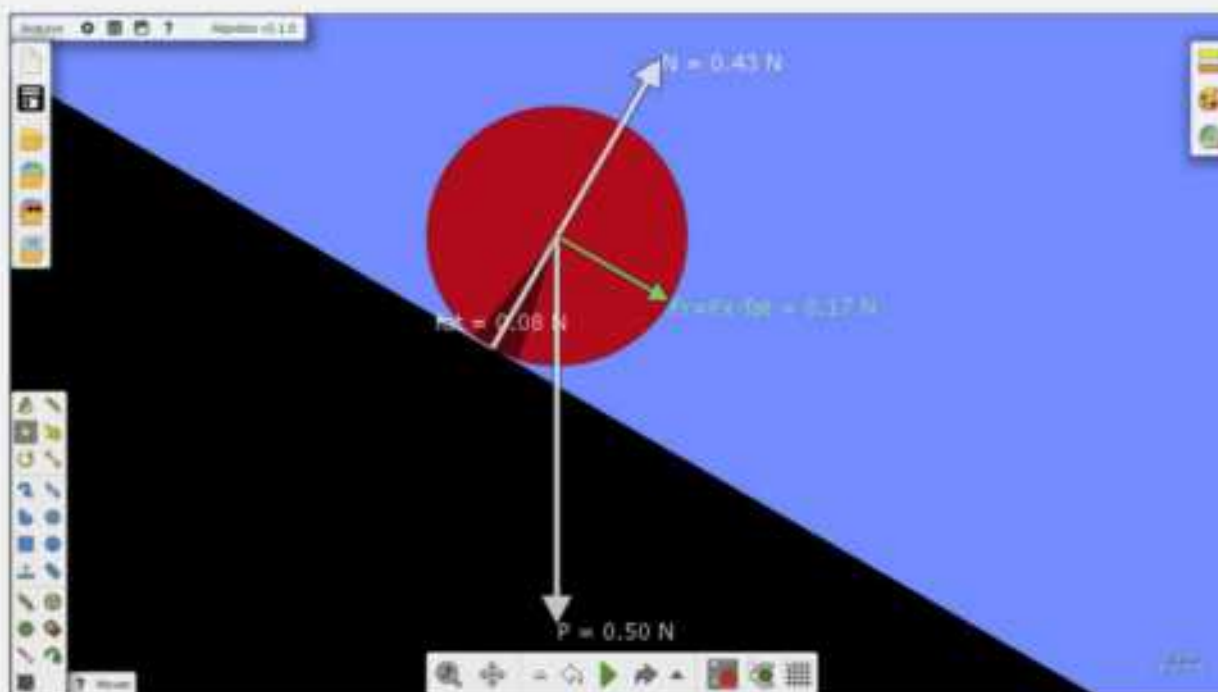


Figura 9.05: Captura de tela do software Algodoo: forças agindo sobre um corpo em movimento de rolamento suave descendo uma rampa. Fonte: os autores.

Simulação disponível em: <http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264604>.

Faça o download do aplicativo Algodoo gratuitamente em <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do software, clique [aqui](#).

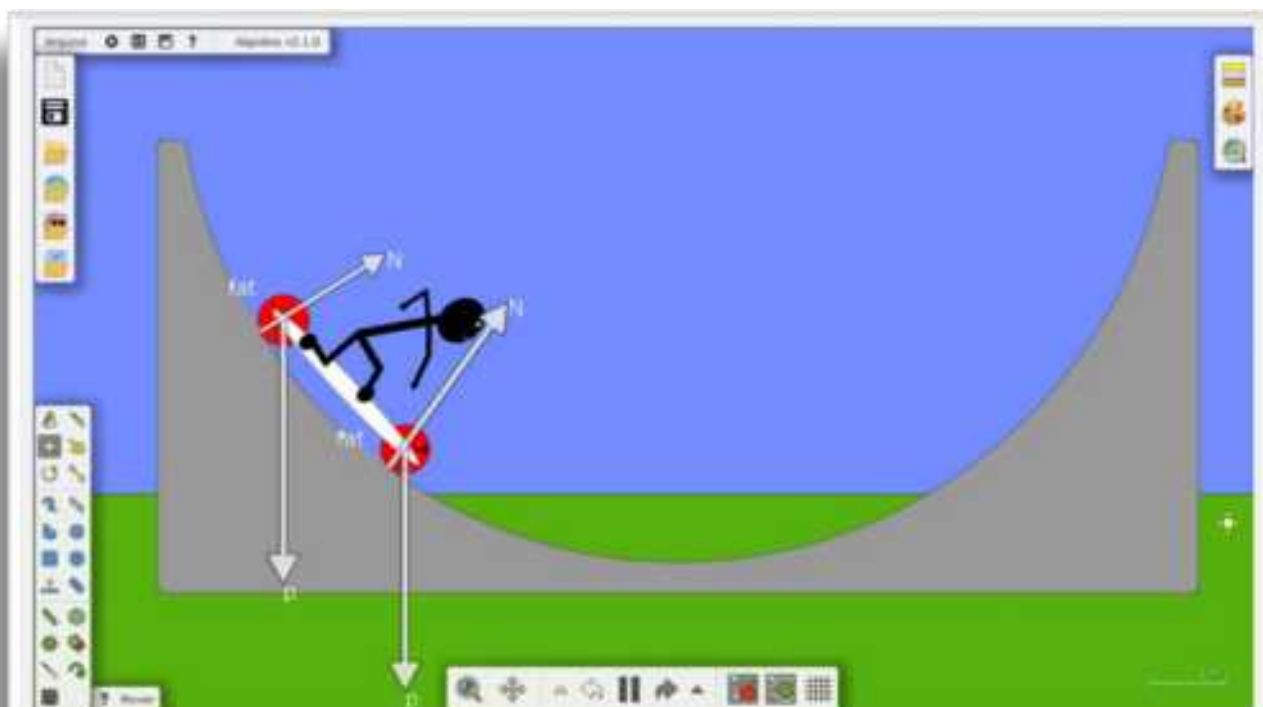


Figura 9.06: Captura de tela do *software Algodoo*: forças agindo sobre as rodas de um *skate* enquanto um *skatista* usa uma rampa apropriada para o movimento.

Fonte: os autores.

Simulação disponível em: <http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264646>.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique [aqui](#).

Clique no link <https://youtu.be/zgOAWZi2Lxc> ou escaneie o *QR code* ao lado para assistir ao vídeo do tutorial da animação.



TAREFA PROPOSTA 9.0

Para esta tarefa, por questões de limitações do *software*, vamos trabalhar nas forças que atuam sobre um corpo em rolamento levando em consideração que a força de atrito estática que faz o corpo girar é máxima, sabendo que, ainda assim, nessa situação, trata-se de um rolamento suave. Essa imposição é para que possamos usar, apesar de não ser nosso foco, a **Equação 9.03**.

Um corpo redondo e homogêneo, de 6 *kg* de massa, está descendo uma rampa, em rolamento suave, que possui inclinação de 30° com a horizontal. O coeficiente de atrito estático da rampa é 0,1925. Considere a aceleração da gravidade igual a 10 *m/s*². Use os dados da **Tabela 9.01** a seguir para calcular, inicialmente, a intensidade da força peso que age sobre o corpo.

$m \text{ (kg)}$	$g \text{ (m/s}^2\text{)}$	$p = mg \text{ (N)}$
6	10	

Tabela 9.01: Dados para cálculo do módulo da força peso que age sobre o corpo em rolamento suave – Tarefa Proposta 9.0.

Com posse do módulo da força peso, calcule a seguir, preenchendo a **Tabela 9.02**, os

valores das suas componentes ortogonais.

$\text{sen}30^\circ$	$\text{cos}30^\circ$	$p_x = p\text{sen}30^\circ \text{ (N)}$	$p_y = p\text{cos}30^\circ \text{ (N)}$
0.5	0,866		

Tabela 9.02: Dados para cálculo do módulo das componentes ortogonais da força peso que age sobre o corpo em rolamento suave – Tarefa Proposta 9.0.

A força de contato normal equilibra a componente y do peso e, portanto, seus módulos são iguais:

$$N = p_y$$

Utilize o valor da força normal para calcular a força de atrito máxima que age sobre o corpo.

μ_e	$N = p_y$	$(f_e)_{\text{máx}} = \mu_e N \text{ (N)}$
0.1925		

Tabela 9.03: Dados para cálculo do módulo da força de atrito estático máximo que age sobre o corpo em rolamento suave – Tarefa Proposta 9.0.

Por fim, com os valores da componente x do peso e da força de atrito estático, calcule a força resultante que age sobre o corpo no sentido do movimento de rolamento, usando a **Tabela 9.04** abaixo:

$p_x \text{ (N)}$	$(f_e)_{\text{máx}} \text{ (N)}$	$F_R = p_x - (f_e)_{\text{máx}} \text{ (N)}$

Tabela 9.04: Dados para cálculo do módulo da força resultante que age sobre o corpo em rolamento suave – Tarefa Proposta 9.0.

O mesmo resultado da **Tabela 9.04** poderia ser obtido de maneira mais simples utilizando a segunda lei de Newton:

$$F_R = ma$$

Em que m é a massa M do corpo em rolamento e a é a sua aceleração, que possui o mesmo sentido de F_R e corresponde a aceleração do seu centro de massa a_{CM} .

Usando a **Equação 9.02** e sabendo que o momento de inércia que passa pelo centro de massa de um corpo redondo e homogêneo é $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$:

$$a_{CM} = \frac{g \sin \theta}{1 + I_{CM}/MR^2}$$

$$a_{CM} = \frac{g \sin 30^\circ}{1 + MR^2/2MR^2}$$

Observe que a aceleração de um objeto redondo e homogêneo, em movimento de rolamento descendo uma rampa, não depende da massa nem do seu raio desse corpo. Logo:

$$a_{CM} = \frac{g \sin 30^\circ}{1 + 0,5}$$

Substituindo os dados:

$$a_{CM} = \frac{10 \cdot 0,5}{1,5}$$

$$a_{CM} = \frac{5}{1,5}$$

$$a_{CM} = 3,33 \text{ m/s}^2$$

Utilize, enfim, segunda lei de Newton com os dados da **Tabela 9.05** abaixo e verifique se o resultado é o mesmo encontrado na **Tabela 9.04**.

$M \text{ (kg)}$	$a_{CM} \text{ (m/s}^2\text{)}$	$F_R = M \cdot a_{CM} \text{ (N)}$
6	3,33	

Tabela 9.05: Dados para cálculo do módulo da força resultante que age sobre o corpo em rolamento suave usando a segunda lei de Newton – Tarefa Proposta 9.0.

Em seguida, clique **AQUI** e confira na simulação do *Algodo* se os resultados conferem.

E aí, acertou?

EXERCÍCIO RESOLVIDO

9.01 – Um corpo redondo e homogêneo está descendo uma rampa, em rolamento suave, que possui inclinação de 60° com a horizontal. Considere a equação do momento de inércia do corpo redondo como sendo $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$ e calcule o módulo da aceleração do seu centro de massa.

Dado: $\text{sen}60^\circ = 0,866$ - $g = 10 \text{ m/s}^2$

Solução: Para calcular a aceleração do centro de massa do corpo redondo, vamos utilizar a **Equação 9.02**:

$$a_{CM} = \frac{g \text{sen}\theta}{1 + I_{CM}/MR^2}$$

Substituindo a equação do momento de inércia do corpo na equação acima:

$$a_{CM} = \frac{g \text{sen}60^\circ}{1 + MR^2/2MR^2}$$

Observe que a questão não fornece o raio do corpo nem a sua massa, pois, para o caso específico, não seria necessário.

$$a_{CM} = \frac{g \text{sen}60^\circ}{1 + 0,5}$$

Substituindo os dados:

$$a_{CM} = \frac{10 \cdot 0,866}{1,5}$$

$$a_{CM} = \frac{8,66}{1,5}$$

$$a_{CM} = 5,77 \text{ m/s}^2$$

Portanto, a intensidade da aceleração do centro de massa do corpo é igual a $5,77 \text{ m/s}^2$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

9.01 – Um corpo redondo e homogêneo está descendo uma rampa, em rolamento suave, que possui inclinação de 45° com a horizontal. Considere a equação do momento de inércia do corpo redondo em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa como sendo $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$, além de $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $\text{sen}45^\circ = 0,71$, e determine a aceleração do centro de massa desse corpo durante a descida.

REVISÃO

As Forças de Rolamento

Neste capítulo, verificamos algumas situações e observamos quais são as forças contidas no movimento de rolagem.

Atrito e Rolamento

Quando uma roda se move aceleradamente, ela está sujeita a uma e a **força de atrito estático** $\vec{f}_e$ no ponto em contato com o solo. A aceleração a qual a roda está submetida é devido a uma força que age sobre a ela para aumentar ou diminuir a sua velocidade. Essa aceleração é chamada de **aceleração do centro de massa** a_{CM} , e tem a mesma direção do movimento. Essa força também produz uma aceleração angular α , fazendo a roda girar mais rápido ou mais lentamente, criando uma tendência de deslizamento no ponto de contato com o solo.

Assim, podemos também relacionar a aceleração do centro de massa de um corpo em movimento de rolamento suave em função da sua aceleração angular por meio da expressão:

$$a_{CM} = \alpha r \quad (m/s^2) \quad (9.01)$$

- a_{CM} – aceleração do centro de massa da roda;
- α – aceleração angular da roda;
- R – raio da roda;

Se houver deslizamento no ponto P , a força de atrito será a **força de atrito cinético** $\vec{f}_c$.

Rolamento e Plano Inclinado

As forças que agem sobre o corpo redondo em rolamento suave em um plano inclinado são:

- A **força peso** $\vec{p}$ (força gravitacional) que atua sobre o corpo e tem sentido para baixo, sendo a origem desse vetor no centro de massa do corpo. Sua componente $\vec{p}_y$ tem mesmo módulo de $\vec{N}$, mas sentidos opostos e, por isso, se equilibram. Sua componente $\vec{p}_x$ tem a mesma direção da aceleração do centro de massa $\vec{a}_{CM}$ e da força de atrito estático $\vec{f}_e$.
- A **força normal** que é ortogonal à superfície de contato com o corpo (rampa) e atua nesse

ponto de contato (C).

- A **força de atrito estático** $\vec{f}_e$ que atua no ponto de contato entre o corpo e a superfície e se opõe à tendência do deslizamento.

O módulo da aceleração do centro de massa de um corpo redondo em movimento suave descendo uma rampa pode ser calculado por:

$$a_{CM} = \frac{g \sin \theta}{1 + I_{CM}/MR^2} \quad (m/s^2) \quad (9.02)$$

- a_{CM} – módulo da aceleração do centro de massa do corpo redondo;
- g – módulo da aceleração da gravidade;
- θ – ângulo formado entre a horizontal e a inclinação da rampa;
- I_{CM} – momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de massa;
- M – massa do corpo;
- R – raio do corpo redondo.

Caso a força de atrito estático fosse máxima ($f_{m\acute{a}x}$), poderíamos usar a seguinte equação:

$$(f_e)_{m\acute{a}x} = \mu_e N \quad (N) \quad (9.03)$$

De modo que depois do deslizamento:

$$f_c = \mu_c N \quad (N) \quad (9.04)$$

- $(f_e)_{m\acute{a}x}$ – força de atrito estático máxima;
- μ_e – coeficiente de atrito estático da superfície;
- N – força de contato normal;
- f_c – força de atrito cinético;
- μ_c – coeficiente de atrito cinético da superfície.

A força de contato normal N depende da superfície de contato. Para planos horizontais, ela se equilibra com a força peso $\vec{p}$. No caso de um plano inclinado, ela se equilibra com a componente y do peso do corpo em que desce a rampa.

CAPÍTULO 10
REVISANDO
O TORQUE

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Analisar o torque em caráter vetorial.
- ✓ Aplicar a regra da mão direita para obtenção da orientação do torque.
- ✓ Usar o software de simulação Física Algodoo como extensão do aprendizado do capítulo.

No **Capítulo 05**, estudamos o **torque**, também chamado de **Momento de uma força**, em um movimento de rotação de um corpo rígido fixo a um eixo de giro, levando em consideração apenas a sua intensidade. Agora, vamos explorar essa grandeza para aplicação sobre uma partícula que descreve uma trajetória qualquer e em relação a um ponto fixo, que pode ou não ser o mesmo do eixo de rotação. Assim, será possível determinar, além da sua intensidade, também a sua direção e seu sentido, pelo fato dessa grandeza ser vetorial. Sua orientação é obtida pela **regra da mão direita**.

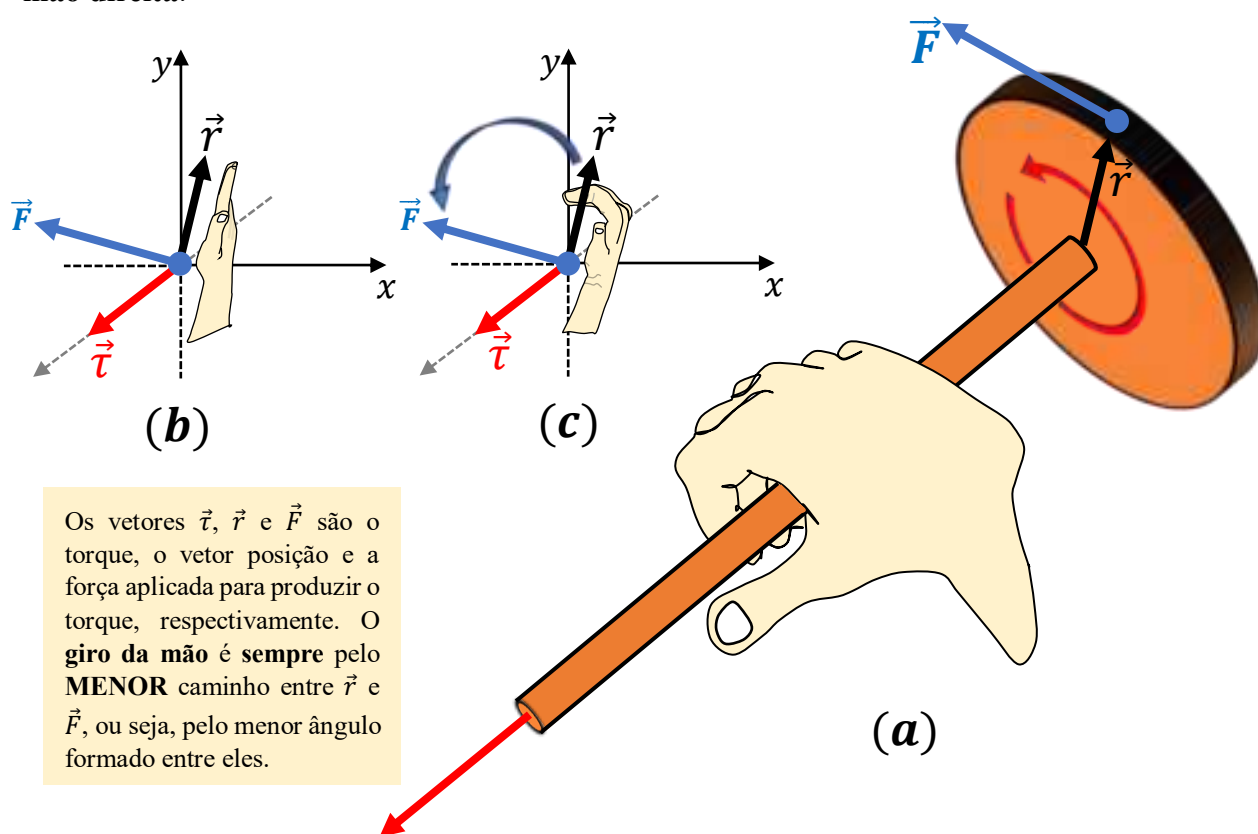


Figura 10.01: Em (a), o a mão envolvendo o eixo de rotação. Em (b), os vetores que envolvem o torque deslocados em relação a uma origem. Em (c), o sentido de giro dos dedos para determinar o sentido do torque.

Observe, na **Figura 10.01(c)**, que os dedos da mão direita se fecham no sentido de giro do corpo, sendo a orientação do torque dado para onde o dedo polegar estiver apontando. Para nosso nível de estudo, vamos considerar apenas corpos planos girando no plano x - y . Nesse caso, o torque sempre será perpendicular ao plano do papel, apontando para dentro ou para fora dele.

Representaremos o sentido do torque da seguinte maneira:

- ⊙ → Para fora do plano do papel;
- ⊗ → Para dentro do plano do papel.

Na **Figura 10.02** a seguir, vamos fazer o passo a passo da regra da mão direita, para uma melhor assimilação, para obter a orientação do torque gerado sobre uma partícula que a faz possuir um movimento de giro em torno de um ponto fixo O no plano x - y .

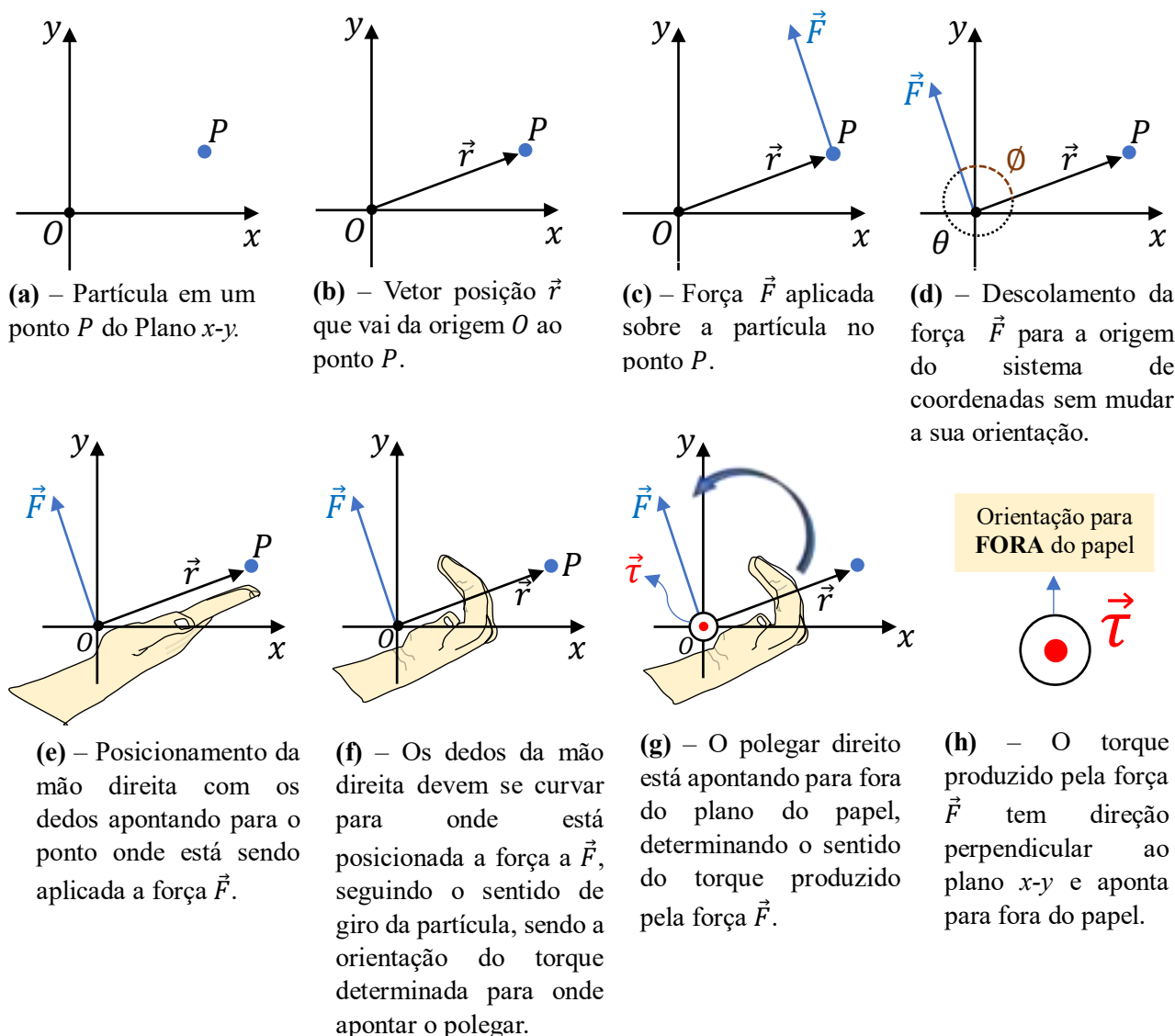


Figura 10.02: Representação do passo a passo de como se obter a orientação do torque $\vec{\tau}$. Em (a), a partícula em um ponto P do plano x - y . Em (b), o vetor posição $\vec{r}$ que vai da origem O ao ponto P . Em (c), a força $\vec{F}$ aplicada sobre a partícula no ponto P . Em (d), o descolamento da força $\vec{F}$ para a origem do sistema de coordenadas sem mudar a sua orientação. Em (e), o posicionamento da mão direita com os dedos apontando para o ponto onde está sendo aplicada a força $\vec{F}$. Em (f), o curvamento dos dedos pelo menor ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$ (sentido de giro). Em (g), a determinação do sentido do torque pela posição do polegar. Em (h), a representação do sentido do torque como sendo para fora do plano do papel.

Observe que a mão direita, nas representações da **Figura 10.02**, está sempre fazendo o movimento de curva dos dedos em volta do ponto fixo O e indo no sentido da força aplicada de acordo com o menor ângulo formado entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$, o menor caminho entre eles. O sentido do torque sempre será para onde o polegar apontar. Para obtenção do seu módulo, já vimos como obtê-lo no **Capítulo 05**, bastando usar, entre outras, a **Equação 5.02**:

$$\tau = Fr \sin \theta$$

Como $r \sin \theta$ é o braço de alavanca $r_{\perp}$, temos que:

$$\tau = Fr_{\perp} = Fr \sin \phi \quad (N \cdot m) \quad (10.01)$$

- τ – módulo do torque;
- F – módulo da força;
- $r_{\perp}$ – braço de alavanca ($r \sin \phi$);
- r – distância entre o ponto fixo e o ponto de aplicação da força;
- ϕ – ângulo formado entre $\vec{F}$ e $\vec{r}$, sendo $\vec{F}$ deslocado para a origem O .

Vamos inverter, agora, o sentido da força $\vec{F}$ aplicada sobre a partícula da **Figura 10.02** e verificar como executar a regra da mão direita para a nova situação.

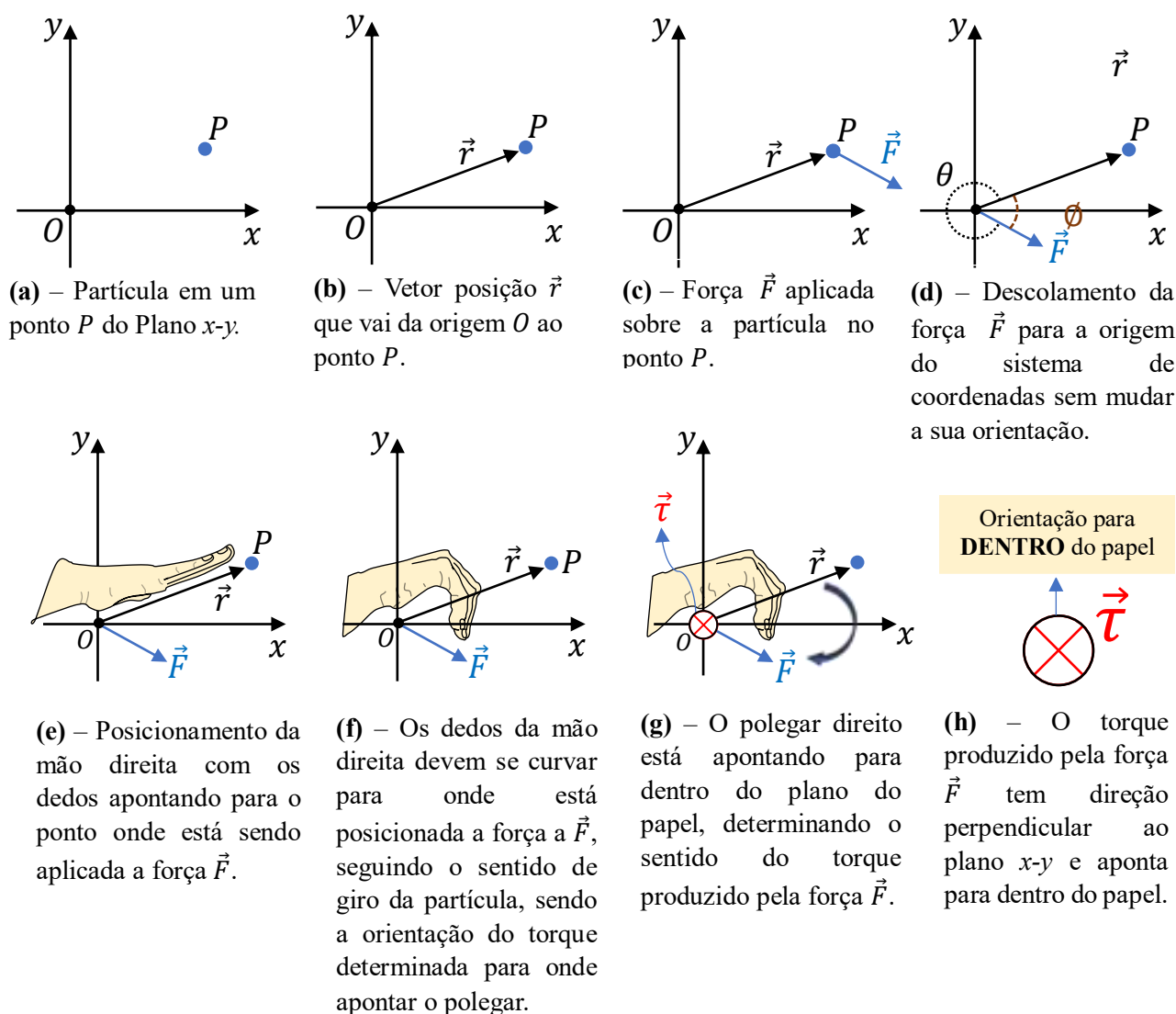


Figura 10.03: Representação do passo a passo de como se obter o sentido do torque $\vec{\tau}$ invertendo o sentido da força $\vec{F}$ da **Figura 10.02**. Em (a), a partícula em um ponto P do Plano x - y . Em (b), o vetor posição $\vec{r}$ que vai da origem O ao ponto P . Em (c), a força $\vec{F}$ aplicada sobre a partícula no ponto P . Em (d), o descolamento da força $\vec{F}$ para a origem do sistema de coordenadas sem mudar a sua orientação. Em (e), o posicionamento da mão direita com os dedos apontando para o ponto onde está sendo aplicada a força $\vec{F}$. Em (f), o curvamento dos dedos pelo menor ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$ (sentido de giro). Em (g), a determinação do sentido do torque pela posição do polegar. Em (h), a representação do sentido do torque como sendo para dentro do plano do papel.

USANDO O *ALGODOO* 10.0

A **Figura 10.04** abaixo mostra a aplicação da regra da mão direita para determinar a orientação do torque $\vec{\tau}$ (para fora da tela do *software*) produzido por uma força $\vec{F}$ que age sobre uma partícula, fazendo-a girar no sentido anti-horário.

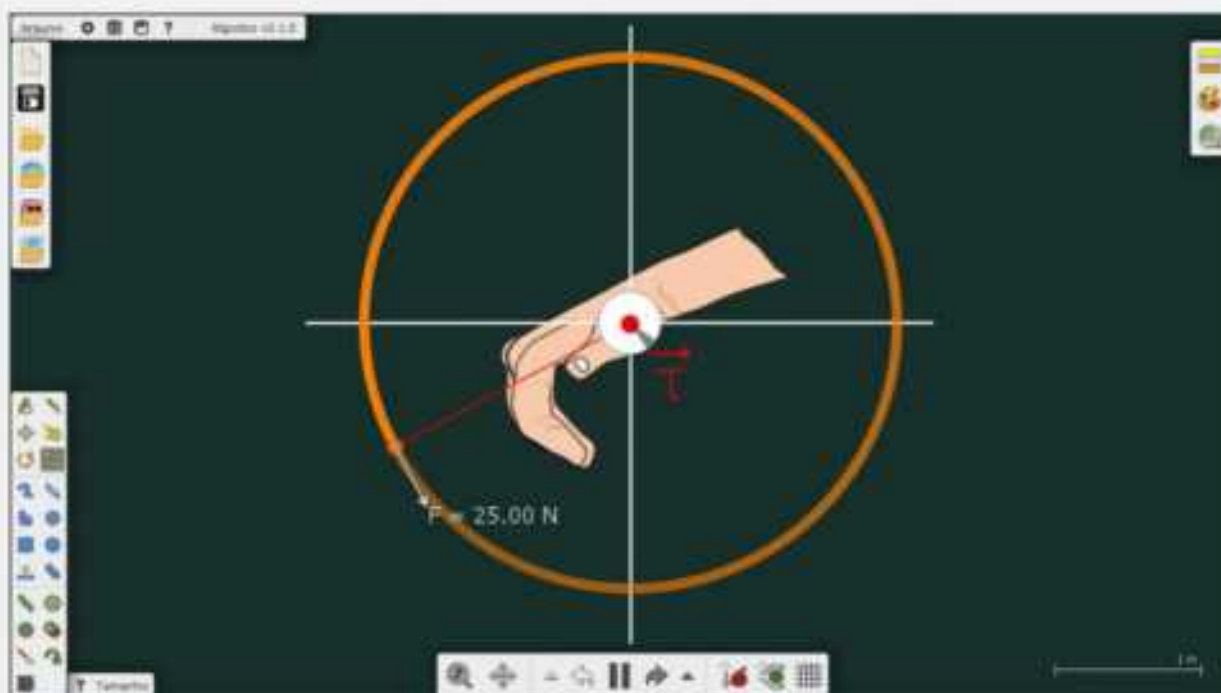


Figura 10.04: Captura de tela do *software Algodoo*: Regra da mão direita para determinar a orientação do torque $\vec{\tau}$ que faz a partícula girar em sentido anti-horário. Fonte: os autores.

Simulação disponível em: <http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=265054>.

Faça o download do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique [aqui](#).

Para um movimento no sentido oposto (horário), a orientação do torque $\vec{\tau}$ (para dentro da tela do *software*) produzido por uma força $\vec{F}$ que age sobre a partícula, está ilustrada na **Figura 10.05** a seguir:

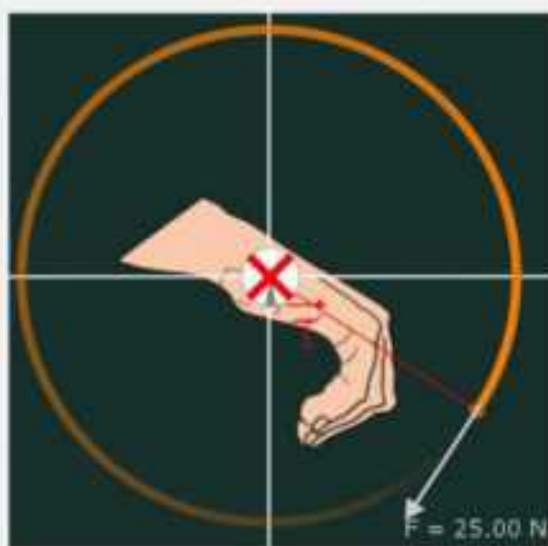


Figura 10.05: Recorte da captura de tela do *software Algodoo*: Regra da mão direita para determinar a orientação do torque $\vec{\tau}$ que faz a partícula girar em sentido horário. Fonte: os autores.

Simulação disponível em: <http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=265055>.

Faça o download do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique [aqui](#).

Clique no link <https://youtu.be/cn--hFijNL0> ou escaneie o QR code ao lado para assistir ao vídeo do tutorial da animação.



TAREFA PROPOSTA 10.0

Uma força $\vec{F}$ é aplicada sobre uma partícula de massa m produzindo um torque $\vec{\tau}$ que a faz girar no sentido **anti-horário**. O raio da trajetória circular que a partícula descreve mede 2 m , e o módulo do torque gerado pela força $\vec{F}$ é de 60 Nm . Sabendo a força aplicada sobre a partícula é tangente à trajetória circular descrita por ela, use a **Tabela 10.01** a seguir para calcular a sua intensidade (módulo da força $\vec{F}$).

$\tau\text{ (Nm)}$	$r\text{ (m)}$	Ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$	$F = \frac{\tau}{r \sin \phi}\text{ (N)}$
60	2	$\phi = 90^\circ$	

Tabela 10.01: Dados para cálculo da intensidade da força $\vec{F}$ da Tarefa Proposta 10.0.

Perceba que a equação da última coluna da **Tabela 10.01** corresponde à **Equação 10.01**.

Agora, use **Tabela 10.02** abaixo para traçar os vetores $\vec{r}$ e $\vec{F}$ e aplicar a regra da mão direita para determinar a orientação do torque $\vec{\tau}$, com base no passo a passo usado na **Figura 10.02** e/ou na **Figura 10.03**:

(a)	(b)	(c)	(d)
(e)	(f)	(g)	(h)

Tabela 10.02: Tabela para fazer o passo a passo da regra da mão direita para obter a orientação do torque da Tarefa Proposta 10.0.

Verifique a sequência de “a” a “h” na **Figura 10.02** e na **Figura 10.03** e repita o procedimento nas mesmas letras da **Tabela 10.02**.

Em seguida, clique **AQUI** para verificar a simulação com os resultados.

E aí, acertou?

EXERCÍCIO RESOLVIDO

10.01 – A **Figura 10.06** ilustra três situações em que uma partícula m , em cada caso, sofre a ação de uma força $\vec{F}$ que a faz girar em torno de um ponto fixo O localizado na origem do plano x - y .

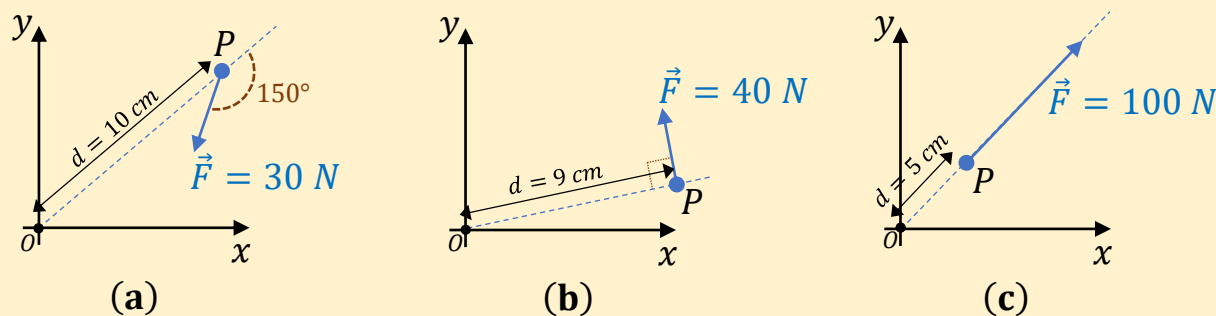
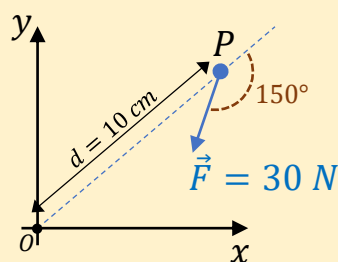


Figura 10.06: Exercício Resolvido 10.01 – Cálculo dos torques produzidos por três forças sobre uma partícula de massa m em três situações distintas. Em (a), a força aplicada forma um ângulo de 150° com a linha que passa pela origem do sistema cartesiano. Em (b), o ângulo formado é de 90° . Em (c), 0° .

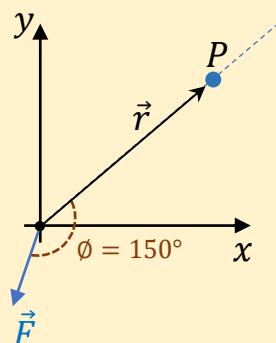
Sabendo que as forças aplicadas atuam apenas no plano x - y , determine o torque nas três situações descritas acima.

Solução: Vamos determinar o torque, em cada caso, identificando, primeiro, a sua orientação. Para isso, vamos aplicar a regra da mão direita e, em seguida, usaremos a **Equação 10.01** para calcular o seu módulo.

Figura 10.06(a)

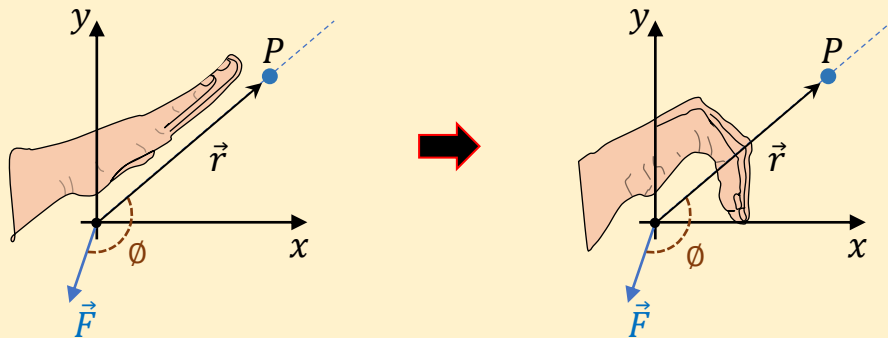


Escrevendo o vetor posição $\vec{r}$ e deslocando o vetor força para a origem do sistema:

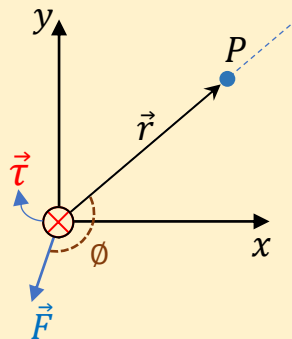


O ângulo de 150° é o menor ângulo entre os vetores $\vec{r}$ e $\vec{F}$ e, portanto, a curvatura dos

dedos da mão de direita se dará nesse sentido:



A orientação do torque na primeira situação é, portanto, perpendicular ao plano x-y e apontando para **dentro** do papel:



Agora, vamos calcular o módulo do torque:

$$\tau = rF\sin\phi$$

Sendo $r = d = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$ - $F = 30 \text{ N}$ - $\sin 150^\circ = 0,5$:

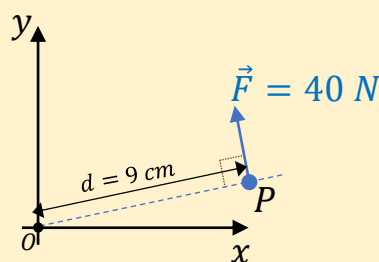
$$\tau = rF\sin 150^\circ$$

$$\tau = 0,1 \cdot 30 \cdot 0,5$$

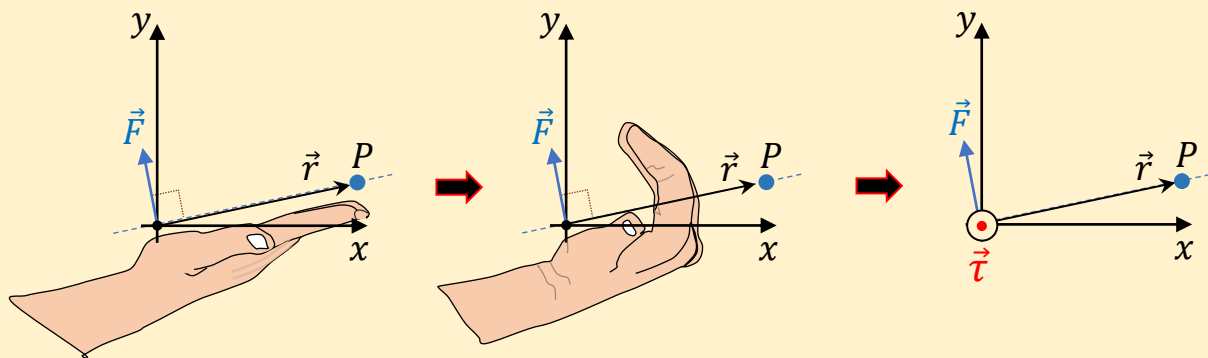
Como a partícula descreve um movimento em sentido horário, o torque é negativo:

$\vec{\tau} = -1,5 \text{ N} \cdot \text{m}$, perpendicular ao plano x-y e apontando para dentro do papel.

Figura 10.06(b)



Para a segunda situação, vamos aplicar as etapas da anterior em sequência:



Assim, a orientação do torque, para a segunda situação, é para **fora** do plano do papel.

Para o módulo, temos que $r = d = 9 \text{ cm} = 0,09 \text{ m}$ - $F = 40 \text{ N}$ - $\text{sen}90^\circ = 1$.
Logo:

$$\tau = rF\text{sen}90^\circ$$

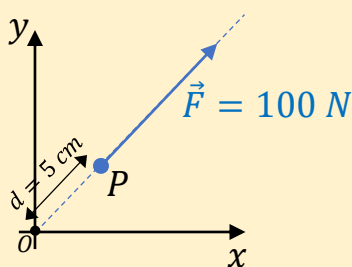
$$\tau = 0,09 \cdot 40 \cdot 1$$

Como a partícula descreve um movimento em sentido anti-horário, o torque é positivo:

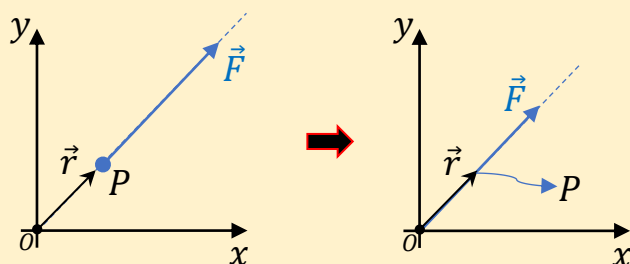
$$\vec{\tau} = 3,6 \text{ N.m, perpendicular ao plano } x\text{-}y \text{ e apontando para fora do papel.}$$

Observe que para $\varnothing = 90^\circ$, a distância entre a origem e o ponto P representa o próprio braço de alavanca, tendo em vista que o $\text{sen}90^\circ = 1$.

Figura 10.06(c)



Para a terceira situação, se esboçarmos o vetor posição entre a origem e o ponto P , o ângulo formado entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$ será 0° e $\text{sen}0^\circ = 0$, o que nos faz concluir que, para existir rotação, a força aplicada sobre a partícula, em relação ao vetor posição, precisa ter um ângulo não nulo.



Assim,

$$\tau = rF\text{sen}0^\circ$$

$$\tau = 0,05 \cdot 100 \cdot 0$$

$$\vec{\tau} = \vec{0}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

10.01 – A Figura 10.07 a seguir ilustra três situações em que uma partícula m , em cada caso, sofre a ação de uma força $\vec{F}$ que a faz girar em torno de um ponto fixo O localizado na origem do plano x - y .

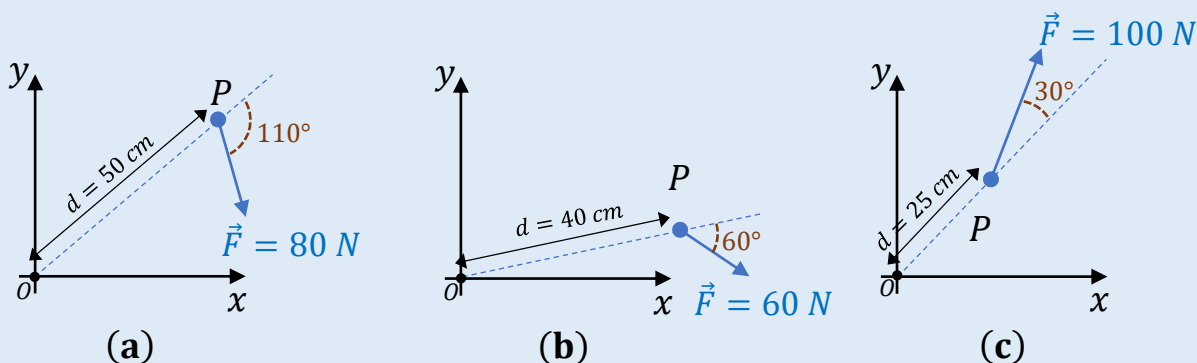


Figura 10.07: Exercício Proposto 10.01 – Cálculo dos torques produzidos por três forças sobre uma partícula de massa m em três situações distintas. Em (a), a força aplicada forma um ângulo de 110° com a linha que passa pela origem do sistema cartesiano. Em (b), o ângulo formado é de 60° . Em (c), 30° .

Sabendo que as forças aplicadas agem apenas no plano x - y , determine o torque nas três situações descritas acima.

Dado: $\text{sen}110^\circ = 0,94$; $\text{sen}60^\circ = 0,866$ e $\text{sen}30^\circ = 0,5$.

Saiba mais...

Para obtermos a orientação do torque, podemos usar a regra da mão direita para produtos vetoriais:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Sendo o módulo do torque dado por:

Módulo do primeiro vetor

x

Módulo do segundo vetor

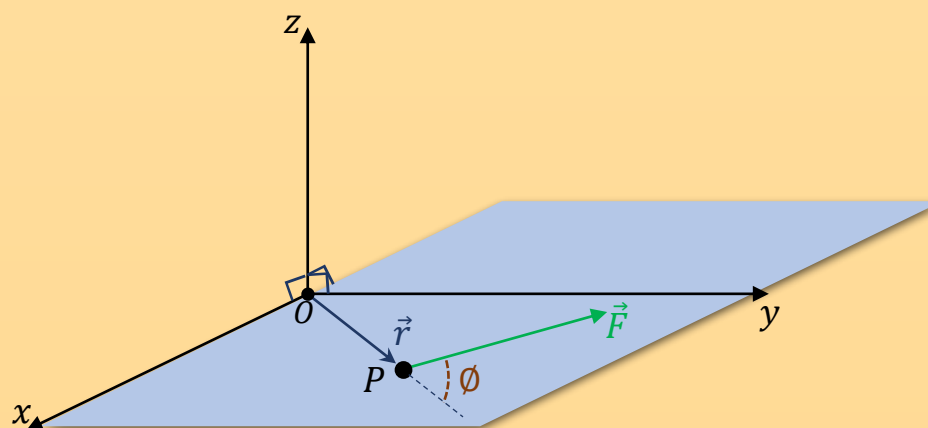
x

Seno do ângulo formado entre os dois vetores

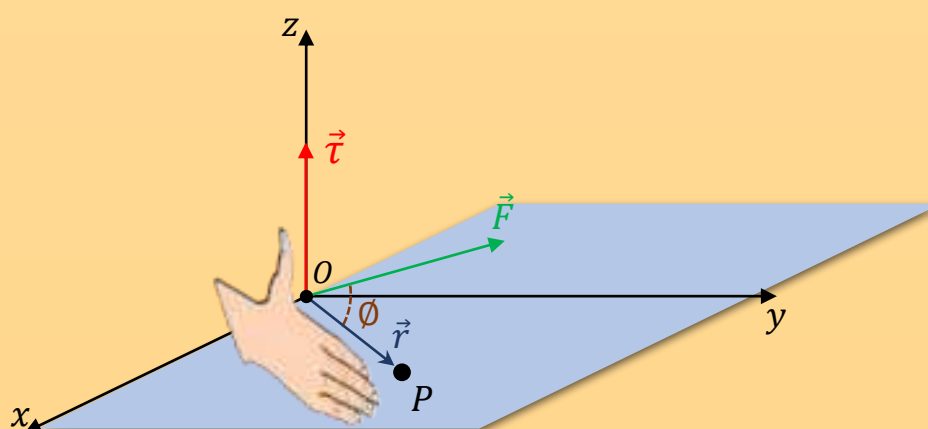
Assim:

$$\tau = rF\text{sen}\phi$$

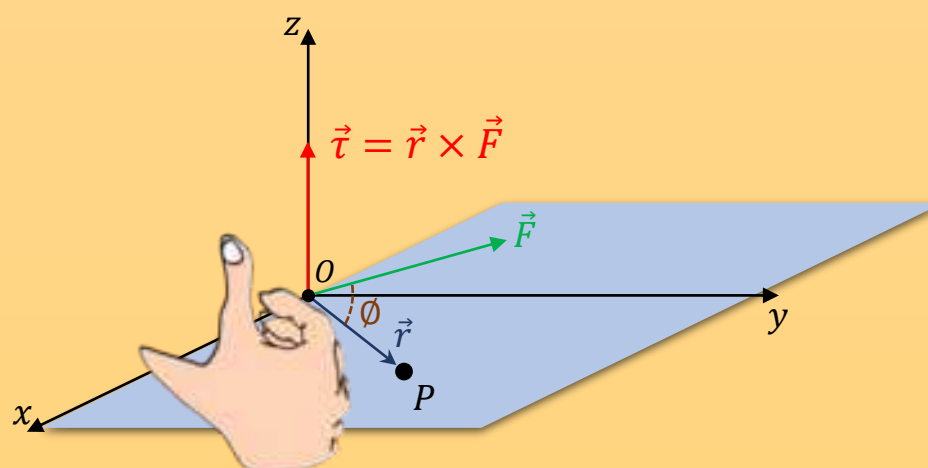
Vamos usar a Figura 10.08 a seguir para verificar como obter a orientação do torque usando a regra da mão direita para produtos vetoriais:



(a)



(b)



(c)

Figura 10.08: Regra da mão direita para produtos vetoriais. Em (a), os vetores posição $\vec{r}$ e força $\vec{F}$ no plano x - y relacionados à partícula no ponto P . Em (b), o deslocamento da força para a origem O do sistema e o posicionamento da mão direita para definir a orientação do torque. Em (c), o curvamento dos dedos da mão para o menor ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$, determinando o sentido do torque pelo posicionamento do polegar.

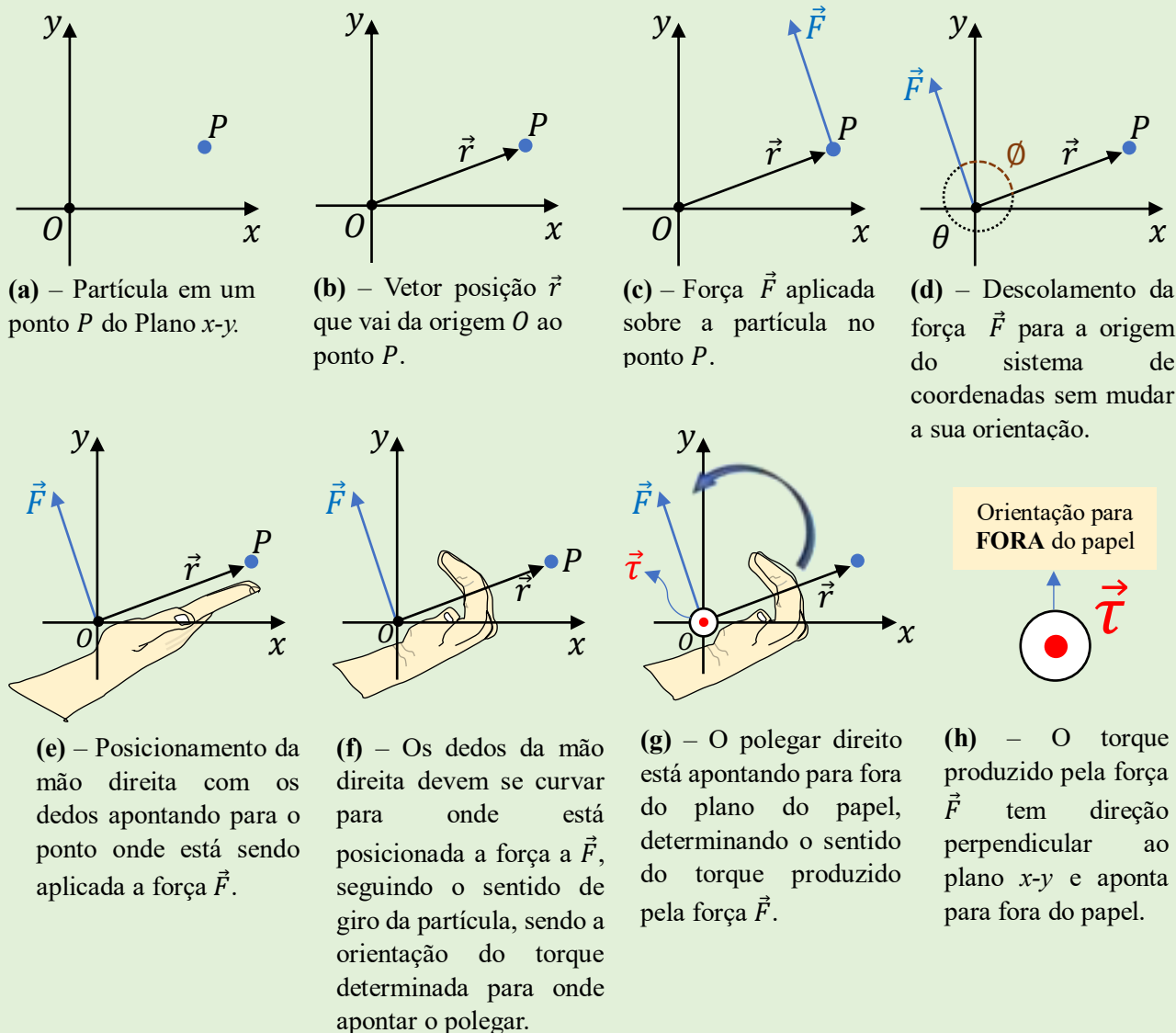
Conforme a **Figura 10.08**, para se obter o sentido do torque, devemos deslocar a força $\vec{F}$ para a

origem do sistema (ponto O), sem mudar a sua orientação, de modo que as origens dos dois vetores envolvidos no produto vetorial sejam as mesmas. Em seguida, usaremos a regra da mão direita para produtos vetoriais, posicionando os dedos no sentido do primeiro vetor do produto, ou seja, o vetor posição $\vec{r}$ e depois curvando as pontas dos dedos para o segundo vetor (a força $\vec{F}$), sendo que essa curvatura deverá ser no sentido do menor caminho entre os dois vetores, ou seja, para o menor ângulo entre os dois. O sentido do torque será determinado para onde o polegar direito estiver esticado. Na **Figura 10.08(c)**, por exemplo, está apontando para o sentido positivo do eixo z .

REVISÃO

Revisando o Torque

O torque $\vec{\tau}$ é uma grandeza vetorial e sua orientação pode ser obtida pela **regra da mão direita**.



De modo que seu módulo pode ser calculado por meio da seguinte equação:

$$\tau = Fr_{\perp} = Fr \sin \theta \quad (N \cdot m) \quad (10.01)$$

- τ – módulo do torque;
- F – módulo da força;
- $r_{\perp}$ – braço de alavanca ($r \sin \theta$);

➤ r – distância entre o ponto fixo e o ponto de aplicação da força;

➤ $\emptyset$ – ângulo formado entre $\vec{F}$ e $\vec{r}$, sendo $\vec{F}$ deslocado para a origem O .

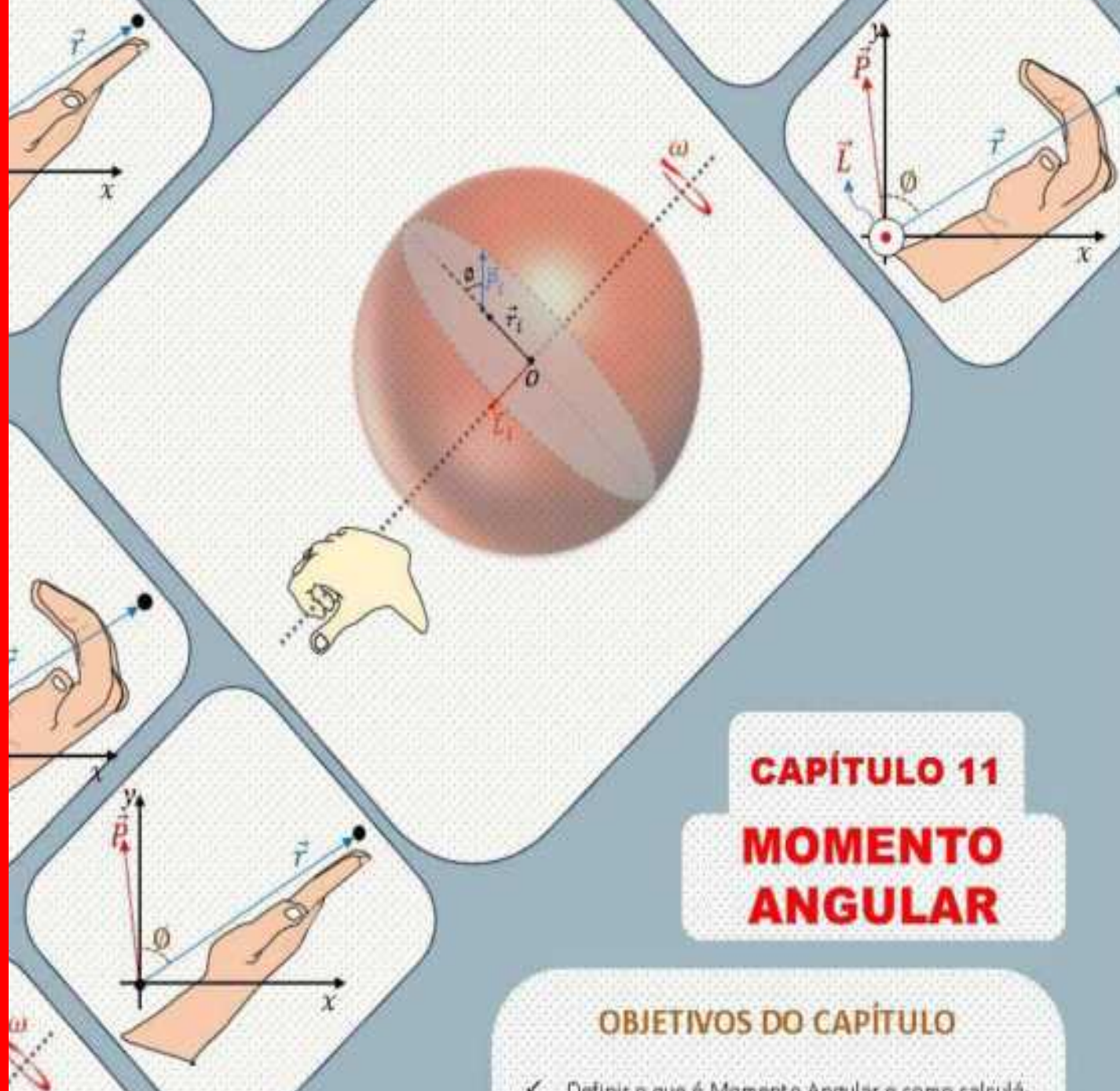
Lembrando que as representações para as orientações dos torques perpendiculares ao plano papel são:

⊙ → Para fora do plano do papel;

⊗ → Para dentro do plano do papel.

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$L = rmv\sin\theta$$



CAPÍTULO 11

MOMENTO ANGULAR

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Definir o que é Momento Angular e como calculá-lo, usando, também, a regra da mão direita para obter a sua orientação.
- ✓ Relacionar a variação do momento angular com o torque externo resultante.
- ✓ Calcular o momento angular para um sistema de partículas e para um corpo rígido.
- ✓ Usar o software de simulação Física Algodoo como extensão do aprendizado do capítulo.

Todo corpo em movimento possui uma certa **quantidade de movimento**. No movimento de translação, essa quantidade de movimento é chamada de **momento linear** $\vec{P}$, ou, simplesmente, $\vec{Q}$ (quantidade de movimento).

Já para os movimentos rotacionais, essa quantidade de movimento é chamada de **Momento Angular** $\vec{L}$ e é uma das principais grandezas da cinemática rotacional, pois mede a quantidade de movimento de um corpo em rotação em relação a um ponto fixo, que pode ou não ser o mesmo do eixo de rotação. O momento angular é, portanto, uma grandeza vetorial e o equivalente angular do momento linear.

A **Figura 11.01** a seguir mostra como se obter a orientação de $\vec{L}$ de uma partícula de massa m e momento linear $\vec{P}$ que está passando por um ponto A de um plano x - y .

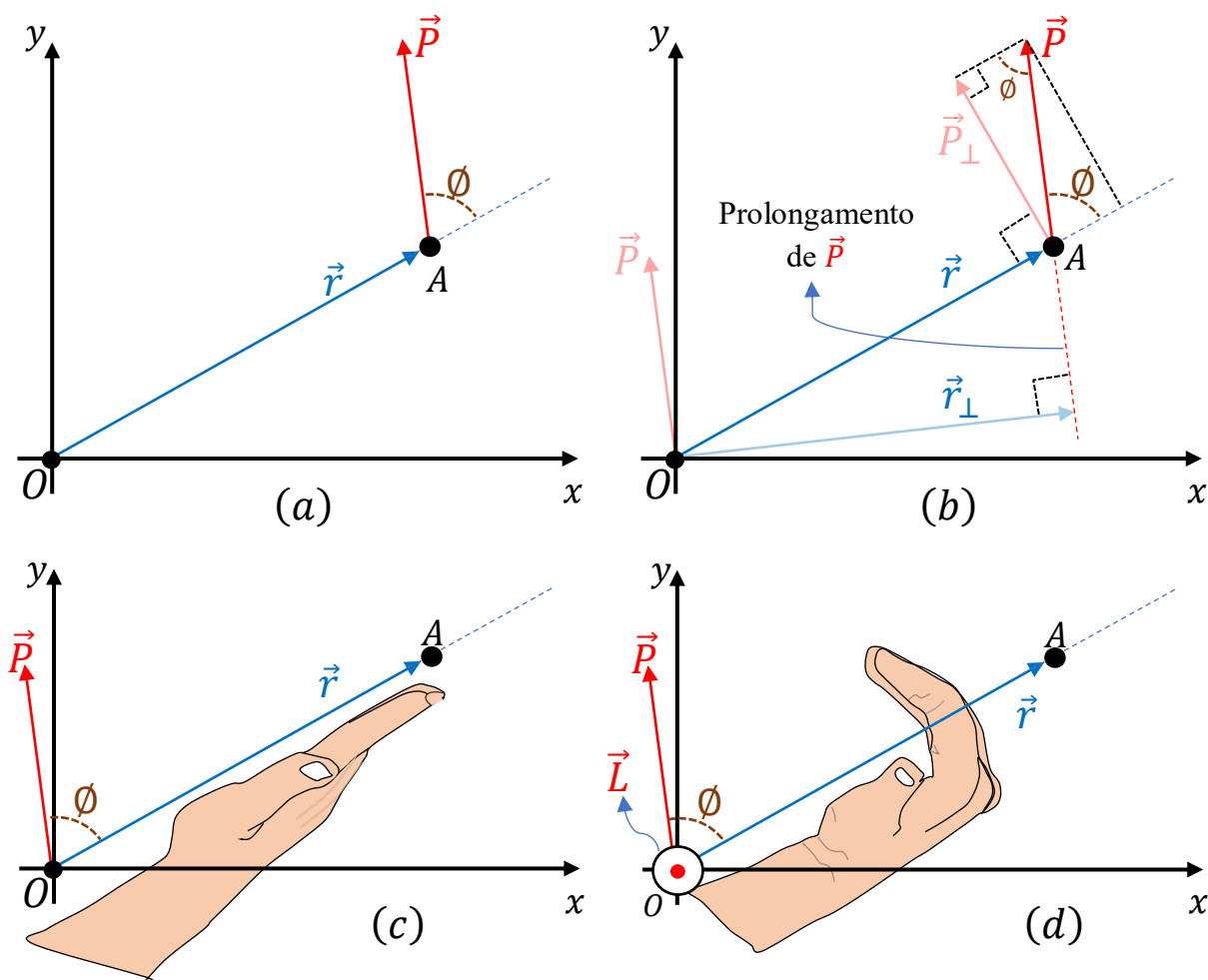


Figura 11.01: Regra da mão direita para se obter a orientação do momento angular $\vec{L}$. Em (a), os vetores posição $\vec{r}$ e o momento linear $\vec{P}$ no plano x - y relacionados à partícula de massa m no ponto A . Em (b), o deslocamento do momento linear para a origem O do plano. Em (c), o posicionamento da mão direita para aplicação da regra. Em (d), o curvamento dos dedos da mão para o menor ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{P}$, determinando o sentido de $\vec{L}$ pelo posicionamento do polegar.

De acordo com a **Figura 11.01**, observamos a grande semelhança entre o momento angular e o torque no que se diz respeito à aplicação da regra da mão direita para se obter as suas orientações. A única diferença é que, para o momento angular, usamos o momento linear no lugar da força usada no torque. De resto, a aplicação é a mesma.

Assim, basta posicionar a mão direita no mesmo plano que se encontra o vetor posição $\vec{r}$ e o momento linear $\vec{P}$ da partícula e curvar os dedos para o menor caminho entre eles, ou seja, o menor ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{P}$; e o sentido do momento angular se dará para onde apontar o polegar estirado. Na **Figura 11.01(b)**, por exemplo, a orientação do momento angular é para fora do papel, a qual é perpendicular ao plano x - y .

Já na **Figura 11.01(b)**, também podemos observar a componente $r_{\perp}$ (distância perpendicular entre a origem e o prolongamento de $\vec{P}$) do vetor posição $\vec{r}$, além da componente tangencial do momento linear $P_{\perp}$. Da mesma forma do torque, podemos escrever o módulo do momento angular da seguinte forma:

$$L = P \cdot r \cdot \sin\emptyset$$

sendo $\emptyset$ o menor ângulo formado entre $\vec{r}$ e $\vec{P}$.

O módulo do momento linear pode ser escrito como $P = mv$, sendo m e v a massa e o módulo da velocidade linear da partícula em certo instante. Logo:

$$L = rmv\sin\emptyset \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (11.01)$$

Como $r_{\perp} = r\sin\emptyset$, assim como $P_{\perp} = P\sin\emptyset$, também podemos escrever o módulo do momento angular das seguintes formas:

$$L = r_{\perp}mv \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (11.02)$$

$$L = rP_{\perp} \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (11.03)$$

- L – intensidade do momento angular;
- r – módulo do vetor posição da partícula em relação à origem;
- m – massa da partícula;
- v – módulo da velocidade linear da partícula;
- $\emptyset$ – menor ângulo formado entre $\vec{r}$ e $\vec{P}$ ou $\vec{r}$ e $\vec{v}$ quando possuem uma origem em comum;
- $r_{\perp}$ – distância perpendicular entre a origem e o prolongamento de $\vec{P}$ ($r\sin\emptyset$);
- $P_{\perp}$ – módulo da componente de $\vec{P}$ que é perpendicular a $\vec{r}$ ($P\sin\emptyset$).

IMPORTANTE

O momento angular apenas tem sentido em relação a um ponto dado, o qual sua orientação é sempre perpendicular ao plano formado pelos vetores posição e momento linear, $\vec{r}$ e $\vec{P}$, ou seja, ao plano da órbita de um corpo.

11.1 – Momento Angular e a Segunda Lei de Newton

Pela segunda lei de Newton:

$$F_R = ma$$

Sendo $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, temos que:

$$F_R = m \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$F_R = m \frac{(v - v_0)}{\Delta t}$$

$$F_R = \frac{(mv - mv_0)}{\Delta t}$$

Como a intensidade do momento linear é dado por $P = mv$:

$$F_R = \frac{(P - P_0)}{\Delta t}$$

$$F_R = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

De acordo com a **Equação 10.01**, a intensidade do torque gerado apenas por uma força é dada por $\tau = Fr \sin \theta$.

Para um conjunto de forças, temos o módulo do torque resultante τ_R associado à intensidade de uma força resultante F_R :

$$\tau_R = F_R r \sin \theta$$

Mas $F_R = \frac{\Delta P}{\Delta t}$. Logo:

$$\tau_R = \frac{\Delta P}{\Delta t} r \sin \theta$$

Como $\Delta P = P - P_0$ e $P = mv$:

$$\tau_R = \frac{(P - P_0)}{\Delta t} r \sin \phi$$

$$\tau_R = \frac{(mv - mv_0)}{\Delta t} r \sin \phi$$

$$\tau_R = \frac{(rmv \sin \phi - rmv_0 \sin \phi)}{\Delta t}$$

O termo $rmv \sin \phi$ é, de acordo com a **Equação 11.01**, a intensidade do momento angular de uma partícula em relação a um ponto fixo. Assim:

$$\tau_R = \frac{(L - L_0)}{\Delta t}$$

$$\tau_R = \frac{\Delta L}{\Delta t} \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (11.04)$$

- τ_R – módulo do torque resultante;
- ΔL – variação do módulo do momento angular;
- Δt – variação do tempo.

A **Equação 11.04** representa, em módulo, o torque resultante da soma dos torques que agem sobre uma partícula como sendo a variação do momento angular da partícula em relação ao tempo. Como o torque é uma grandeza vetorial, o torque resultante também pode ser escrito da seguinte forma:

$$\vec{\tau}_R = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (11.05)$$

- $\vec{\tau}_R$ – torque resultante;
- $\Delta \vec{L}$ – variação do momento angular;
- Δt – variação do tempo.

De acordo com a **Equação 11.05**, observamos que quanto maior for o torque resultante, mais rápido será a variação do momento angular. Observe também que a relação entre torque resultante e a variação do momento angular ($\vec{\tau}_R = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$) é exatamente análoga à de força resultante e momento linear $\vec{F}_R = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$, pois, como já sabemos, toda grandeza angular possui sua correspondente linear, assim como o torque $\vec{\tau}$ é a correspondente angular da força $\vec{F}$, o momento

angular $\vec{L}$ é a do momento linear $\vec{P}$.

A **Equação 11.05** é essencial na mecânica, pois é uma forma de expressar a segunda lei de Newton para movimentos rotacionais. Isso significa que, para alterar o momento angular, um torque deve atuar durante um certo intervalo de tempo.

Assim, temos que a variação do momento angular acontece no mesmo sentido do torque resultante e essa relação só faz sentido se eles forem definidos em relação ao mesmo ponto, que, em geral, é a origem do sistema de coordenadas escolhido.

11.2 – Momento Angular de um Sistema de Partículas

Para um sistema de partículas, o seu momento angular total $\vec{L}_T$ é a soma vetorial dos momentos angulares de todas as partículas que compõe esse sistema em relação a uma origem O , ou seja, em relação a um mesmo ponto:

$$\vec{L}_T = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \dots + \vec{L}_n \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (11.06)$$

- $\vec{L}_T$ – momento angular total do sistema;
- $\vec{L}_1$ – momento angular da partícula 1;
- $\vec{L}_2$ – momento angular da partícula 2;
- $\vec{L}_3$ – momento angular da partícula 3;
- $\vec{L}_n$ – momento angular da n -ésima partícula.

Os momentos angulares das partículas podem variar por causa de forças externas ou até mesmo pelas interações entre elas. Assim, podemos escrever a variação do momento angular do sistema como a soma das variações dos momentos angulares de cada partícula que o compõe:

$$\Delta\vec{L}_T = \Delta\vec{L}_1 + \Delta\vec{L}_2 + \Delta\vec{L}_3 + \dots + \Delta\vec{L}_n \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (11.07)$$

- $\Delta\vec{L}_T$ – variação do momento angular total do sistema;
- $\Delta\vec{L}_1$ – variação do momento angular da partícula 1;
- $\Delta\vec{L}_2$ – variação do momento angular da partícula 2;
- $\Delta\vec{L}_3$ – variação do momento angular da partícula 3;
- $\Delta\vec{L}_n$ – variação do momento angular da n -ésima partícula.

Observe que, na **Equação 11.05**, $\Delta \vec{L}_T$ é o produto torque resultante do sistema de partículas $\vec{\tau}_R$ pelo tempo Δt (**Equação 2.13**). Assim, podemos concluir que a soma vetorial dos torques que estão submetidas as partículas do sistema é equivalente à soma das variações dos momentos angulares de todas as partículas que o compõe multiplicado pelo tempo.

IMPORTANTE

Como as forças exercidas pelas partículas do sistema sempre aparecem como pares de forças da terceira lei de Newton, o torque resultante produzido por essas forças é nulo. Assim, os torques não nulos que faz o momento angular do sistema variar são produzidos por **forças externas**.

11.3 – Momento Angular de um Corpo Rígido

Considere um corpo rígido (esfera homogênea), que gira com velocidade angular constante, em torno de um eixo fixo, conforme mostra a **Figura 11.02** a seguir:

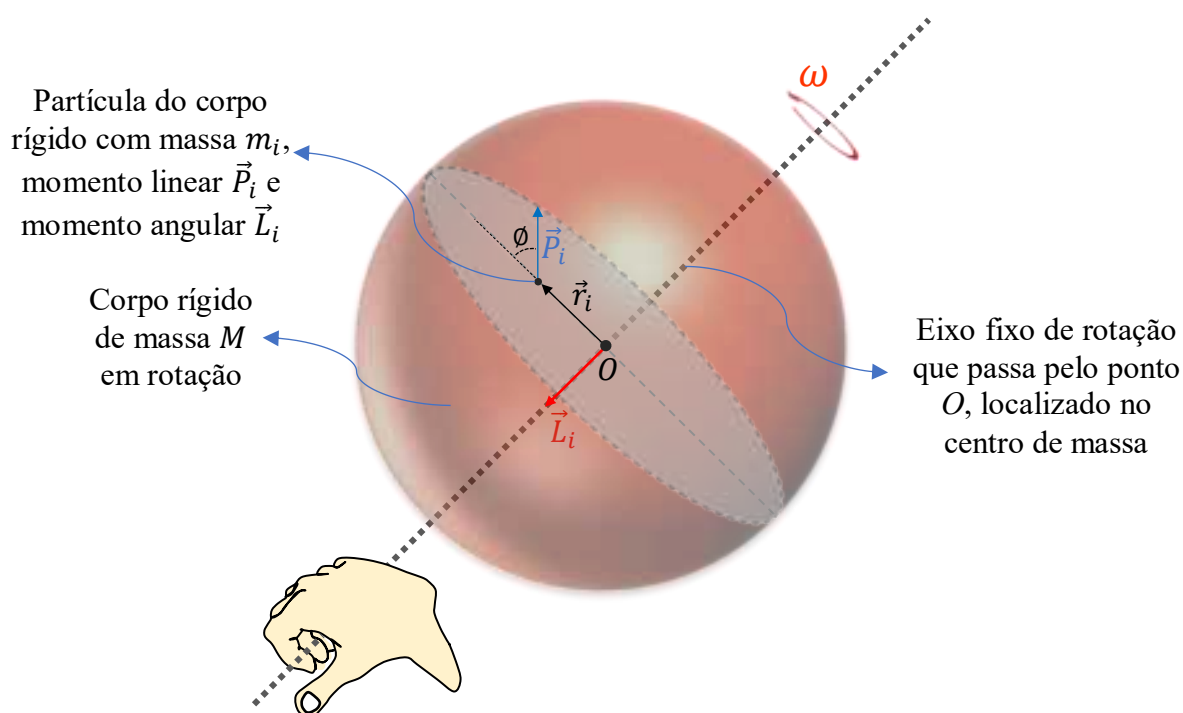


Figura 11.02: Esfera homogênea girando em torno de um eixo fixo que passa pelo seu centro de massa, localizado no ponto O . A mão direita, localizada na parte inferior do eixo de rotação, indica o sentido do momento angular de uma partícula de massa m_i e momento angular $\vec{P}_i$ da esfera.

A **Figura 11.02** mostra o momento angular de uma partícula de massa m_i , momento linear $\vec{P}_i$ e momento angular $\vec{L}_i$; que compõe um corpo rígido de massa M (esfera homogênea) em rotação constante (velocidade angular ω constante). Observe que a orientação do momento angular da partícula se dá ao longo do eixo de rotação do corpo rígido de acordo com a regra da

mão direita. Para se obter o momento angular total do corpo rígido basta somar todos os momentos angulares de todas as partículas que o compõe em relação ao mesmo ponto que passa pelo eixo de rotação desse corpo. Assim, de acordo com a **Equação 11.06**, podemos calcular o momento angular de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo da seguinte forma:

$$\vec{L}_T = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \dots + \vec{L}_n$$

sendo $\vec{L}_T$ o momento angular do corpo rígido como o somatório dos momentos angulares de todas as partículas que o compõe em relação a um ponto O .

Como os momentos angulares de todas as partículas do corpo rígido, em relação ao mesmo ponto, possuem a mesma orientação, podemos calcular o módulo do momento angular do corpo somando os módulos dos momentos angulares das partículas:

$$L_T = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n$$

Considerando as partículas idênticas (mesma massa) e, de acordo com a **Equação 11.01**, o módulo do momento angular de uma partícula ($L = rmv\sin\phi$), podemos escrever:

$$L_T = r_1mv_1\sin\phi_1 + r_2mv_2\sin\phi_2 + r_3mv_3\sin\phi_3 + \dots + r_nmv_n\sin\phi_n$$

Como $v = \omega R$:

$$L_T = R_1m\omega_1r_1\sin\phi_1 + R_2m\omega_2r_2\sin\phi_2 + R_3m\omega_3r_3\sin\phi_3 + R_nm\omega_nr_n\sin\phi_n$$

Importante observar que o raio da trajetória cada partícula é a distância perpendicular entre a partícula e o eixo de rotação. Logo, $R = r\sin\phi$:

$$L_T = r_1\sin\phi_1m\omega_1r_1\sin\phi_1 + r_2\sin\phi_2m\omega_2r_2\sin\phi_2 + r_3\sin\phi_3m\omega_3r_3\sin\phi_3 + \dots + r_n\sin\phi_nm\omega_nr_n\sin\phi_n$$

O termo $r\sin\phi$ corresponde a $r_{\perp}$, que é a distância perpendicular entre a origem O e o prolongamento de $\vec{P}$. Substituindo:

$$L_T = r_{\perp 1}m\omega_1r_{\perp 1} + r_{\perp 2}m\omega_2r_{\perp 2} + r_{\perp 3}m\omega_3r_{\perp 3} + \dots + r_{\perp n}m\omega_nr_{\perp n}$$

$$L_T = m\omega_1r_{\perp 1}^2 + m\omega_2r_{\perp 2}^2 + m\omega_3r_{\perp 3}^2 + \dots + m\omega_nr_{\perp n}^2$$

No movimento de rotação de um corpo rígido, todas as partículas que o compõe possuem a mesma velocidade angular ω . No caso específico da **Figura 11.02**, inclusive, essa velocidade angular é constante. Logo, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_n = \omega$:

$$L_T = m\omega r_{\perp 1}^2 + m\omega r_{\perp 2}^2 + m\omega r_{\perp 3}^2 + \dots + m\omega r_{\perp n}^2$$

Colocando a velocidade angular ω em evidência:

$$L_T = (mr_{\perp 1}^2 + mr_{\perp 2}^2 + mr_{\perp 3}^2 + \dots + mr_{\perp n}^2)\omega$$

O fator $mr_{\perp}^2$ é o momento de inércia da partícula em relação ao eixo de rotação. Assim, podemos reescrever:

$$L_T = (I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n)\omega$$

Os termos entre parênteses acima representam a soma dos momentos de inércia de todas as partículas que compõe um corpo rígido, sendo essa soma o momento de inércia total do próprio corpo. Assim:

$$L_T = I_T\omega$$

Portanto, para calcular a intensidade do momento angular $\vec{L}$ de um corpo rígido, que possui momento de inércia I e velocidade angular $\vec{\omega}$ em relação a um eixo fixo de rotação; podemos usar a **Equação 11.08** a seguir:

$$L = I\omega \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (11.08)$$

De modo que, vetorialmente, será:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (11.09)$$

- L – módulo do momento angular do corpo rígido em relação ao seu eixo de rotação;
- $\vec{L}$ – momento angular do corpo rígido em relação ao seu eixo de rotação;
- I – momento de inércia do corpo rígido em relação ao seu eixo de rotação;
- ω – módulo da velocidade angular do corpo rígido;
- $\vec{\omega}$ – velocidade angular do corpo rígido.

É importante observar que o momento angular $\vec{L}$ e o momento linear I são obtidos a partir do mesmo eixo de rotação.

De acordo com a **Equação 11.08**, podemos observar que, de fato, o momento de inércia I depende da massa do corpo e de como ela se distribui em relação ao eixo de rotação. Ele mede a resistência que o corpo afere à rotação. Concluimos, assim, que, para um mesmo momento angular L , quanto maior o momento de inércia I de um corpo, menor será a sua velocidade angular ω : $L = \uparrow I \omega \downarrow$.

USANDO O *ALGODOO* 11.0

A **Figura 11.03** e a **Figura 11.04** a seguir mostram duas simulações do *Algodo* em que um mesmo corpo rígido (esfera homogênea) está girando em relação ao seu eixo fixo de rotação. Nelas, podemos observar as orientações dos seus momentos angulares, além dos seus módulos.

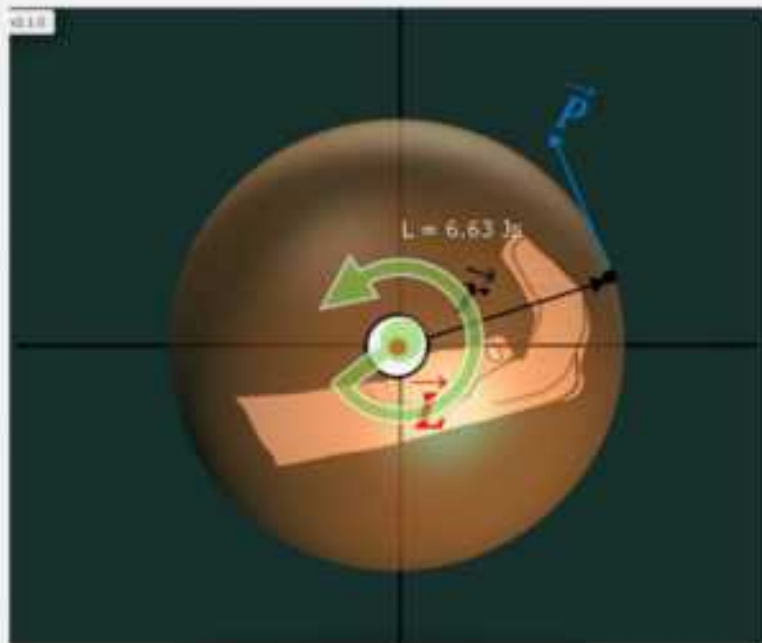


Figura 11.03: Recorte de captura de tela do *software Algodo*. Momento angular de uma esfera homogênea girando em sentido anti-horário. Fonte: os autores.

Simulação disponível em: <http://www.algodo.com/algobox/details.php?id=265084>.

Faça o *download* do aplicativo *Algodo* gratuitamente em <http://www.algodo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique [aqui](#).

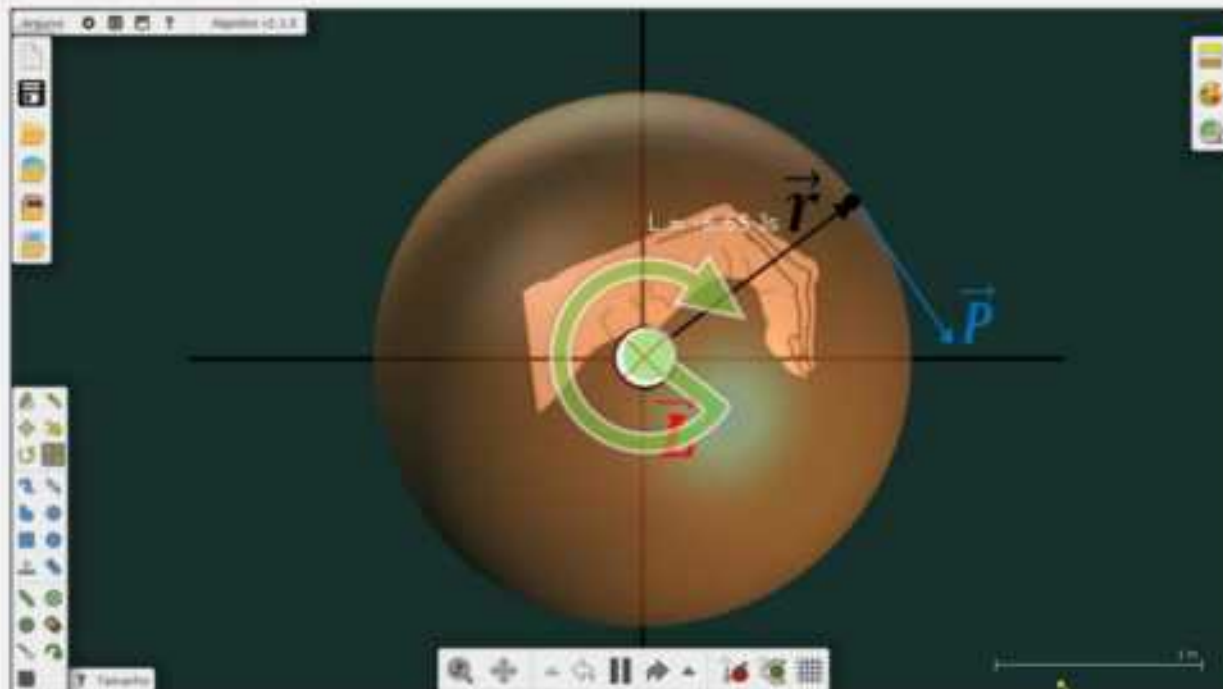


Figura 11.04: Recorte de captura de tela do *software Algodo*. Momento angular de uma esfera homogênea girando em sentido horário. Fonte: os autores.

Simulação disponível em: <http://www.algodo.com/algobox/details.php?id=265085>.

Faça o *download* do aplicativo *Algodo* gratuitamente em <http://www.algodo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique [aqui](#).

Clique no link <https://youtu.be/HWZmuKkNZI0> ou escaneie o QR code ao lado para assistir ao vídeo do tutorial da animação.



Podemos observar que, na **Figura 11.03** e na **Figura 11.04**, as orientações dos momentos angulares do corpo rígido são para fora e para dentro da tela do *software*, respectivamente.

TAREFA PROPOSTA 11.0

Para esta tarefa, você vai precisar determinar, além de outras grandezas, o momento angular de um disco rígido homogêneo de massa $m = 8 \text{ kg}$ e raio $r = 1,5 \text{ m}$ que está girando com velocidade angular constante, no sentido anti-horário, em torno do eixo fixo que passa pelo seu centro de massa. Use $\pi = 3,14$ quando necessário.

Primeiro, use a **Tabela 11.01** para calcular o módulo da velocidade linear na extremidade do disco:

$r \text{ (m)}$	$f \text{ (Hz)}$	$v = 2\pi r f \text{ (m/s)}$
1,5	0,5	

Tabela 11.01: Tarefa Proposta 11.0 – Cálculo do módulo da velocidade linear da extremidade do disco.

Calcule, agora, a velocidade angular do disco usando a **Tabela 11.02**:

$f \text{ (Hz)}$	$\omega = 2\pi f \text{ (rad/s)}$
0,5	

Tabela 11.02: Tarefa Proposta 11.0 – Cálculo da velocidade angular do disco.

Sabendo que o momento de inércia de um disco rígido homogêneo em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa pode ser calculado por $I = \frac{1}{2}mr^2$, em que m é a massa do disco e r o seu raio, use a **Tabela 11.03** e calcule o momento de inércia do disco rígido em questão.

$m \text{ (kg)}$	$r \text{ (m)}$	$I = \frac{1}{2}mr^2 \text{ (kgm}^2\text{)}$
8	1,5	

Tabela 11.03: Tarefa Proposta 11.0 – Cálculo do momento de inércia do disco.

Em seguida, use os resultados da **Tabela 11.02** e da **Tabela 11.03** para calcular a intensidade do momento angular do disco rígido homogêneo, usando a **Tabela 11.04** a seguir para isso:

$I \text{ (kgm}^2\text{)}$	$\omega = \text{(rad/s)}$	$L = I\omega \text{ (kgm}^2\text{/s)}$

Tabela 11.04: Tarefa Proposta 11.0 – Cálculo do módulo do momento angular do disco.

Por fim, use a **Tabela 11.05** para fazer o passo a passo do método de aplicação da regra da mão direita para obtenção da orientação do momento angular do disco, baseado na **Figura 11.01**:

(a)	(b)
(c)	(d)

Tabela 11.05: Tarefa Proposta 11.0 – Tabela para uso do passo a passo da aplicação da regra da mão direita para obtenção da orientação do momento angular do disco, de acordo com a sequência da Figura 10.01.

Agora, clique **AQUI** e confira na simulação do *Algodo* se os resultados conferem. Se desejar verificar o valor do momento de inércia do disco, basta clicar com o botão direito do *mouse* sobre ele ir até a guia “*informações*” que o valor estará lá.

E aí, acertou?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

11.01 – Uma partícula de massa 500 g move-se a uma velocidade escalar constante de 12 m/s sobre um círculo de raio 3 m, conforme a **Figura 11.05** a seguir:

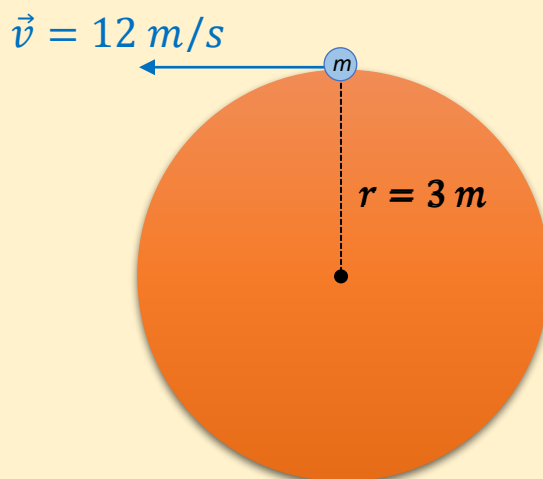
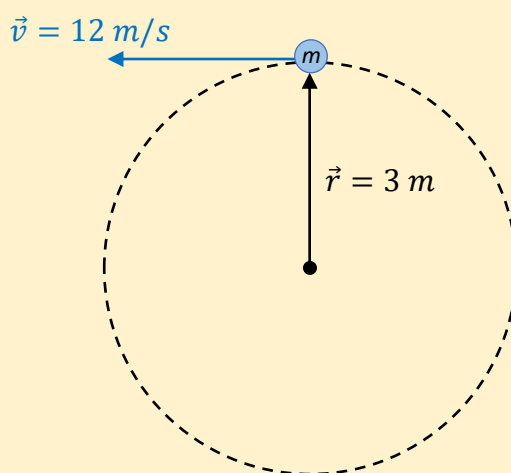


Figura 11.05: Exercício Resolvido 11.01: Momento angular de uma partícula de massa m em movimento circular uniforme.

Sabendo que a partícula descreve um movimento circular e uniforme, calcule o momento angular $\vec{L}$ da partícula em relação ao centro da sua trajetória circular.

Solução: Primeiro, vamos traçar os vetores velocidade $\vec{v}$ e posição $\vec{r}$ da partícula, que são fundamentais para se obter o seu momento angular $\vec{L}$ em relação ao centro da trajetória circular:



Agora, vamos calcular o módulo do momento angular da partícula em relação ao centro da trajetória circular usando a **Equação 11.01**:

$$L = rmv\text{sen}\phi$$

Como o movimento da partícula é circular, a sua velocidade é tangente à trajetória e,

portanto, ângulo formado entre $\vec{r}$ e $\vec{v}$ é de 90° (observe que a velocidade $\vec{v}$ da partícula tem a mesma orientação do seu momento linear $\vec{P}$).

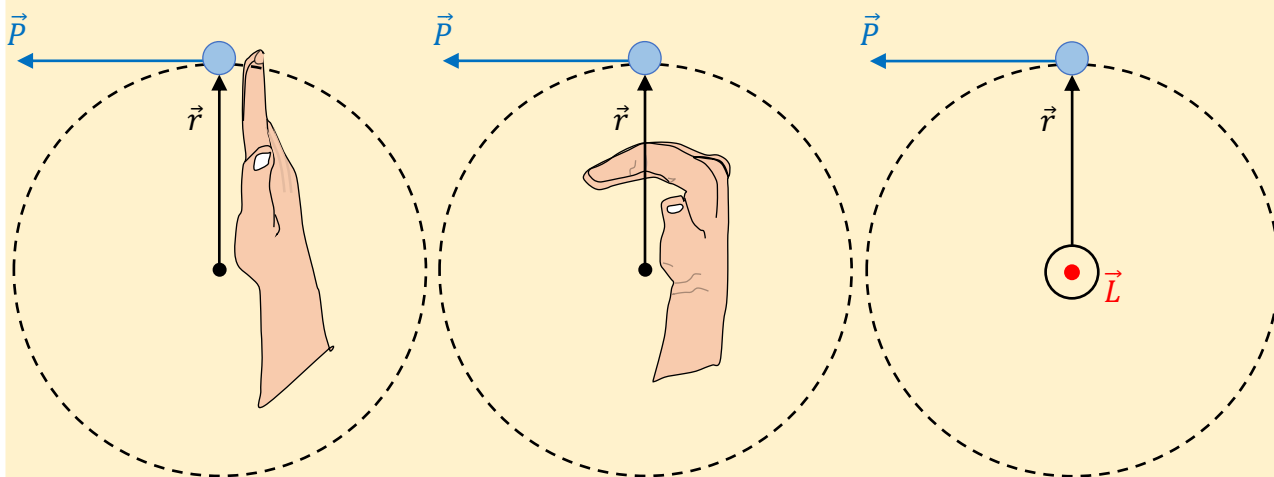
Substituindo os dados do problema na Equação:

$$L = rmv\text{sen}90^\circ$$

$$L = 3 \cdot 0,5 \cdot 12 \cdot 1$$

$$L = 18 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

Para se obter a orientação do momento angular $\vec{L}$ da partícula, vamos usar a regra da mão direita:



Portanto, o momento angular da partícula tem intensidade de $18 \text{ kgm}^2/\text{s}$ e orientação para fora do plano do papel (plano onde estão os vetores $\vec{r}$ e $\vec{v}$).

11.02 – Um ponto material de massa $m = 4 \text{ kg}$ realiza um movimento circular uniforme de raio $r = 0,4 \text{ m}$ e velocidade escalar $v = 8 \text{ m/s}$. Sendo “O” o centro da circunferência em questão, calcule, em relação ao ponto O:

- o momento de inércia do ponto material;
- a velocidade angular do ponto material;
- o módulo do momento angular do ponto material.

Soluções

Letra (a) – O momento de inércia I de um ponto material pode ser obtido por meio da equação:

$$I = mr^2$$

Sendo $m = 4 \text{ kg}$ e $r = 0,4 \text{ m}$:

$$I = 4 \cdot 0,4^2$$

$$I = 4 \cdot 0,16$$

$$I = 0,64 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Letra (b) – Vamos usar a **Equação 2.04** para calcular a velocidade angular ω do ponto material:

$$v = \omega r$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Sendo $v = 8 \text{ m/s}$ e $r = 0,4 \text{ m}$:

$$\omega = \frac{8}{0,4}$$

$$\omega = \frac{8}{0,4}$$

$$\omega = 20 \text{ rad/s}$$

Letra (c) – Para calcular a intensidade do momento angular do ponto material, vamos usar a **Equação 11.01**:

$$L = rmv \sin \phi$$

No movimento circular e uniforme, o vetor velocidade é perpendicular ao vetor posição do ponto material em relação à origem, ou seja, forma um ângulo de 90° com o raio da trajetória.

Sendo $r = 0,4 \text{ m}$, $m = 4 \text{ kg}$, $v = 8 \text{ m/s}$ e $\sin 90^\circ = 1$:

$$L = 0,4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 1$$

$$L = 12,8 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

O momento angular do ponto material também poderia ser calculado por meio da **Equação 11.08**:

$$L = I\omega$$

$$L = 0,64 \cdot 20$$

$$L = 12,8 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

Portanto, o momento de inércia em relação à origem do sistema, a velocidade angular e o módulo do momento angular do ponto material são, respectivamente, iguais a $0,64 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 20 rad/s e $12,8 \text{ kgm}^2/\text{s}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

11.01 – Uma partícula de massa 300 g move-se a uma velocidade escalar constante de 15 m/s sobre um círculo de raio 2 m , conforme a **Figura 11.06** a seguir:

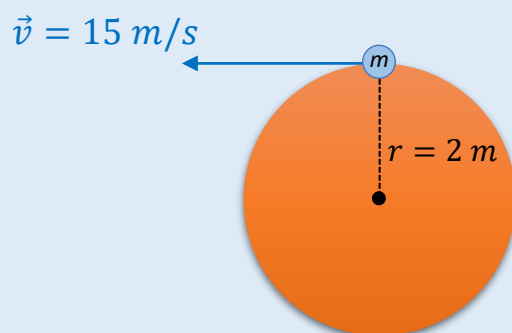


Figura 11.06: Exercício Proposto 11.01: Momento angular de uma partícula de massa m em movimento circular uniforme.

Sabendo que a partícula descreve um movimento circular e uniforme, calcule o momento angular $\vec{L}$ da partícula em relação ao centro da sua trajetória circular.

11.02 – Um ponto material de massa $m = 1,5 \text{ kg}$ realiza um movimento circular uniforme de raio $r = 0,6 \text{ m}$ e velocidade escalar $v = 24 \text{ m/s}$. Sendo “O” o centro da circunferência em questão, calcule, em relação ao ponto O:

- o momento de inércia do ponto material;
- a velocidade angular do ponto material;
- o módulo do momento angular do ponto material.

Saiba mais...

Para obtermos a orientação do momento angular, podemos usar a regra da mão direita para produtos vetoriais:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

em que $\vec{r}$ é o vetor posição da partícula em relação à origem O e $\vec{P}$, o seu momento linear.

Sendo o módulo do momento angular dado por:

Módulo do primeiro
vetor

$\times$

Módulo do segundo
vetor

$\times$

Seno do ângulo formado
entre os dois vetores

Assim:

$$L = rP\text{sen}\phi$$

$$L = rmv\text{sen}\phi$$

A sua orientação, como já mencionado, deve ser obtido utilizando a regra da mão direita, sendo o polegar direito definindo seu sentido.

Além disso, podemos obter o torque resultante em função da variação do momento angular partindo da equação do momento angular:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

Derivando ambos os lados em relação ao tempo, usando a regra do produto para as derivadas:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

Sendo $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ e $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m(\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a})$$

Como o produto vetorial entre dois vetores iguais é 0:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m(\vec{0} + \vec{r} \times \vec{a})$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a})$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{a}$$

Sendo $\vec{F}_R = m\vec{a}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_R$$

Acontece que $\vec{r} \times \vec{F}_R$ é a definição de produto vetorial para o torque resultante $\vec{\tau}_R$ produzido por uma força resultante $\vec{F}_R$. Logo:

$$\vec{\tau}_R = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

REVISÃO

Momento Angular

Momento Angular $\vec{L}$ é uma das principais grandezas da cinemática rotacional, pois mede a quantidade de movimento de um corpo em rotação em relação a um ponto fixo, que pode ou não ser o mesmo do eixo de rotação. O momento angular é, portanto, uma grandeza vetorial e o equivalente angular do momento linear.

Portanto, quanto maior o momento angular de um corpo em movimento de rotação, mais difícil é de fazê-lo parar de girar.

A orientação do momento angular de uma partícula em relação a um ponto pode ser obtida pela regra da mão direita (**Figura 11.01**), e seu módulo por meio das equações:

$$L = rmv\sin\theta \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (11.01)$$

$$L = r_{\perp}mv \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (11.02)$$

$$L = rP_{\perp} \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (11.03)$$

- L – intensidade do momento angular;
- r – módulo do vetor posição da partícula em relação à origem;
- m – massa da partícula;
- v – módulo da velocidade linear da partícula;
- θ – menor ângulo formado entre $\vec{r}$ e $\vec{P}$ ou $\vec{r}$ e $\vec{v}$ quando possuem uma origem em comum;
- $r_{\perp}$ – distância perpendicular entre a origem e o prolongamento de $\vec{P}$ ($r\sin\theta$);
- $P_{\perp}$ – módulo da componente de $\vec{P}$ que é perpendicular a $\vec{r}$ ($P\sin\theta$).

Momento Angular e a Segunda Lei de Newton

De acordo com a segunda lei de Newton:

$$\vec{F}_R = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

De modo que para o movimento rotacional, essa equação tem a sua equivalente angular dada pelas equações:

$$\tau_R = \frac{\Delta L}{\Delta t} \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (11.04)$$

$$\vec{\tau}_R = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (11.05)$$

- τ_R – módulo do torque resultante;
- ΔL – variação do módulo do momento angular;
- Δt – variação do tempo;
- $\vec{\tau}_R$ – torque resultante;
- $\Delta \vec{L}$ – variação do momento angular;
- Δt – variação do tempo.

A **Equação 11.05** é essencial na mecânica, pois é uma forma de expressar a segunda lei de Newton para movimentos rotacionais. Isso significa que, para alterar o momento angular, um torque deve atuar durante um certo intervalo de tempo.

Momento Angular de um Sistema de Partículas

Para um sistema de partículas, o seu momento angular total $\vec{L}_T$ é a soma vetorial dos momentos angulares de todas as partículas que compõe esse sistema em relação a uma origem O , ou seja, em relação a um mesmo ponto:

$$\vec{L}_T = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \dots + \vec{L}_n \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (11.06)$$

- $\vec{L}_T$ – momento angular total do sistema;
- $\vec{L}_1$ – momento angular da partícula 1;
- $\vec{L}_2$ – momento angular da partícula 2;
- $\vec{L}_3$ – momento angular da partícula 3;
- $\vec{L}_n$ – momento angular da n -ésima partícula.

Já a variação dos momentos angulares de cada partícula resulta em uma variação do momento angular total do sistema $\Delta \vec{L}_T$:

$$\Delta \vec{L}_T = \Delta \vec{L}_1 + \Delta \vec{L}_2 + \Delta \vec{L}_3 + \dots + \Delta \vec{L}_n \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (11.07)$$

- $\Delta \vec{L}_T$ – variação do momento angular total do sistema;
- $\Delta \vec{L}_1$ – variação do momento angular da partícula 1;
- $\Delta \vec{L}_2$ – variação do momento angular da partícula 2;
- $\Delta \vec{L}_3$ – variação do momento angular da partícula 3;
- $\Delta \vec{L}_n$ – variação do momento angular da n -ésima partícula.

É importante observar que as forças internas do sistema se anulam e as responsáveis por gerar o torque resultante para variar o momento angular são as **forças externas** ao sistema. Portanto, apenas um **torque resultante externo e não nulo** altera o momento angular de um sistema em rotação.

Momento Angular de um Corpo Rígido

Para calcular a intensidade do momento angular $\vec{L}$ de um corpo rígido, que possui momento de inércia I e velocidade angular $\vec{\omega}$ em relação a um eixo fixo de rotação; podemos usar a equação a seguir:

$$L = I\omega \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (11.08)$$

De modo que, vetorialmente, será:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (11.09)$$

- L – módulo do momento angular do corpo rígido em relação ao seu eixo de rotação;
- $\vec{L}$ – momento angular do corpo rígido em relação ao seu eixo de rotação;
- I – momento de inércia do corpo rígido em relação ao seu eixo de rotação;
- ω – módulo da velocidade angular do corpo rígido;
- $\vec{\omega}$ – velocidade angular do corpo rígido.

É importante observar que o momento angular $\vec{L}$ e o momento linear I são obtidos a partir do mesmo eixo de rotação.



CAPÍTULO 12

CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Verificar que quando o torque externo resultante é nulo, há a conservação do momento angular de um corpo ou um sistema.
- ✓ Mostrar que o produto do momento de inércia com a velocidade angular de um sistema permanece constante em relação aos instantes inicial e final de um sistema em rotação em que não sofra um torque resultante externo.
- ✓ Usar o *software* de simulação Física Algodoo como extensão do aprendizado do capítulo.

Da mesma forma que a energia (lei da conservação da energia) e o momento linear (lei da conservação do momento linear) podem se conservar, o momento angular (lei da conservação do momento angular) também pode. Para isso, é necessário que o torque resultante $\vec{\tau}_R$ produzido pelas forças externas que atuam sobre um corpo em rotação seja nulo. Assim, o momento angular $\vec{L}$ do corpo permanece constante.

Partindo da **Equação 11.05**, que representa a segunda lei de Newton para movimentos rotacionais:

$$\vec{\tau}_R = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

Se o torque resultante for nulo:

$$\vec{0} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

$$\Delta \vec{L} = \vec{0} \cdot \Delta t$$

$$\Delta \vec{L} = \vec{0}$$

Para que não exista variação do momento angular $\Delta \vec{L}$ de um corpo, os seus momentos angulares inicial $\vec{L}_1$ e final $\vec{L}_2$ precisam ser iguais, ou seja, o seu momento angular permanece constante com o passar do tempo.

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 = \text{constante} \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (12.01)$$

Em módulo:

$$L_1 = L_2 = \text{constante} \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (12.02)$$

- $\vec{L}_1$ – momento angular inicial do corpo;
- $\vec{L}_2$ – momento angular final do corpo;
- L_1 – módulo do momento angular inicial do corpo;
- L_2 – módulo do momento angular final do corpo.

A **Equação 12.01** e a **Equação 12.02** nos permitem concluir que, para situações em que o somatório dos torques externos que agem sobre um sistema ao longo de um eixo for nulo, a componente do momento angular ao longo desse eixo é constante, sejam quais forem as mudanças que ocorram dentro desse sistema. Isso implica que, em situações desse tipo, podemos apenas considerar os estados inicial e final do sistema, sem nos preocupar o que acontece durante o processo.

Suponha que a massa de um corpo seja redistribuída, em um determinado instante, de modo que seu momento de inércia sofra uma variação. De acordo com a **Equação 12.02**, apesar dessa mudança, o momento angular desse corpo permanece constante, o que nos sugere que para isso ocorrer, a sua velocidade angular também deve mudar. Assim:

$$L_1 = L_2$$

Sendo $L = I\omega$:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \text{ (kgm}^2\text{/s)} \text{ (Lei da Conservação do Momento Angular)} \quad (12.03)$$

- I_1 – momento inércia inicial;
- ω_1 – velocidade angular inicial;
- I_2 – momento de inércia final;
- ω_2 – velocidade angular final.

A lei da conservação do momento angular (**Equação 12.03**) implica que se de um estado inicial para um estado final de um sistema:

- o momento de inércia aumentar ($I \uparrow$) $\rightarrow$ a intensidade da velocidade angular ($\omega \downarrow$) diminui;
- o momento de inércia diminuir ($I \downarrow$) $\rightarrow$ a intensidade da velocidade angular ($\omega \uparrow$) aumenta.

Em resumo:

- ($I \uparrow$) $\rightarrow$ ($\omega \downarrow$);
- ($I \downarrow$) $\rightarrow$ ($\omega \uparrow$).

A **Figura 12.01** a seguir ilustra o aumento da velocidade angular de uma pessoa devido à diminuição do seu momento de inércia, mas mantendo seu momento angular conservado.

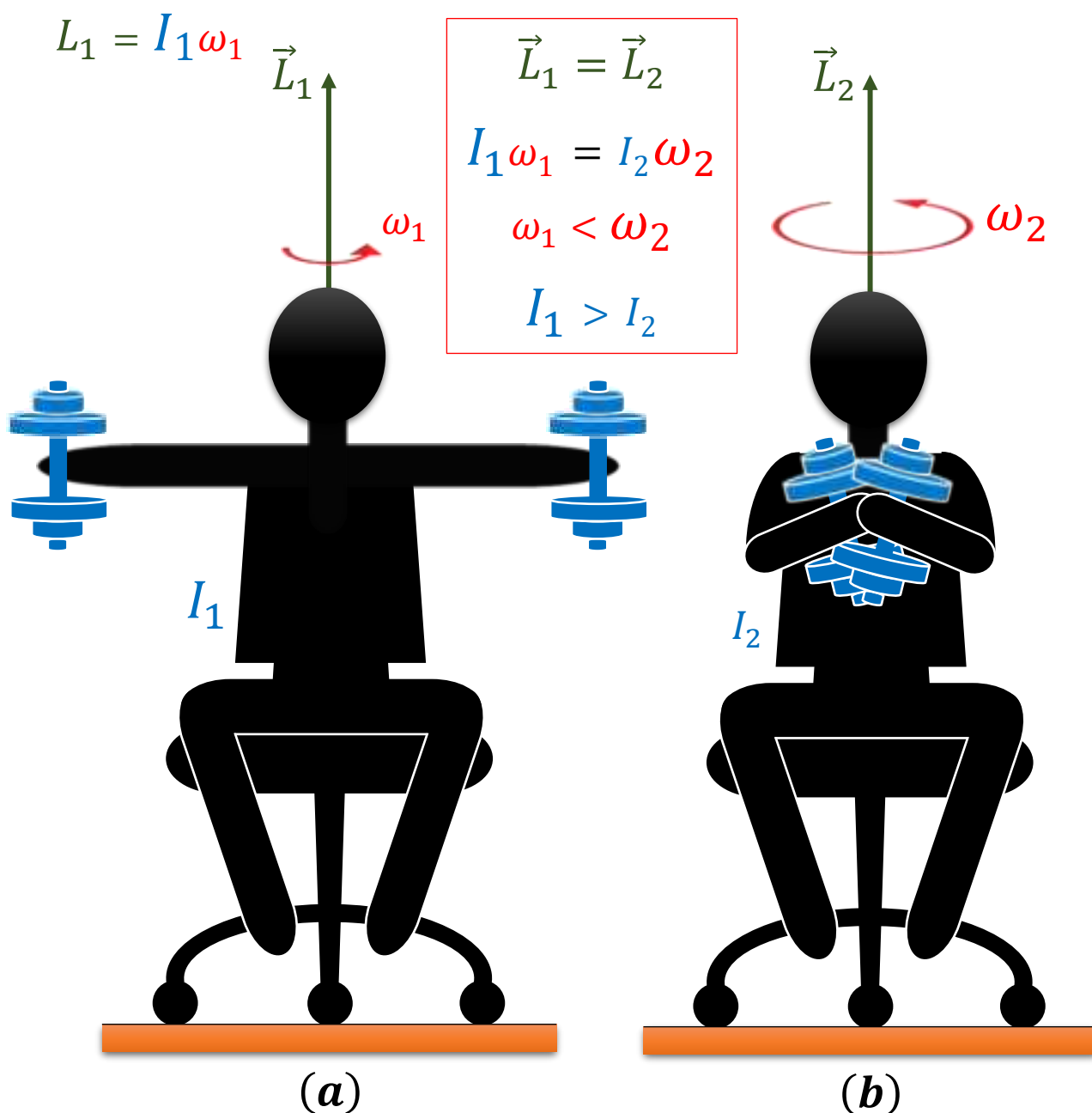


Figura 12.01: Representação de uma pessoa girando em uma cadeira giratória. Em (a), a pessoa está com os braços abertos segurando os halteres enquanto gira. Em (b), a pessoa está com os braços recolhidos, diminuindo o seu momento de inércia e aumentando a sua velocidade angular.

A **Figura 12.01** mostra uma pessoa sentada em uma cadeira giratória, sem colocar os pés no chão, que pode girar livremente em torno de um eixo vertical. Na **Figura 12.01(a)**, a pessoa, com os braços abertos, possui momento de inércia I_1 e velocidade angular ω_1 .

Em seguida, a pessoa fecha os braços e, na **Figura 12.01(b)**, seu momento de inércia passa a ser I_2 e sua velocidade angular, ω_2 . Note que quando os braços estão abertos, a massa da pessoa está distribuída mais longe do eixo de rotação em relação a quando os braços estão juntos do corpo e seu momento de inércia I_1 é maior que o momento de inércia final I_2 , mas os momentos angulares $\vec{L}_1$ e $\vec{L}_2$, que coincidem com o eixo de rotação e apontam para cima, em ambas as situações, são os mesmos, ou seja, se conservam.

A diminuição do momento de inércia faz com que a velocidade de giro do conjunto cadeira e pessoa aumente devido à conservação do momento angular. Os halteres usados pela pessoa é para intensificar a variação do momento de inércia para obter um efeito mais considerável.

Na **Figura 12.02** a seguir, temos, agora, um exemplo de um patinador girando quase que livremente em torno do seu eixo vertical.

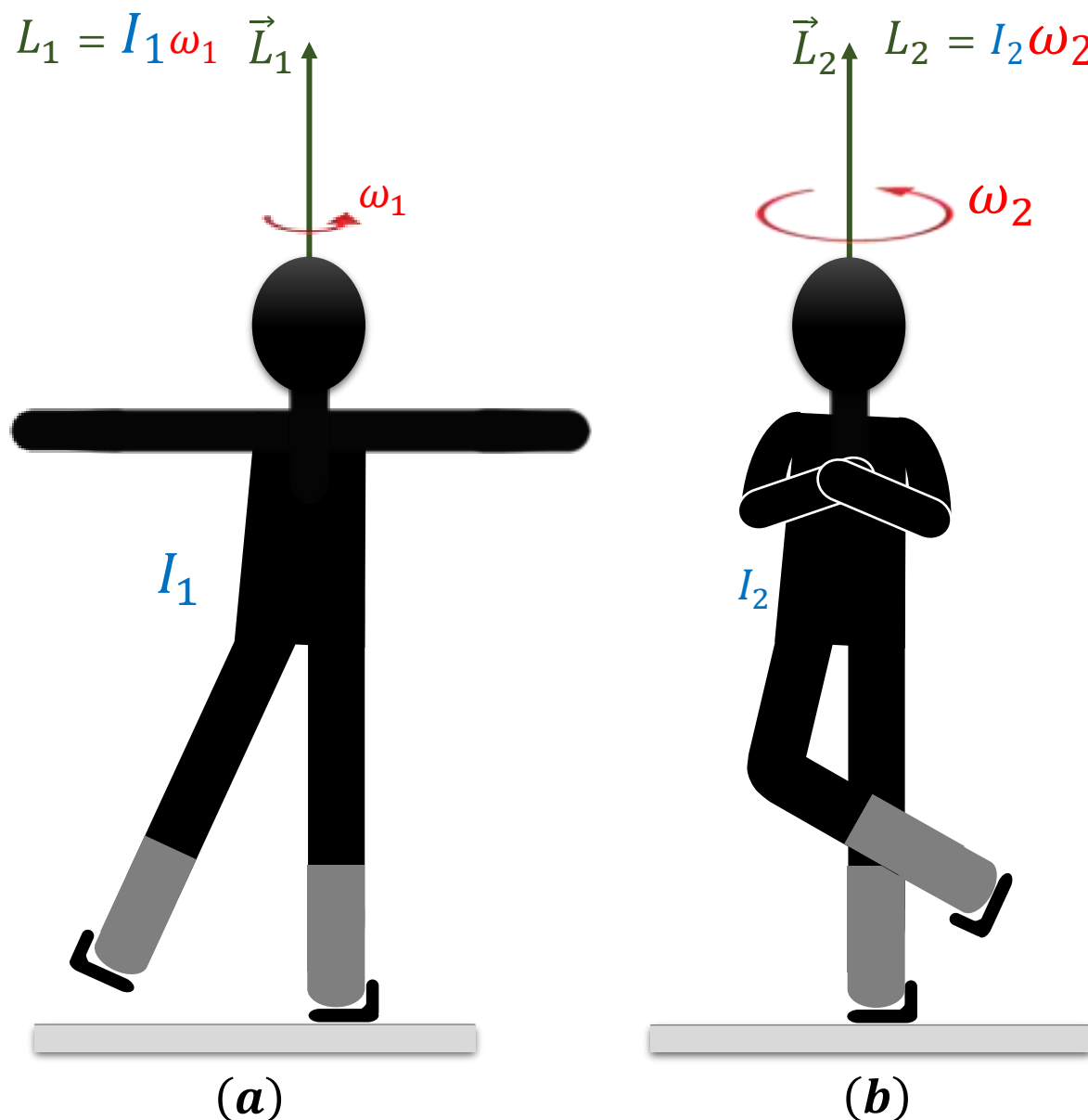


Figura 12.02: Representação de um patinador de gelo girando quase que livremente em torno do seu eixo vertical. Em (a), o patinador está girando com os braços e perna direita abertos. Em (b), o patinador recolheu os braços para junto do seu corpo e cruzou a perna direita para próximo da perna esquerda, diminuindo seu momento de inércia em relação à situação anterior.

Para o caso do patinador, o mesmo princípio da pessoa com a cadeira giratória é válido. Com os braços e pernas abertos, o patinador tem um momento de inércia maior do que com os braços fechados e sua velocidade angular é maior quando o momento de inércia é menor, para que o momento angular seja conservado.

Para o caso de um atleta realizando um salto mortal, à medida que ele sobe, seu momento de inércia diminui em relação ao eixo de rotação que passa pelo seu centro de massa pelo fato de ele se encolher, aumentando sua velocidade angular. Na descida, ele faz o processo inverso, se estirando novamente e diminuindo sua velocidade angular devido ao aumento do seu momento de inércia. Veja a situação descrita na **Figura 12.03** a seguir.

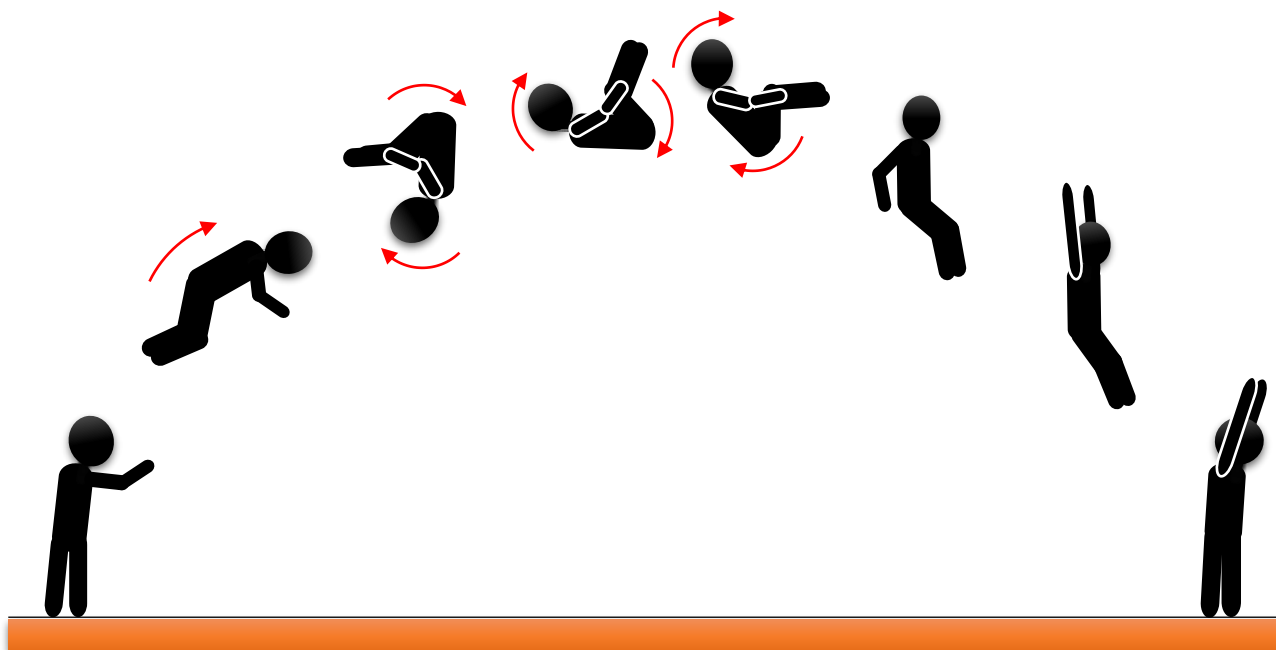


Figura 12.03: Representação de um atleta realizando um salto mortal. Na subida, ele aumenta sua velocidade angular devido à diminuição do seu momento de inércia. Na descida, ele diminui sua velocidade angular devido à diminuição do seu momento de inércia.

Vários são os exemplos que poderíamos usar para explicar a conservação do momento angular. O fato é que essa lei vai além dos limites da mecânica newtoniana, sendo muito importante, por exemplo, na mecânica quântica, pois, além de ser a unidade básica da constante de Planck, que é a constante característica do mundo quântico, o momento angular é um conceito fundamental para descrição do movimento do átomo e sua nuvem eletrônica.

Para finalizar, podemos, de acordo com a **Tabela 12.01** a seguir, mais uma vez, fazer um paralelo entre as equivalências das grandezas lineares e rotacionais.

Translação	Rotação	Conexão Translação/Rotação
S	θ	$S = r\theta$
v	ω	$v = r\omega$
a	α	$a_t = r\alpha$
m	I	$I = mr^2$ (partícula)

F	τ	$\tau = rF\text{sen}\phi$
$K = \frac{1}{2}MV_{CM}^2$	$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$	$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}MV_{CM}^2$ (Rolamento)
$P = mv$	$L = I\omega$	$L = rmv\text{sen}\phi$
$W = Fd$	$W = \tau\Delta\theta$	
$F_R = ma$	$\tau_R = I\alpha$	
$F_R = \frac{\Delta P}{\Delta t}$	$\tau_R = \frac{\Delta L}{\Delta t}$	
$P_1 = P_2 = m_1v_1 = m_2v_2$	$L_1 = L_2 = I_1\omega_1 = I_2\omega_2$	Lei de conservação

Tabela 12.01: Equivalência entre grandezas e equações lineares e rotacionais.

USANDO O ALGODOO 12.0

A **Figura 12.04** a seguir mostra duas situações em que o momento de inércia de um sistema é mudado devido a concentração da massa próximo ao eixo de rotação.

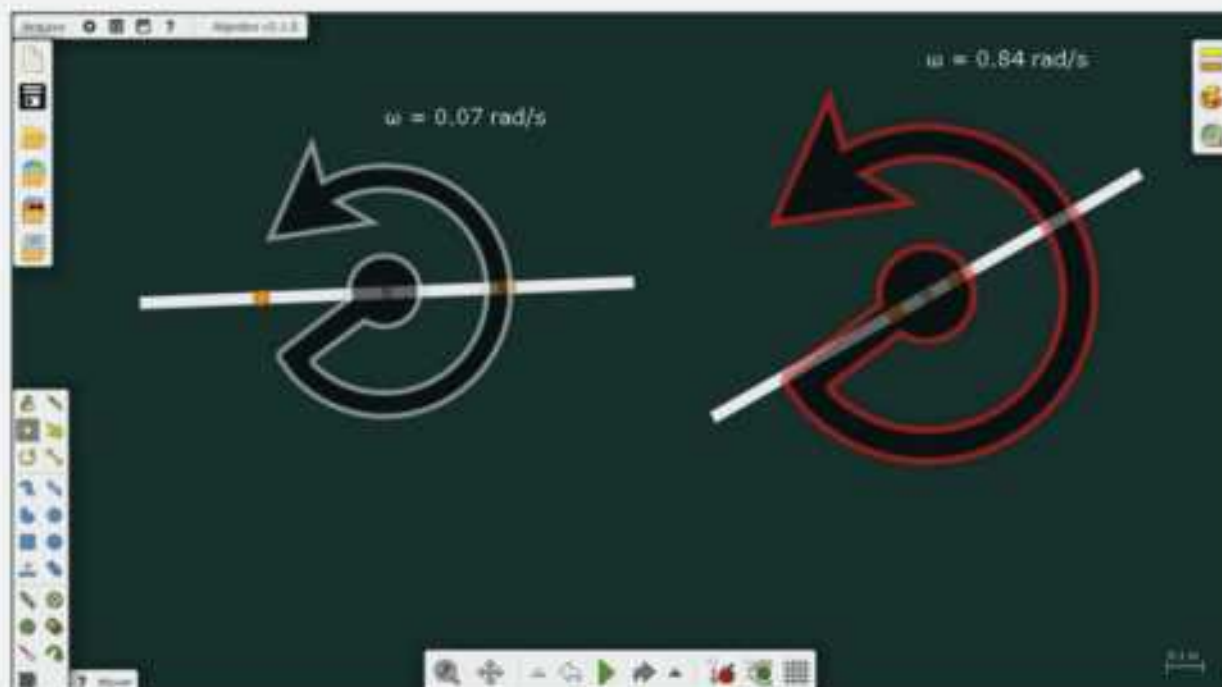


Figura 12.04: Captura de tela do software Algodoo. Conservação do momento angular mesmo com a variação do momento de inércia de um sistema. Fonte: os autores.

Simulação disponível em: <http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264865>.

Faça o download do aplicativo Algodoo gratuitamente em <http://www.algodoo.com/download/> para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do software, clique [aqui](#).

Clique no link <https://youtu.be/TyLODm-ViZY> ou escaneie o QR code ao lado para assistir ao vídeo do tutorial da animação.



Podemos observar que, na **Figura 12.04**, apesar da variação do momento de inércia I dos dois sistemas apresentados na simulação, há a conservação do momento angular $\vec{L}$. Para isso ocorrer, a diminuição do momento de inércia foi compensada com o aumento da velocidade angular ω .

TAREFA PROPOSTA 12.0

Para esta tarefa, vamos usar duas barras, com massas desprezíveis, girando com eixo fixo de rotação no seu ponto médio, representando os exemplos da pessoa girando na cadeira giratória (**Figura 12.01**) e do patinador girando em torno do seu eixo vertical (**Figura 12.02**). As barras possuem dois objetos idênticos, com 10 kg cada, com distâncias do eixo de rotação diferentes nas duas situações. Queremos aqui calcular, inicialmente, o momento de inércia de cada sistema e, usando do Princípio da Conservação do Momento Angular, vamos verificar o que acontece com a velocidade angular devido à mudança do momento de inércia.

Vamos considerar cada sistema como se fosse uma partícula para facilitar os cálculos. Assim, use os dados da **Tabela 12.02** para calcular o momento de inércia em cada situação:

Situação	$m\text{ (kg)}$	$r\text{ (m)}$	$I = mr^2\text{ (kgm}^2\text{)}$
1	20	0,2975	
2	20	0,085	

Tabela 12.02: Tarefa Proposta 12.0 – Cálculo dos momentos de inércia de dois sistemas com momentos angulares constantes.

Considere que, na situação 2, a velocidade angular do sistema passou a ser $\omega_2 = 12,56\text{ rad/s}$. Então, utilize, na **Tabela 12.03** a seguir, os resultados que você encontrou na **Tabela 12.02** para verificar qual era a velocidade angular ω_1 na situação inicial, levando em consideração que houve a conservação do momento angular.

Situação	$I\text{ (kgm}^2\text{)}$	$\omega\text{ (rad/s)}$	$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$
1			
2		12.56	

Tabela 12.03: Tarefa Proposta 12.0 – Cálculo da velocidade angular inicial ω_1 do sistema angular conservativo.

Clique **AQUI** e confira na simulação do *Algodoo* se os resultados conferem.

E aí, acertou?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

12.01 – Um disco homogêneo, de massa $M = 10 \text{ kg}$ e raio $R = 50 \text{ cm}$, gira em torno de um eixo vertical, que passa pelo seu centro, com uma velocidade angular $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Um torque $\tau = 50 \text{ Nm}$ é aplicado ao disco, no sentido anti-horário, durante um intervalo de tempo $\Delta t = 2 \text{ s}$. De acordo com o enunciado, determine:

- a) o módulo da variação do momento angular do disco;
- b) a nova velocidade angular do disco.

Dado: Equação do momento de inércia em relação ao centro do disco homogêneo $(I = \frac{1}{2}MR^2)$.

Soluções

Letra (a) – Para calcular o módulo da variação do momento angular do disco devido a um torque resultante externo, vamos usar a **Equação 11.04**:

$$\tau_R = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

$$\Delta L = \tau_R \cdot \Delta t$$

Sendo $\tau_R = 50 \text{ Nm}$ e $\Delta t = 2 \text{ s}$:

$$\Delta L = 50 \cdot 2$$

$$\Delta L = 100 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

Note que o torque foi aplicado no sentido anti-horário (positivo) e, portanto, a variação do momento angular também deve ser positiva.

Letra (b) – Aqui, o momento angular do disco não se conserva, pois existe um torque não nulo agindo sobre ele. Assim, o momento angular final do disco é a soma do inicial mais a sua variação:

$$\Delta L = L_2 - L_1$$

$$L_2 = L_1 + \Delta L$$

Para calcular a intensidade do momento angular de um corpo rígido em relação a um eixo fixo de rotação, podemos usar a **Equação 11.08**:

$$L = I\omega$$

Substituindo:

$$I_2 \omega_2 = I_1 \omega_1 + \Delta L$$

Como o item (b) pede a nova velocidade angular, vamos isolar ω_2 :

$$\omega_2 = \frac{I_1 \omega_1}{I_2} + \frac{\Delta L}{I_2}$$

O momento de inércia do disco não muda entre os instantes inicial e final, ou seja, $I_1 = I_2$:

$$\omega_2 = \frac{\cancel{I_1} \omega_1}{\cancel{I_2}} + \frac{\Delta L}{I_2}$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{\Delta L}{I_2}$$

Sendo o momento de inércia do disco homogêneo igual a $I = \frac{1}{2} MR^2$:

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{\Delta L}{\frac{1}{2} MR^2}$$

Como $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$, $\Delta L = 100 \text{ kgm}^2/\text{s}$, $M = 10 \text{ kg}$ e $R = 50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$:

$$\omega_2 = 10 + \frac{100}{\frac{1}{2} 10 \cdot 0,5^2}$$

$$\omega_2 = 10 + \frac{100}{5 \cdot 0,25}$$

$$\omega_2 = 10 + \frac{20}{0,25}$$

$$\omega_2 = 10 + 80$$

$$\boxed{\omega_2 = 90 \text{ rad/s}}$$

12.02 – Um estudante está sentado em uma cadeira giratória com halteres nas mãos, conforme mostra a **Figura 12.05**. Ele faz um pequeno esforço e começa a girar, inicialmente, com os braços abertos [**Figura 12.05(a)**], com velocidade angular $\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$. Nesse instante, seu momento angular é $\vec{L}_1$ e seu momento de inércia é $I_1 = 70 \text{ kgm}^2$. Em seguida, ele fecha os braços [**Figura 12.05(b)**], ficando assim com momento angular $\vec{L}_2$, momento de inércia $I_2 = 30 \text{ kgm}^2$ e velocidade angular ω_2 . Sabendo que, depois de iniciado o giro da cadeira, o torque externo resultante que age sobre o sistema cadeira/aluno é nulo, além do atrito do eixo da cadeira ser desprezível, determine, para esse sistema:

- a) a velocidade angular final do estudante ω_2 ;
- b) o módulo momento angular inicial L_1 ;
- c) o módulo do momento angular L_2 ;
- d) O módulo da variação do momento angular ΔL .

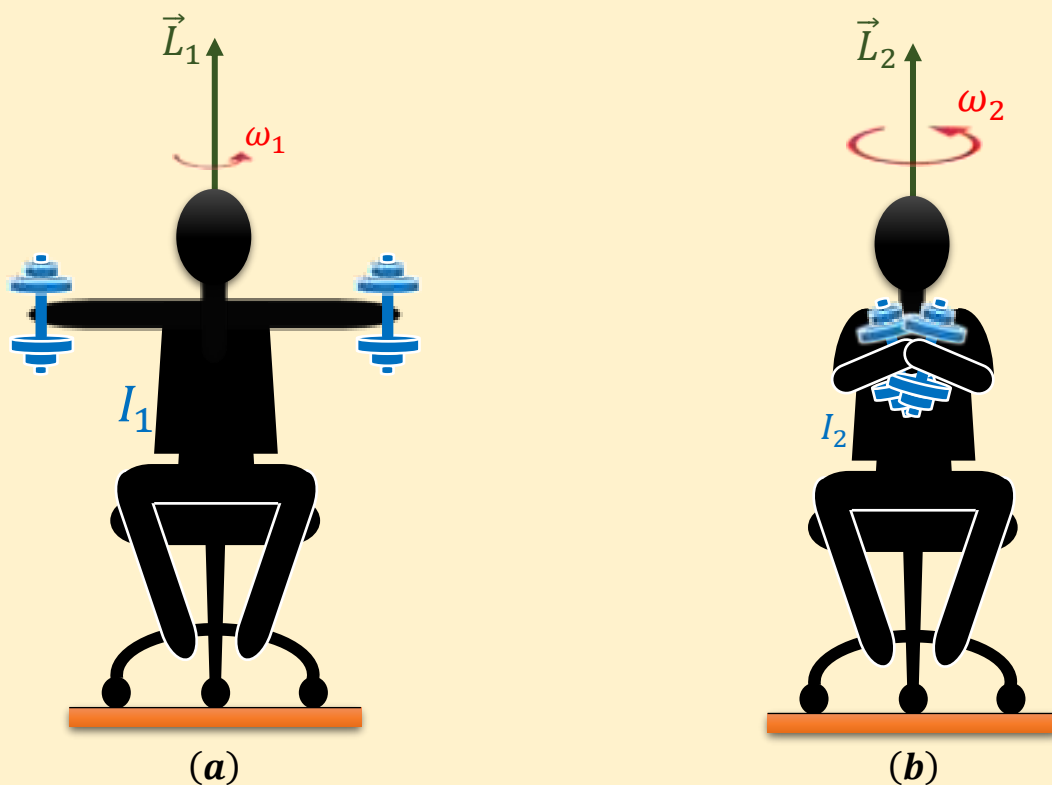


Figura 12.05: Exercício Resolvido 12.02 - Representação de um estudante girando em uma cadeira giratória. Em (a), a pessoa está com os braços abertos segurando os halteres enquanto gira. Em (b), a pessoa está com os braços recolhidos.

Soluções

Letra (a) – Como, depois de iniciado o movimento, o torque resultante que age sobre o sistema é nulo, há a conservação do momento angular do sistema. Assim, vamos usar a **Equação 12.03** (Lei da Conservação do Momento Angular) para calcular a velocidade angular final do estudante:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

Sendo $I_1 = 70 \text{ kgm}^2$, $\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$ e $I_2 = 30 \text{ kgm}^2$:

$$70 \cdot 3 = 30 \omega_2$$

$$210 = 30 \omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{210}{30}$$

$$\omega_2 = 7 \text{ rad/s}$$

Letra (b) – Para calcular o módulo do momento angular inicial L_1 do estudante ou do sistema (a velocidade angular é a mesma), vamos usar a **Equação 11.08**:

$$L_1 = I_1 \omega_1$$

Sendo $I_1 = 70 \text{ kgm}^2$ e $\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$:

$$L_1 = 70 \cdot 3$$

$$L_1 = 210 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

Letra (c) – Para calcular o módulo do momento angular final L_2 , vamos, novamente, usar a **Equação 11.08**:

$$L_2 = I_2 \omega_2$$

Sendo $I_2 = 30 \text{ kgm}^2$ e $\omega_2 = 7 \text{ rad/s}$:

$$L_2 = 30 \cdot 7$$

$$L_2 = 210 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

Observe que nem precisaríamos calcular a intensidade do momento angular final L_2 do estudante, tendo em vista que houve a conservação do seu momento angular ($L_1 = L_2$).

Letra (d) – Para a o módulo da variação do momento angular ΔL , o mesmo conceito do item (c) é válido ($L_1 = L_2$). Como o momento angular se conservou, não houve variação. Logo:

$$\Delta L = 0$$

Perceba que, de fato, houve a conservação, pois:

$$\Delta L = L_2 - L_1$$

$$\Delta L = 210 - 210$$

$$\Delta L = 0$$

Portanto, o módulo da velocidade angular final ω_2 , o módulo do momento angular inicial L_1 , o módulo do momento angular L_2 e o módulo da variação do momento angular ΔL do sistema cadeira/estudante são, respectivamente, iguais a 7 rad/s , $210 \text{ kgm}^2/\text{s}$, $210 \text{ kgm}^2/\text{s}$ e 0 (conservação do momento angular).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

12.01 – Um disco homogêneo, de massa $M = 2 \text{ kg}$ e raio $R = 30 \text{ cm}$, gira em torno de um eixo vertical, que passa pelo seu centro, com uma velocidade angular $\omega = 25 \text{ rad/s}$. Um torque $\tau = 3 \text{ Nm}$ é aplicado ao disco, no sentido anti-horário, durante um intervalo de tempo $\Delta t = 3 \text{ s}$. De acordo com o enunciado, determine:

- a) o módulo da variação do momento angular do disco;
- b) a nova velocidade angular do disco.

Dado: $\left(I = \frac{1}{2}MR^2\right)$ – momento de inércia do disco homogêneo em relação ao seu centro

12.02 – Um estudante está sentado em uma cadeira giratória com halteres nas mãos, conforme mostra a **Figura 12.06** ao lado. Ele faz um pequeno esforço e começa a girar, inicialmente, com os braços fechados [**Figura 12.06(a)**], com velocidade angular $\omega_1 = 15 \text{ rad/s}$. Nesse instante, seu momento angular é $\vec{L}_1$ e seu momento de inércia é $I_1 = 40 \text{ kgm}^2$. Em seguida, ele abre os braços

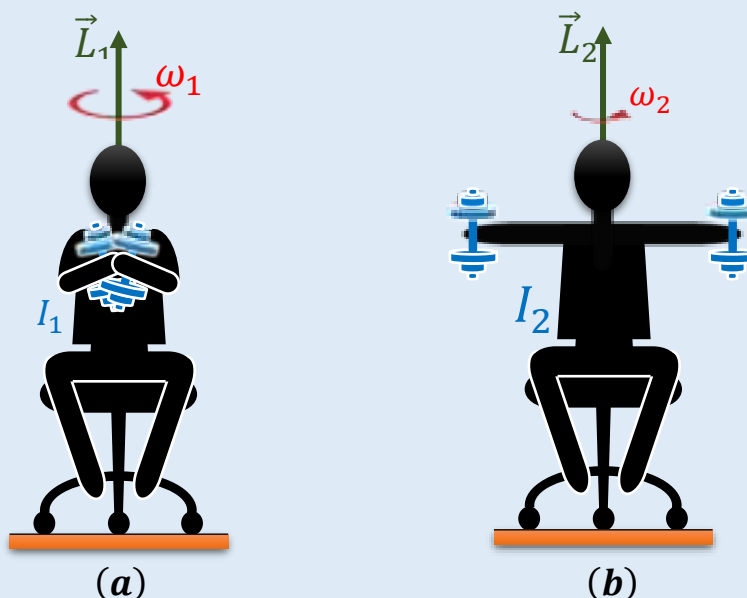


Figura 12.06: Exercício Proposto 12.02 - Representação de um estudante girando em uma cadeira giratória. Em (a), a pessoa está com os braços fechados segurando os halteres enquanto gira. Em (b), a pessoa está com os braços abertos.

[**Figura 12.06(b)**], ficando assim com momento angular $\vec{L}_2$, momento de inércia $I_2 = 100 \text{ kgm}^2$ e velocidade angular ω_2 . Sabendo que, depois de iniciado o giro da cadeira, o torque externo resultante que age sobre o sistema cadeira/aluno é nulo, além do atrito do eixo da cadeira ser desprezível, determine, para esse sistema:

- a) a velocidade angular final do estudante ω_2 ;
- b) o módulo momento angular inicial L_1 ;
- c) o módulo do momento angular L_2 ;
- d) O módulo da variação do momento angular ΔL .

Saiba mais...

CURIOSIDADE: O momento angular de um corpo é a quantidade de movimento rotacional que esse corpo possui, ou seja, quanto maior o seu momento angular, mais difícil é de parar esse movimento de giro. Em outras palavras, a rotação de um corpo faz com que ele ganhe estabilidade no seu eixo de rotação em relação a outro eixo vertical de rotação. Isso explica o porquê objetos em movimento rotacionais não tombam, como um pneu de uma bicicleta ou um pião, por exemplo. Esse fenômeno é chamado de **giroscópio** ou movimento de **precessão**.

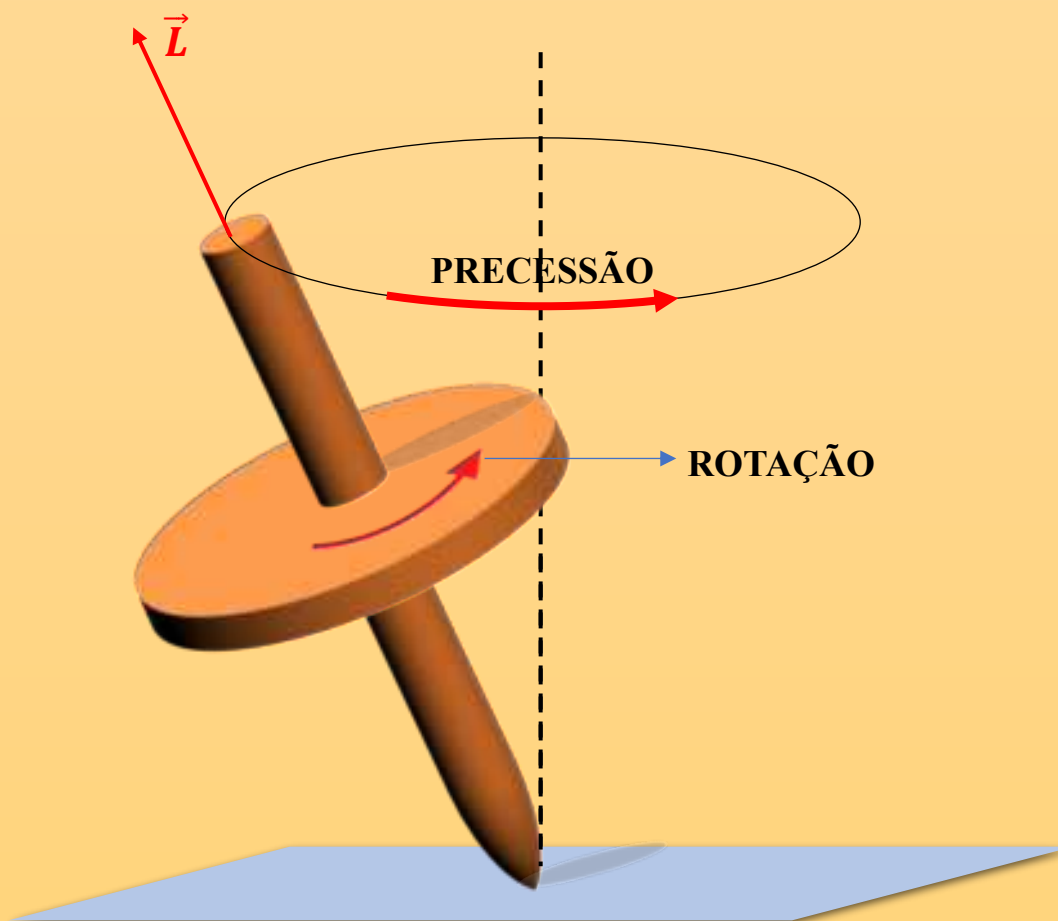


Figura 12.07: Pião girando em torno do seu eixo de rotação. O seu momento angular resiste a queda induzida pela força peso que atua no eixo vertical, o mesmo onde acontece a precessão.

REVISÃO

Conservação do Momento Angular

Se o torque resultante $\vec{\tau}_R$ produzido pelas forças externas que atuam sobre um corpo em rotação for nulo, o seu momento angular $\vec{L}$ em relação ao seu eixo de rotação permanece constante. Assim, haverá a **conservação do momento angular** do corpo.

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 = \text{constante} \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (12.01)$$

Em módulo:

$$L_1 = L_2 = \text{constante} \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (12.02)$$

- $\vec{L}_1$ – momento angular inicial do corpo;
- $\vec{L}_2$ – momento angular final do corpo;
- L_1 – módulo do momento angular inicial do corpo;
- L_2 – módulo do momento angular final do corpo.

Essa é uma das leis de conservação da Física, chamada de **Lei da conservação do momento Angular**. Também podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \quad (\text{kgm}^2/\text{s}) \quad (\text{Lei da Conservação do Momento Angular}) \quad (12.03)$$

- $\vec{L}_1$ – momento angular inicial do corpo;
- $\vec{L}_2$ – momento angular final do corpo;
- L_1 – módulo do momento angular inicial do corpo;
- L_2 – módulo do momento angular final do corpo.

A lei da conservação do momento angular implica que se de um estado inicial para um estado final de um sistema:

- o momento de inércia aumentar ($I \uparrow$) $\rightarrow$ a intensidade da velocidade angular ($\omega \downarrow$) diminui;

- o momento de inércia diminuir ($I \downarrow$) $\rightarrow$ a intensidade da velocidade angular ($\omega \uparrow$) aumenta.

Em resumo:

- ($I \uparrow$) $\rightarrow$ ($\omega \downarrow$);
 ➤ ($I \downarrow$) $\rightarrow$ ($\omega \uparrow$).

De modo geral, as grandezas angulares possuem suas correspondentes lineares, como mostrado a seguir.

Translação	Rotação	Conexão Translação/Rotação
S	θ	$S = r\theta$
v	ω	$v = r\omega$
a	α	$a_t = r\alpha$
m	I	$I = mr^2$ (partícula)
F	τ	$\tau = rF\sin\phi$
$K = \frac{1}{2}MV_{CM}^2$	$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$	$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}MV_{CM}^2$ (Rolamento)
$P = mv$	$L = I\omega$	$L = rmv\sin\phi$
$W = Fd$	$W = \tau\Delta\theta$	
$F_R = ma$	$\tau_R = I\alpha$	
$F_R = \frac{\Delta P}{\Delta t}$	$\tau_R = \frac{\Delta L}{\Delta t}$	
$P_1 = P_2 = m_1v_1 = m_2v_2$	$L_1 = L_2 = I_1\omega_1 = I_2\omega_2$	Lei de conservação

Respostas dos Exercícios Propostos

CAPÍTULO 1

1.01 – $\Delta\theta = 4 \text{ rad}$

1.02 – $\alpha_m = 5 \text{ rad/s}^2$

1.03 – $t = 6 \text{ s}$

CAPÍTULO 2

2.01 – $f = 0,02 \text{ Hz}$

$\omega = 0,04\pi \text{ rad/s}$

$r = 20 \text{ m}$

2.02 – $\alpha_c = 3,2 \text{ m/s}^2$

CAPÍTULO 3

3.01 – $f_B = 3 \text{ Hz}$

CAPÍTULO 4

4.01 – $K = 3,675 \text{ J}$

4.02 – $I_Q = 0,135 \text{ kg.m}^2$

4.03 – $I = 0,25 \text{ kg.m}^2$

CAPÍTULO 5

5.01 – $\tau = 19,5 \text{ N.m}$

5.02 – $\tau = 1,26 \text{ N.m}$

CAPÍTULO 6

6.01 – $W = 1,925 \cdot 10^{-2} \text{ J}$

6.02 – $W = 9,27 \text{ J}$

CAPÍTULO 7

7.01 – $\omega = 9,42 \text{ rad/s}$

$v_A = 9,42 \text{ m/s}$

$v_B = 4,71 \text{ m/s}$

$v_C = 0$

7.02 – $V_{CM} = 5,6 \text{ m/s}$

$V_{SUPERIOR} = 11,2 \text{ m/s}$

$V_{INFERIOR} = 0$

CAPÍTULO 8

8.01 – a) $V_{CM} = 15 \text{ m/s}$

b) $\omega = 75 \text{ rad/s}$

c) $I_{CM} = 0,16 \text{ kg.m}^2$

d) $K_{ROTAÇÃO} = 450 \text{ J}$

e) $K_{TRANSLAÇÃO} = 900 \text{ J}$

e) $K = 1350 \text{ J}$

CAPÍTULO 9

9.01 – $\alpha_{CM} = 4,73 \text{ m/s}^2$

CAPÍTULO 10

10.01 – Figura 2.25(a): $\vec{\tau} = 37,6 \text{ N.m}$, $\otimes$

Figura 2.25(b): $\vec{\tau} = 20,79 \text{ N.m}$, $\otimes$

Figura 2.25(c): $\vec{\tau} = 27,5 \text{ N.m}$, $\odot$

CAPÍTULO 11

11.01 – $\vec{L} = 9 \text{ kg.m}^2/\text{s}$, $\odot$

11.02 – a) $I = 0,54 \text{ kg.m}^2$

b) $\omega = 40 \text{ rad/s}$

c) $L = 21,6 \text{ kg.m}^2/\text{s}$

CAPÍTULO 12

12.01 – a) $\Delta L = 9 \text{ kg.m}^2/\text{s}$

b) $\omega_2 = 125 \text{ rad/s}$

12.02 – a) $\omega_2 = 6 \text{ rad/s}$

b) $L_1 = 600 \text{ kg.m}^2/\text{s}$

c) $L_2 = 600 \text{ kg.m}^2/\text{s}$

d) $\Delta L = 0$

Referências Bibliográficas

ALGODOO. Disponível em: < <http://www.algodoo.com/>>. Acesso em: 28 jan. 2023.

ALGODOO.COM. **Fórum Algodoo**. Disponível em: <<http://www.algodoo.com/forum/viewtopic.php?f=30&t=12229&p=86459&hilit=tradução&sid=2ed19f082184cf645d2a3a6a7d9a9be8#p86459>>. Acesso em: 28 nov. 2023.

FERRARO, Nicolau Gilberto; PENTEADO, Paulo Cesar M.; TORRES, Carlos Magno A.; **Física - Vereda Digital - Volume único**. 1. Ed. – São Paulo: Moderna, 2012.

GOGOY, Leandro; AGNOLO, Rosana Maria Dell’; MELO, Wolney C. **Multiversos: Ciências da Natureza**: matéria, energia e a vida – 1. ed. – São Paulo: Editora FTD, 2020.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física: Mecânica - Volume 1**. 10ª ed. Tradução: Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

MARTINI, Glorinha *et al.* **Conexões com a Física** – 3. ed. – São Paulo: Moderna, 2016.

NUSSENZVEIG, H. Moisés. **Curso de Física Básica 1: Mecânica**. 4. Ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

RAMALHO, Francisco Júnior; FERRARO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo Antônio de Toledo. **Os Fundamentos da Física: Mecânica**, Volume 1. São Paulo: Moderna, 2015.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <<https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>>. Acesso em: 28 nov. 2023.

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. Sears & Zemansky - **Física I: Mecânica - Volume 1**. 12ª ed. Tradução de Sonia Midori Yamamoto. São Paulo: Pearson Universidades, 2008.



Anderson Gomes da Silva

Nascido em Santa Cruz/RN, no dia 04/07/1986, é professor das redes municipal de Parnamirim/RN e do Estado do Rio Grande do Norte.

Filho de Geraldo Ferreira da Silva e Francisca Zeferino Gomes Silva, sempre estudou em escola pública e se graduou em Licenciatura em Física no ano de 2015 pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte.

Também é Licenciado em Matemática pela Unifael (2021). Leciona Física desde 2016 na Escola Estadual Professor Eliah Maia do Rêgo e tem experiência como professor de Matemática na rede municipal de ensino de Parnamirim/RN.

Lecionou Física por sete anos (2016 a 2022) na Escola Estadual Professor Antônio Basílio Filho, em Parnamirim/RN.

Casado com Jhennyfer Carolyne do Nascimento Silva, é pai da pequena Melissa Martins da Silva de sete anos de idade.

Recentemente (2025), concluiu o Mestrado do Curso de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física – MNPEF – Polo 10 IFRN.

Muito caseiro, gosta assistir a futebol, jogar videogame e passear com a esposa e com a filha.



Melquisedec Lourenço da Silva

Melquisedec Lourenço da Silva é Doutor em Física pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte e professor/pesquisador no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte.

Com uma sólida trajetória acadêmica, dedica-se ao estudo e ensino de Física, com ênfase em novas metodologias para a sala de aula. Como orientador de trabalhos de mestrado e de graduação, tem contribuído ativamente para a formação de novos pesquisadores, consolidando sua atuação na produção de conhecimento científico e na inovação no ensino da disciplina.

Neste livro, *Algodoo e a Dinâmica Rotacional: Uma Proposta Didática Interativa*, os autores apresentam uma abordagem inovadora para o ensino da Física, utilizando o *software Algodoo* para tornar conceitos como energia cinética de rotação e rolamento mais acessíveis e interativos para o leitor.

Destinado a professores e alunos, o material combina teoria e prática, promovendo uma aprendizagem significativa e alinhada às demandas educacionais contemporâneas.

