SOCIEDADE BRASILEIRA DE FÍSICA – SBF

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO NORTE – IFRN – POLO 10

CAMPUS NATAL CENTRAL

MESTRADO NACIONAL PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA – MNPEF

Anderson Gomes da Silva

UMA PROPOSTA DIDÁTICA INTERATIVA PARA O ENSINO DE ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO E ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO MEDIADA PELO USO DO *SOFTWARE ALGODOO*

Natal/RN

2025

Anderson Gomes da Silva

UMA PROPOSTA DIDÁTICA INTERATIVA PARA O ENSINO DE ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO E ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO MEDIADA PELO USO DO *SOFTWARE ALGODOO*

Dissertação de Mestrado apresentada ao Polo 10 do Programa de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física do Curso de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte – IFRN, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Prof. Melquisedec Lourenço da Silva, D.Sc.

Natal/RN

2025

Silva, Anderson Gomes da.
S586p Uma proposta didática interativa para o ensino de energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento mediada pelo uso do *software algodoo* / Anderson Gomes da Silva. – 2025.
482 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, Natal, 2025.
Orientador(a): Dr. Melquisedec Lourenço da Silva.

1. Física – Ensino. 2. Aprendizagem significativa. 3. Algodoo – Software. 4. Energia cinética de rotação. 5. Energia cinética de rolamento. I. Título.

CDU 53:37(043.3)

Elaborado por Sandra Nery da Silva Bigois – CRB-15/439

Anderson Gomes da Silva

UMA PROPOSTA DIDÁTICA INTERATIVA PARA O ENSINO DE ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO E ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO MEDIADA PELO USO DO *SOFTWARE ALGODOO*

Orientador:

Prof. Melquisedec Lourenço da Silva, D.Sc.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Polo 10 do Programa de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física do Curso de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte – IFRN, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada em 06/03/2025, por:



Prof. Melquisedec Lourenço da Silva, D.Sc.
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte – IFRN
Presidente



Prof. Antonio Marques dos Santos, D.Sc.
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte – IFRN
Examinador Interno



Prof. Alexsandro Pereira Lima, D.Sc.
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Examinador Externo

Natal/RN

2025

Dedico este trabalho à minha esposa Jhennyfer Carolyne, pois foi a pessoa que primeiro me incentivou a ingressar no mestrado e esteve comigo diariamente, participando da minha caminhada durante todo o curso.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo conforto da sua palavra, permitindo-me sempre acreditar que é possível superar todas as dificuldades.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – código de financiamento 001, pelo apoio, inclusive financeiro.

À minha linda, adorável e amada esposa Jhennyfer Carolyne, pelo companheirismo fervoroso, intenso respeito, me fazer feliz como nunca e pelo incentivo acentuado para que eu pudesse ingressar neste curso e encará-lo com prioridade e extrema dedicação.

À minha filha Melissa, a "princesinha do papai", por fazer meu mundo mais belo e radiante.

À minha mãe Dona Francisca, pelo amor, dedicação, apoio e nunca desistir de mim.

Ao meu pai Geraldo, por ter me dado a oportunidade de tê-lo, de fato, como um pai respeitável, bondoso e amoroso.

Ao meu orientador Prof. Dr. Melquisedec Lourenço da Silva, por toda a disponibilidade, atenção, companheirismo e, principalmente, profissionalismo.

À minha amiga, colega de trabalho e madrinha de casamento Rosinalva Cristina de Lira, como também a seu esposo Aguinaldo, pelos conselhos.

Ao professor Nilton, diretor da Escola Estadual Professor Eliah Maia do Rêgo, pela parceria de sempre, o qual sempre ajudou na minha carreira docente, principalmente durante o período do mestrado.

Aos alunos da 1ª Séria "A" do turno Matutino do Eliah, pela dedicação e empenho durante a aplicação do meu produto educacional.

A Eriberto Gomes de Souza, por todas as dicas e atenção durante a escrita de projetos e desta dissertação.

Ao meu eterno amigo Elison Thiago, *In Memoriam*, que nos deixou precocemente, sempre me fortalece com as lembranças de sua dedicação aos estudos e do seu bom caráter.

Aos meus irmãos queridos, pelo incentivo de sempre.

Aos meus colegas de trabalho da Escola Eliah, pelo compartilhamento das vivências educacionais vividas.

Aos professores do Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF), pelos ensinamentos e conhecimentos compartilhados.

Aos colegas de turma do MNPEF IFRN 2023: Cleiton, Edilson, Gislânea, Ítalo, João Paulo, Natanael, Rogério, Wellington e Yuri, pelas experiências vividas durante todo o percurso do mestrado.

Aos amigos Bruno Henrique, Julio Cezar Batista e Rodrigo, pela disponibilidade de sempre.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente esteve presente na minha jornada e me ajudou a evoluir como estudante e profissional, meu muito obrigado.

O conhecimento é significativo por definição. É o produto significativo de um processo psicológico cognitivo (“saber”) que envolve a interação entre ideias “logicamente” (culturalmente) significativas, ideias anteriores (“ancoradas”) relevantes da estrutura cognitiva particular do aprendiz (ou estrutura dos conhecimentos deste) e o “mecanismo” mental do mesmo para aprender de forma significativa ou para adquirir e reter conhecimentos.

David Paul Ausubel

RESUMO

O ensino básico nas escolas brasileiras encontra-se muito defasado, sendo realizado para preparar os alunos apenas para responderem exercícios, sem se preocupar com a aprendizagem voltada para a cidadania, mesmo com uma legislação voltada para essa finalidade. A falta de preparo dos professores, as péssimas condições de trabalho e a desvalorização desses profissionais acabam por desencadear esse cenário caótico e, consequentemente, o desinteresse dos alunos para a área de ciências, em especial, a do Ensino de Física. Pensando na necessidade de o professor se qualificar para atender às demandas educacionais atuais, este trabalho apresenta uma proposta didática interativa para o ensino das energias cinéticas de rotação e rolamento. Com esse propósito, foi necessário desenvolver uma sequência didática (SD) baseada nas Unidades de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS), de Marco Antonio Moreira, a qual é influenciada pela Teoria de Aprendizagem Significativa (TAS) de David Paul Ausubel, para o ensino dessa temática, fazendo uso de um livro digital, que apresenta um *software* educacional gratuito de simulações virtuais dos fenômenos físicos abordados. A SD foi desenvolvida na turma de 1ª Série "A" do turno Matutino da Escola Estadual Professor Eliah Maia do Rêgo, em Parnamirim/RN, durante os meses de maio a agosto de 2024. Para isso, foi produzido o *ebook "Algodoo e a Dinâmica Rotacional"*, que aborda não só os conteúdos que foram utilizados na SD, mas toda a dinâmica rotacional com linguagem adaptada, principalmente, ao Ensino Médio e que traz esse programa como recurso mediador da aprendizagem. Durante a aplicação da SD, foi fundamental investigar os conhecimentos prévios dos alunos quanto às energias cinéticas de rotação e rolamento; promover a evolução da aprendizagem por meio do uso prático do *software*; estimular o interesse dos discentes pela disciplina por meio de uma experiência de aprendizagem significativa e avaliar a aplicação da sequência didática como instrumento de formação do conhecimento. Para a construção dos dados da pesquisa, a qual teve cunho qualitativo, os meios utilizados foram: aplicação de questionários individuais; manual de construção de laboratório virtual utilizando o *Algodoo* e observações relacionadas à participação dos alunos durante as atividades propostas em sala. Esses dados foram analisados em conformidade com os passos da construção de uma UEPS e, a partir dessa análise, foi possível identificar o desenvolvimento dos objetivos propostos, principalmente no que tange às percepções do aprendizado voltado para o contexto social dos discentes, como a importância do uso consciente da energia produzida para o desenvolvimento da sociedade atual, principalmente as que se utilizam, em alguma parte da sua produção, dos conceitos de energia rotacional. Assim, concluímos que a proposta didática foi exitosa, pois foi capaz de fornecer evidências de captação de significados, compreensão, capacidade de explicar e de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema, características essas que resumem o conceito de aprendizagem significativa, fazendo com que essa proposta forneça a eles a capacidade de criticidade e de tomada de decisões perante a sociedade, embasada em um conhecimento científico.

Palavras-Chave: Ensino de Física. Aprendizagem Significativa. *Algodoo*. Energia Cinética de Rotação. Energia Cinética de Rolamento.

ABSTRACT

The Basic Education in Brazilian schools is very outdated, being carried out to prepare students only to answer exercises without worrying about the acquisition learning focused on citizenship, even if with the legislation which aims at this goal. The lack of teachers' proficience; the poor working conditions and the devaluation of those professionals, as well, end up triggering this chaotic scenario, what unmotivates consequently the students' interest for the knowledge of science, especially in the teaching of Physics. Considering the needs for teachers to qualify themselves to meet current educational demands, this abstract presents an interactive didactic proposal for teaching the kinetic energy of rotation and rolling. For this matter, it was necessary to develop a didactic sequence (DS: Didatic Sequence) based on the Potentially Significant Teaching Units (PSTU), by Marco Antonio Moreira, which is influenced by the Meaningful Learning Theory (MLT) by David Paul Ausubel for a teaching approach related to this topic, using a digital book which presents free educational software for virtual simulations of the physical phenomena in progress herein. The DS was developed by being conducted for the students' classes of a 1st Grade level, group "A", during the morning shift at the Professor Eliah Maia do Rêgo public high School in Parnamirim, Rio Grande do Norte State, from May to July 2024. For that class activity, the e-book *"Algodoo and the Rotational Dynamics"* was achieved by addressing not only the contents that were used in the DS, but also all the rotational dynamics with an adaptable language, mainly, for High School series, which use the mentionable program as a resource to mediate the desirable learnability process. During the application of the SD, it was essential to investigate the students' prior knowledge regarding the kinetic energies of rotation and rolling for promoting the evolution of learning through the practical use of the software by stimulating the students' interest in the subject through a significant learning experience by also evaluating the application of the didactic sequence as an instrument for knowledge formation. To construct the research data, which had a qualitative nature, the procedures used were: application of individual questionnaires; a handbook for creating a virtual laboratory using Algodoo; and critical observations related to the students' participation during the activities assignment for classroom activities. These data were analyzed according to the steps for constructing a PSTU and, from this analysis, it was possible to identify the development of the proposed objectives, mainly regarding to the perceptions of learning focused on the social context of the students, such as the importance of the conscious use of the energy produced for the development of today's society, especially those that use, in some part of their production, the concepts of rotational energy. So, we conclude that the didactic proposal was successful, as it was able to provide evidence of capture of meanings, understanding, ability to explain and apply knowledge to solve problem situations, characteristics that summarize the concept of meaningful learning, making this proposal provide them the capacity for critical thinking and decision-making before society, based on scientific knowledge.

Keywords: Physics Teaching. Meaningful Learning. Algodoo. Rotational Kinetic Energy. Rolling Kinetic Energy.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Princípio da Assimilação de Ausubel 27
Tabela 2 - Equivalência entre acelerações linear e rotacional constantes 48
Tabela 3 - Momento de inércia de alguns corpos rígidos com densidade uniforme 75
Tabela 4 - Outras correspondências entre os movimentos de Translação e Rotação 110
Tabela 5 - Equivalência entre grandezas e equações lineares e rotacionais 114
Tabela 6 - Estrutura do *Ebook* 117
Tabela 7 - Informações relacionadas à aplicação do produto educacional 129
Tabela 8 - Informações sobre a aplicação da sequência didática 131
Tabela 9 - Comparativo da aplicação da SD com a UEPS de Moreira 133
Tabela 10 - Atividades e registros analisados 135
Tabela 11 - Descrição das atividades do 1º encontro 140
Tabela 12 - Descrição das atividades do 2º encontro 142
Tabela 13 - Descrição das atividades do 3º encontro 143
Tabela 14 - Descrição das atividades do 4º encontro 145
Tabela 15 - Descrição das atividades do 5º encontro 147
Tabela 16 - Descrição das atividades do 6º encontro 148
Tabela 17 - Descrição das atividades do 7º encontro 149
Tabela 18 - Descrição das atividades do 8º encontro 150
Tabela 19 - Descrição das atividades do 9º encontro 151
Tabela 20 - Perguntas do Pré-Teste I 157
Tabela 21 - Comparação dos Pré-Testes 161
Tabela 22 - Parâmetro de desempenho individual dos alunos nos seminários 166
Tabela 23 - Resultados dos Pré-Testes e Pós-Teste 175
Tabela 24 - Critérios de avaliação do aluno durante a SD 184

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Polia em movimento de rotação em relação a um eixo fixo 42
Figura 2 - Disco com rotação em sentido anti-horário 44
Figura 3 - Reta de referência ilustrando a variação da posição angular de um corpo rígido ... 45
Figura 4 - Sentido do vetor velocidade angular ω de um disco rígido 47
Figura 5 - Corpo rígido circular em rotação em sentido anti-horário, descrevendo um MCU 50
Figura 6 - Disco rígido com uma partícula em MCU 52
Figura 7 - Corpo rígido em movimento circular acelerado 52
Figura 8 - Transmissão de rotação entre polias 54
Figura 9 - Transmissão de rotação entre engrenagens 56
Figura 10- Momentos de inércia diferentes para corpos idênticos 59
Figura 11 - Alguns corpos rígidos homogêneos 60
Figura 12 - Barra fina homogênea de comprimento *L* e eixo central de rotação 61
Figura 13 - Barra fina homogênea dividida em elementos de massa infinitesimais 61
Figura 14 - Elemento infinitesimal de massa *dm* da barra distante *r* do eixo de rotação 61
Figura 15 - Barra fina homogênea com eixo central de rotação 63
Figura 16 - Barra fina homogênea com eixo de rotação em uma de suas extremidades 64
Figura 17 - Coroa circular com eixo de rotação no seu centro de massa 65
Figura 18 - Elemento infinitesimal de área da coroa circular 66
Figura 19 - Anel aberto com comprimento $2\pi r$ e largura dr 67
Figura 20 - Anel fino com eixo central de rotação 69
Figura 21 - Cilindro homogêneo vazado 69
Figura 22 - Disco homogêneo com eixo central de rotação 70
Figura 23 - Cilindro homogêneo de raio *R* 71
Figura 24 - Esfera homogênea girando em torno de um eixo fixo que passa pelo seu *CM* 71
Figura 25 - Cilindro homogêneo com momento de inércia *dI* 72
Figura 26 - Eixos paralelos de um corpo rígido 76
Figura 27 - Corpo rígido sofrendo a ação de uma força *F* 79
Figura 28 - Corpo rígido de massa m em trajetória retilínea do instante t_1 a t_2 82
Figura 29 - Corpo rígido de massa m em rotação preso à extremidade de uma barra fina 86
Figura 30 - Esfera homogênea em rolamento sobre um plano inclinado 88
Figura 31 - Esfera maciça homogênea rolando da esquerda para direita sem deslizamento 89

Figura 32 - Roda em rolamento com velocidade do centro de massa V_{CM} 89
Figura 33 - Combinação dos movimentos de rotação e translação puros de uma roda 90
Figura 34 - Roda de uma bicicleta em movimento para a direita. 91
Figura 35 - Movimento de rolagem como uma rotação pura 92
Figura 36 - Roda homogênea em rolamento em um plano inclinado 95
Figura 37 - Roda em movimento acelerado sem sofrer deslizamento 96
Figura 38 - Corpo redondo em rolamento suave ao longo de um plano inclinado 97
Figura 39 - Representação das forças que agem no corpo redondo da Fig. (38) 98
Figura 40 - Regra da mão direita para determinar a orientação do torque 101
Figura 41 - Regra da mão direita para produtos vetoriais (torque τ) 102
Figura 42 - Regra da mão direita para se obter a orientação do momento angular L 104
Figura 43 - Esfera homogênea em rotação em relação a um fixo que passa pelo seu *CM* 108
Figura 44 - Representação de um estudante girando em uma cadeira giratória. 112
Figura 45 - Patinador de gelo girando em torno do seu eixo vertical 113
Figura 46 - Representação de um atleta realizando um salto mortal 114
Figura 47 - QR *Code* dos tutoriais das simulações do *Algodoo* 119
Figura 48 - Captura de tela da página oficial do *Algodoo* na *internet* 121
Figura 49 - Ferramenta "Salvar e compartilhar cenários" no *Algodoo* e *Algebox* 122
Figura 50 - Página inicial do *Algodoo* com idioma Português Brasil instalado 122
Figura 51 - Ebook no *Word* 137
Figura 52 - Vídeo de simulação no *Algodoo* 137
Figura 53 - Apresentação da SD e do Produto Educacional 138
Figura 54 - Exibição dos vídeos sobre Energia 139
Figura 55 - Aplicação do Pré-Teste I 140
Figura 56 - Situação-Problema do Encontro 2 141
Figura 57 - Aplicação do Pré-Teste II 141
Figura 58 - Apresentação do *ebook* na íntegra 142
Figura 59 - Apresentação do *Algodoo* 143
Figura 60 - Aula expositiva de Energia Cinética de Rotação 144
Figura 61 - Usando o *Algodoo* na aula de Energia Cinética de Rotação 145
Figura 62 - Aula expositiva de Energia Cinética de Rolamento 146
Figura 63 - Usando o *Algodoo* na aula de Energia Cinética de Rolamento 146
Figura 64 - Apresentação individual de aluno no encontro 6 147
Figura 65 - Apresentação individual de aluno no encontro 7 148

Figura 66 - Aplicação do Pós-Teste 149
Figura 67 - *Feedback* do Pós-Teste 150
Figura 68 - Aplicação do Questionário Final 151
Figura 69 - Aplicação do Questionário Final 151
Figura 70 - Qualificação do Produto Educacional 152
Figura 71 - Modelo de Gráfico de Resultados de Pré-Teste 154
Figura 72 - Modelo de Gráfico de Resultados de Pós-Teste 155
Figura 73 - Gráfico dos resultados do Pré-Teste I 156
Figura 74 - Gráfico da média percentual dos resultados do Pré-Teste I 156
Figura 75 - Pré-Teste I de um aluno 158
Figura 76 - Aluna respondendo à situação-problema 159
Figura 77 - Aplicação do Pré-Teste II 160
Figura 78 - Gráfico dos resultados do Pré-Teste II 160
Figura 79 - Gráfico da média dos resultados do Pré-Teste II 161
Figura 80 - Tabela para os dados da simulação dos seminários 165
Figura 81 - Gráfico de desempenho nos seminários do encontro 6 166
Figura 82 - Gráfico de desempenho nos seminários do encontro 7 167
Figura 83 - Gráfico geral de desempenho nos seminários dos encontros 6 e 7 168
Figura 84 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 01 do Pós-Teste 171
Figura 85 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 02 do Pós-Teste 172
Figura 86 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 03 do Pós-Teste 172
Figura 87 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 04 do Pós-Teste 172
Figura 88 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 05 do Pós-Teste 172
Figura 89 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 06 do Pós-Teste 172
Figura 90 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 07 do Pós-Teste 173
Figura 91 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 08 do Pós-Teste 173
Figura 92 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 09 do Pós-Teste 173
Figura 93 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 10 do Pós-Teste 174
Figura 94 - Gráfico dos resultados do Pós-Teste 174
Figura 95 - Gráfico da média percentual dos resultados do Pós-Teste 174
Figura 96 - Gráfico da evolução temporal de aprendizagem 175
Figura 97 - Gráfico das respostas objetivas do Questionário Final 178
Figura 98 - Gráfico da média das respostas objetivas do Questionário Final 178
Figura 99 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 7 do Questionário Final 180

Figura 100 - Resposta de aluno referente às QUESTÕES 7 e 8 do Questionário Final..... 180
Figura 101 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 10 do Questionário Final..... 180
Figura 102 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 11 do Questionário Final..... 180
Figura 103 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 12 do Questionário Final..... 180
Figura 104 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 13 do Questionário Final..... 181
Figura 105 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 14 do Questionário Final..... 181
Figura 106 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 15 do Questionário Final..... 181
Figura 107 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 16 do Questionário Final..... 181
Figura 108 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 17 do Questionário Final..... 181
Figura 109 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 18 do Questionário Final..... 182
Figura 110 - Gráfico do quantitativo de respostas do Questionário Final..... 182
Figura 111 - Gráfico da média de respostas do Questionário Final..... 182
Figura 112 - Gráfico da nota de autoavaliação dos alunos..... 183
Figura 113 - Gráfico de frequências dos alunos..... 185
Figura 114 - Gráfico das médias das notas dos alunos..... 185

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Aprox.	Aproximadamente
Art.	Artigo
2D	Duas dimensões
Cap.	Capítulo
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEDTEC	Centro de Desenvolvimento Técnico
CM	Centro de Massa
COVID-19	*Coronavirus Disease* 2019
CNAT	Campus Natal-Central
DIAC	Diretoria Acadêmica de Ciências
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
Dr.	Doutor
Dra.	Doutora
Ebook	*Eletronic book*
Esc.	Escola
Eq.	Equação
Est.	Estadual
Fig.	Figura
IFES	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
IFRN	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Lab. Inf.	Laboratório de informática
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação
MEC	Ministério da Educação
MCU	Movimento Circular Uniforme
MNPEF	Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PPGFCT	Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica
PPGECT	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia
Prof.	Professor

Profa.	Professora
PROFCIAMB	Programa de Pós-Graduação em Rede Nacional para o Ensino das Ciências Ambientais
ProInfo	Programa Nacional de Tecnologia Educacional
QR *code*	*Quick Response Code*
rad	Radianos (medida de ângulo)
rev	Revoluções (medida de ângulo)
RN	Rio Grande do Norte
SBF	Sociedade Brasileira de Física
SD	Sequência didática
SI	Sistema Internacional de Unidades
Tab.	Tabela
TAS	Teoria de Aprendizagem Significativa
TICs	Tecnologias da Informação e Comunicação
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UEPS	Unidades de Ensino Potencialmente Significativa
Ufal	Universidade Federal de Alagoas
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFRN	Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UNIFAP	Universidade Federal do Amapá
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 19
2 REFERENCIAL TEÓRICO 24
2.1 A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA – A TEORIA DE AUSUBEL 24
2.1.1 Os Subsunçores ou Ideias-Âncora 26
2.1.2 Os Organizadores prévios 28
2.1.3 Condições para a Aprendizagem Significativa 28
2.1.4 Aprendizagem Mecânica 29
2.1.5 A Avaliação da Aprendizagem Significativa 30
2.2 UNIDADES DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVAS – UEPS 31
2.2.1 Construção de uma UEPS de Marco Antonio Moreira 31
3 REVISÃO DA LITERATURA 34
3.1 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL COM O SOFTWARE ALGODOO: REFRAÇÃO LUMINOSA, DE FABIANO FREIRE DA SILVA 34
3.2 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL COM O SOFTWARE ALGODOO: MOVIMENTOS HARMÔNICOS, DE SERGIO DAMASCENO DA SILVA 35
3.3 UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM BASE EM METODOLOGIAS ATIVAS POR MEIO DO ENSINO HÍBRIDO PARA O ENSINO DA ÓPTICA DA VISÃO E DO EFEITO FOTOELÉTRICO, DE DIEGO DE OLIVEIRA PEZZIN 36
3.4 O *SOFTWARE* ALGODOO COMO MATERIAL POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO PARA O ENSINO DE FÍSICA: SIMULAÇÕES E MUDANÇAS CONCEITUAIS POSSÍVEIS, DE ELOÁ DEI TÓS GERMANO 37
3.5 A INTEGRAÇÃO ENTRE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS E SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS PARA O ENSINO DA FÍSICA: LEVANTAMENTO DE TESES E DISSERTAÇÕES NACIONAIS NO PERÍODO DE 2009 A 2019, DE VALÉRIA CASTELO BRANCO DE SOUSA 38
3.6 O SOFTWARE ALGODOO COMO POSSIBILIDADE PARA O ENSINO DE FÍSICA, DE MICHEL CORCI BATISTA, ADRIANA DA SILVA FONTES, ROSELI CONSTANTINO SCHWERZ, MARCOS CESAR DANHONI NEVES E ELOÁ DEI TÓS GERMANO 39
3.7 CONSTRUINDO CONCEITOS UTILIZANDO UMA UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA (UEPS): O ENSINO DA POLUIÇÃO ATMOSFÉRICA, DE JUSCELINO REIS BARBOSA JUNIOR 40

4 DINÂMICA ROTACIONAL 42
4.1 ROTAÇÃO 42
4.1.2 As Grandezas de Rotação 43
4.2 CONEXÕES ENTRE AS VARIÁVEIS LINEARES E AS ANGULARES 48
4.2.1 Movimento Circular e Uniforme de Rotação 49
4.3 MOVIMENTOS CIRCULARES ACOPLADOS 54
4.4 ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO 57
4.4.1 Centro de massa de um corpo rígido 59
4.4.2 Momento de Inércia - Distribuição Contínua de Massa 60
4.4.3 Teorema dos Eixos Paralelos 76
4.5 TORQUE 79
4.6 TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO 82
4.6.1 Potência 86
4.7 ROLAMENTO 87
4.7.1 – Rolamento: uma combinação de Rotação e Translação 88
4.7.2 – Rolamento como uma Rotação Pura 92
4.8 ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO 93
4.9 AS FORÇAS DE ROLAMENTO 95
4.9.1 Atrito e Rolamento 95
4.9.2 Rolamento no Plano Inclinado 97
4.10 REVISANDO O TORQUE 100
4.11 MOMENTO ANGULAR 103
4.11.1 O Momento Angular e a Segunda Lei de Newton 105
4.11.2 Momento Angular de um Sistema de Partículas 107
4.11.3 Momento Angular de um Corpo Rígido 108
4.12 CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR 111
5 PRODUTO EDUCACIONAL 116
5.1 APRESENTAÇÃO DO *EBOOK* 116
5.2 O PROGRAMA *ALGODOO* 119
6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 124
6.1 A PESQUISA QUALITATIVA 124
6.2 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA 125
6.2.1 Informações sobre a proposta de aplicação do produto educacional 128
6.2.2 Informações sobre a proposta de aplicação da sequência didática 129

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES 135
7.1 A CONSTRUÇÃO DO EBOOK 136
7.2 DESCRIÇÃO DOS ENCONTROS 138
7.2.1 Encontro 1 - Apresentação da SD, do *Ebook* e Aplicação do Pré-Teste I 138
7.2.2 Encontro 2 - Exposição de Situação-Problema e Aplicação do Pré-Teste II ... 140
7.2.3 Encontro 3 - Introdução ao Algodoo 142
7.2.4 Encontro 4 - Aula Expositiva - Energia Cinética de Rotação 144
7.2.5 Encontro 5 - Aula Expositiva – Energia Cinética de Rolamento 145
7.2.6 Encontro 6 - Seminários do Laboratório Digital no *Algodoo* I 147
7.2.7 Encontro 7 - Seminários do Laboratório Digital no *Algodoo* II 148
7.2.8 Encontro 8 - Aplicação do Pós-Teste 149
7.2.9 Encontro 9 - *Feedback* do Pós-Teste e Aplicação do Questionário Final 150
7.3 ANÁLISE DO EBOOK 152
7.4 ANÁLISES DOS ENCONTROS 153
7.4.1 Análise e Discussões do Encontro 1 155
7.4.2 Análise e Discussões do Encontro 2 159
7.4.3 Análise e Discussões do Encontro 3 162
7.4.4 Análise e Discussões do Encontro 4 163
7.4.5 Análise e Discussões do Encontro 5 163
7.4.6 Análise e Discussões do Encontro 6 164
7.4.7 Análise e Discussões do Encontro 7 167
7.4.8 Análise e Discussões do Encontro 8 168
7.4.9 Análise e Discussões do Encontro 9 176
7.5 A AVALIAÇÃO DO ALUNO DURANTE A APLICAÇÃO DA SD 184
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS 187
REFERÊNCIAS 191
APÊNDICE A – PLANOS DE AULA 198
APÊNDICE B – SLIDES DE AULA 208
APÊNDICE C – TESTES DE CONHECIMENTO 212
APÊNDICE D – MANUAL DE LABORATÓRIO DIGITAL 226
APÊNDICE E – PLANILHAS DE TABULAÇÃO DE RESULTADOS 233
APÊNDICE F – PRODUTO EDUCACIONAL 236

1 INTRODUÇÃO

O ensino básico, no Brasil, apesar da busca da legislação educacional brasileira atual em nutrir competências e habilidades para que o estudante seja preparado para os desafios sociais contemporâneos (Brasil, 1996, 2000, 2012, 2018), ainda se encontra bastante defasado, estimulando, constantemente, a aprendizagem mecânica de conteúdos desatualizados (Moreira, 2017).

Esse tipo de aprendizagem, que busca incisivamente a repetição de exercícios e a memorização dos conteúdos, é bastante criticada por Freire (1987), quando julga que, nesse tipo de abordagem, o conhecimento é do tipo "bancário", o qual é "depositado" na cabeça dos alunos sem nenhuma preocupação com sua realidade social e de como a educação pode se fazer transformadora e libertadora.

Moreira (2021) acrescenta que é um absurdo, ainda nos dias de hoje, pensar em um ensino pautado exclusivamente para a testagem, buscando preparar apenas os alunos para resolver provas e que, em contrapartida, o ensino deve ser voltado para a cidadania e que os professores não devem concordar com esse tipo de abordagem.

Considerando a situação atual, Moreira (2017) enfatiza que o ensino de Física na educação básica, em consequência dos problemas educacionais contemporâneos, está em crise, principalmente no que tange a "falta ou despreparo dos professores, das más condições de trabalho, do reduzido número de aulas e da progressiva perda da identidade no currículo" (Moreira, 2017, p. 1).

A falta de preparo dos professores de Física, citada por Moreira (2017), pode fazer com que eles adotem práticas que criem nos alunos, principalmente aqueles que acabaram de ingressar no Ensino Médio e tiveram pouca ou nenhuma exposição à disciplina; uma sensação de incompetência e inaptidão para essa área, visto que já é bastante notório a falta de interesse de muitos alunos para as ciências naturais e exatas, fazendo com que o ensino de Física tenha bastante dificuldade em atrair a atenção desses estudantes (Correia, 2022).

Apesar das péssimas condições de trabalho enfrentadas pelos professores, é necessário que esses profissionais, principalmente na área de Física, busquem alternativas para atrair a atenção dos alunos e melhorar significativamente o ensino de Física atual, fazendo com que eles percebam que a compreensão dos fenômenos físicos vai além de um mecanismo matemático.

Considerando esse contexto, surgiu, então, a ideia de se construir um produto

educacional que fosse capaz de fornecer uma aprendizagem potencialmente significativa, em que professores e alunos possam fazer uso de um recurso computacional que almeje a compreensão dos fenômenos físicos de maneira mais simples e interativa, seja para consultas como material didático de apoio, ou para a sua aplicação em turmas do Ensino Médio por parte dos professores.

O produto educacional em questão corresponde em uma proposta de Sequência Didática, que contém um livro digital (*ebook*) chamado "*Algodoo e a Dinâmica Rotacional*", o qual descreve toda a dinâmica rotacional e cria laboratórios virtuais com a ajuda de um *software* educacional gratuito e específico de Física chamado *Algodoo*, que auxilia o usuário na visualização de conceitos abstratos, na resolução de problemas e na realização de atividades interativas de maneira muito simples. Como alternativa contrária à aprendizagem mecanizada, pensamos na construção de uma sequência didática (SD) seguindo os passos de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) de Moreira (2011), a qual é baseada na Teoria de Aprendizagem Significativa (TAS) de David Ausubel, que busca potencializar a aprendizagem do aluno partindo dos seus conhecimentos preexistentes.

Apesar de o livro digital abordar toda a dinâmica rotacional, houve a necessidade, por questão de delimitação, e para atender o tempo necessário de aplicação da sequência didática, de se usar apenas parte dele. Para Sousa, Oliveira e Alves (2021, p. 71), "a delimitação do tema consiste em fixar limites teóricos e externos sobre o tema a ser pesquisado" e sem esse recurso as ideias podem se perder em um contexto muito generalizado. Escolhemos, assim, os tópicos de energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento.

Para isso, propusemos o seguinte objetivo geral:

- desenvolver uma sequência didática interativa e potencialmente significativa para o ensino das energias cinéticas de rotação e rolamento, fazendo uso de um livro digital autoral como recurso principal, que traz como complemento a utilização de um *software* educacional gratuito chamado *Algodoo* para simulações práticas virtuais dos fenômenos físicos abordados.

E como objetivos específicos:

- produzir um *ebook* que aborde toda a dinâmica rotacional adaptada, principalmente, ao Ensino Médio e que traga o *Algodoo* como recurso mediador da aprendizagem por meio de um ambiente virtual de simulações físicas;

- promover a evolução da aprendizagem por meio do uso prático do *Algodoo*, permitindo

que os estudantes manuseiem e observem diretamente os conceitos de energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento no laboratório digital com o uso do *software* computacional;

- estimular o interesse dos alunos pela Física através de uma experiência de aprendizagem significativa, favorecendo a aplicação dos conhecimentos adquiridos para situações do dia a dia;

- avaliar a aplicação da sequência didática como instrumento de construção do conhecimento.

Apesar de o conteúdo abordado no livro digital (dinâmica rotacional) praticamente não ser trabalhado nos livros didáticos do ensino básico, os fenômenos relacionados a ele pertencem ao cotidiano do aluno e está contida nas diretrizes educacionais propostas para o ensino de Física (Brasil, 2012). Uma das possibilidades de esse tema ser deixado de lado nas obras didáticas é, talvez, a "incompatibilidade desse conteúdo com a base matemática usual dos estudantes do ensino médio" (Barbosa, 2016, p. 11).

Nesse contexto, a criação deste trabalho se justifica pela necessidade de tratar a dinâmica rotacional, em especial a energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento, com maior ênfase no ensino básico com o auxílio de um recurso tecnológico educacional gratuito e interativo, que, para o caso específico, trata-se do *Algodoo*, buscando fomentar o interesse dos estudantes pela disciplina de Física. Para isso, foi criado o livro digital que, além de outras vantagens, como a possibilidade da criação de sequências didáticas mediadas com o aplicativo educacional, por exemplo, traz toda a dinâmica rotacional de forma organizada, gradativa e com linguagem acessível, principalmente, para o Ensino Médio.

Para o embasamento teórico durante a realização da pesquisa que ajudou a construir as etapas deste trabalho, bem como a construção e aplicação da sequência didática, buscamos autores, além da legislação nacional educacional, que discutem os problemas e desafios no ensino das ciências, especificamente no ensino de Física, além de assuntos relacionados com a temática e a Teoria de Aprendizagem Significativa. Além de outros autores, podemos citar Ausubel (1968, 2003); Freire (1987); Vygostky (1991); Bogdan e Biklen (1994); Zabala (1998); Luckesi (1998, 2013); Gibbs (2009); Brasil (1996, 2000, 2012, 2018); Germano (2016); Martini *et al.* (2016); Barbosa (2016); Aguiar (2020); Barbosa Junior (2022); Batista *et al.* (2022); Bastos (2023); Halliday, Resnick e Walker (2016); Moisés (2002); Young e Freendman (2008) e, principalmente, Moreira (1982, 2011, 2012, 2015, 2017, 2020).

A pesquisa foi realizada dentro da abordagem qualitativa, a qual procuramos compreender as necessidades de aprendizagem dos alunos de acordo com o conhecimento já existente na sua estrutura cognitiva, com a finalidade de ancorar uma nova aprendizagem a partir dessas ideias. Para Rodrigues, Oliveira e Santos (2021, p. 158), "pesquisar qualitativamente é analisar, observar, descrever e realizar práticas interpretativas de um fenômeno a fim de compreender seu significado".

Durante a aplicação da SD, utilizamos instrumentos de coleta de dados por meio de questionários individuais de avaliação e pesquisa de satisfação, além de atividade coletiva de laboratório digital, os quais foram analisados e tabulados, estabelecendo sempre relações entre o procedimento de coleta e o referencial bibliográfico estudado. E, com a intenção de atender aos objetivos propostos, esta Dissertação de Mestrado está dividida em oito partes:

- PRIMEIRA PARTE - consiste nesta **Introdução**, onde foram apresentados as motivações, os objetivos e a justificativa que nos levaram a construção e aplicação do produto educacional.
- SEGUNDA PARTE - intitulada **Referencial Teórico**, trata dos principais conceitos relacionados à teoria de aprendizagem que foi utilizada na aplicação do produto educacional. Escolhemos a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, sob a ótica de Marco Antonio Moreira, autor das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS), que consiste na elaboração de uma sequência didática baseada na teoria de Ausubel.

- TERCEIRA PARTE - na **Revisão da Literatura**, levantamos trabalhos já realizados com o uso de programas computacionais educacionais, principalmente o *Algodoo*, como também trabalhos que fizeram uso das UEPS de Moreira para criação e aplicação da sua sequência didática. Aqui, buscamos mostrar que o nosso produto educacional é relevante e tem caráter diferenciado, o qual procuramos trabalhar com um conteúdo (dinâmica rotacional) de extrema importância para o cotidiano do aluno, mas pouco trabalhado no Ensino Médio.

- QUARTA PARTE - nos debruçamos, aqui, na fundamentação teórica intitulada **Dinâmica Rotacional**, a nível de graduação, abordada no livro digital (*Ebook Algodoo e a Dinâmica Rotacional*).

- QUINTA PARTE - apesar de o **Produto Educacional** se pautar no uso de um livro digital, esta parte da dissertação traz apenas a sua apresentação, a qual também destaca

uma breve motivação da sua criação, dos seus objetivos, os quais estão alinhados à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), e a razão da sua justificativa. Além disso, nesse local, também consta toda a estrutura do *ebook*, mostrando suas principais características; como também uma pequena apresentação do *Algodoo*, *software* que media a proposta didática abordada.

- SEXTA PARTE - neste ponto, traçamos os **Procedimentos Metodológicos** que utilizamos para aplicação do produto educacional. Aqui, além da caracterização da sequência didática utilizada e de onde o produto seria aplicado, traçamos todos os passos dos procedimentos metodológicos, descrevendo o que seria feito, aula a aula, todas as atividades e seus objetivos, sempre fazendo a sua relação com os passos das UEPS de Moreira.

- SÉTIMA PARTE - denominado **Resultados Alcançados e Discussões**, esta parte traz a descrição narrada fiel de todos os detalhes que ocorreram durante as etapas de aplicação do produto educacional e as devidas reflexões realizadas, considerando as informações coletadas com os instrumentos de coleta de dados e o referencial que embasa a temática estudada.

- OITAVA PARTE - a última parte consiste nas **Considerações Finais** sobre as reflexões realizadas que buscaram atender aos objetivos propostos, as quais revelaram a importância de se utilizar uma proposta didática diferenciada das comumente utilizadas em sala de aula para potencializar a aprendizagem do aluno e seu interesse pela disciplina de Física. O uso do *Algodoo*, nesse contexto, serviu para que o aluno pudesse verificar de maneira bem simplificada como o conteúdo estudado pode fazer sentido em seu contexto social a partir da visualização dos fenômenos físicos em um laboratório virtual no aplicativo.

Este trabalho ainda traz **Apêndices**, que contam, além do livro digital na íntegra, com materiais que foram elaborados durante a sua produção, como questionários, manual de construção de um laboratório virtual no *Algodoo* e planos de aula, por exemplo.

Sendo assim, a seguir, abordaremos o Referencial Teórico, onde debatemos sobre a teoria de aprendizagem que será utilizada para aplicação do produto educacional.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, trataremos dos principais conceitos relacionados à Teoria da Aprendizagem Significativa, de David Paul Ausubel (1918 - 2008), analisando, principalmente, essa teoria por meio da perspectiva de abordagem de Marco Antonio Moreira (1947 -), o qual possui um vasto conhecimento relacionado ao tema, produzindo e publicando, inclusive, vários livros e artigos a respeito.

É importante evidenciar que os conceitos aqui levantados não terão o objetivo de fazer uma ampla análise de todas as ideias produzidas pelos autores acerca dessa teoria, mas apenas aquelas que consideramos mais relevantes para o propósito desta pesquisa.

Iniciaremos fazendo a revisão de algumas obras dos autores para destacarmos os significados dos principais conceitos que envolvem a aprendizagem significativa, a qual representa nosso foco principal. Depois, faremos uma breve comparação entre à aprendizagem significativa com aprendizagem mecânica, com o propósito de destacar a grande importância da primeira.

Finalmente, terminaremos este capítulo mostrando o passo a passo de como construir e aplicar os princípios de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa, que é descrita por Moreira (2011). A construção dessa UEPS será de extrema relevância para aplicação do nosso Produto Educacional que será tratado mais adiante.

2.1 A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA – A TEORIA DE AUSUBEL

A teoria de Ausubel sobre os conceitos da aprendizagem significativa é descrita por ele desde o início da década de 1960, o qual defendia que a aprendizagem do aluno poderia ser potencialmente significativa se fossem trabalhados os conhecimentos prévios do aprendiz para alavancar novos conceitos. De acordo com Ausubel (2003, p. 71-72),

> A essência do processo de aprendizagem significativa, tal como já se verificou, consiste no facto de que novas ideias expressas de forma simbólica (a tarefa de aprendizagem) se relacionam àquilo que o aprendiz já sabe (a estrutura cognitiva deste numa determinada área de matérias), de forma não arbitrária e não literal, e que o produto desta interacção activa e integradora é o surgimento de um novo significado, que reflecte a natureza substantiva e denotativa deste produto interactivo. Ou seja, o material de instrução relaciona-se quer a algum aspecto ou conteúdo existente especificamente relevante da estrutura cognitiva do aprendiz, i.e., a uma imagem, um símbolo já significativo, um conceito ou uma proposição, quer a algumas ideias anteriores, de carácter menos específico, mas geralmente relevantes, existentes na

> estrutura de conhecimentos do mesmo.

Nesse sentido, a aprendizagem significativa, com base na teoria de Ausubel, é vista da seguinte forma:

> A *aprendizagem significativa* processa-se quando o material novo, ideias e informações apresentam uma estrutura lógica, interage com conceitos relevantes e inclusivos, claro e disponíveis na estrutura cognitiva, sendo por eles assimilados, contribuindo para uma diferenciação, elaboração e estabilidade. (Moreira; Masini, 1982, p. 4).

Apesar da importância de todas as formas de aprendizagem, como a cognitiva, a afetiva e a psicomotora, por exemplo, a teoria ausubeliana é baseada, principalmente, na teoria cognitiva, que se baseia na organização das informações na estrutura cognitiva do indivíduo. Esse tipo de aprendizagem, como já vimos, para Ausubel, denomina-se de aprendizagem significativa. Moreira e Masini (1982, p. 90) esclarece que

> A teoria de Ausubel focaliza, primordialmente, a aprendizagem cognitiva. Isto não significa, porém, que outros tipos de aprendizagem não sejam importantes ou que sejam simplesmente ignorados por Ausubel. Na verdade, tem fortes componentes afetivos [...]. A questão é que a teoria de Ausubel é cognitivista e, como tal, focaliza a aprendizagem cognitiva ou, mais especificamente, a aprendizagem significativa.

É importante ressaltar que as ideias de Ausubel para um ensino baseado na aprendizagem significativa surgiu em um período com grande influência do ensino modelado pela testagem, no comportamento dependente dos resultados de experiências e condicionamentos, o Behaviorismo, sem a preocupação no ensino focado na aprendizagem com significado. Moreira (2015, p. 1) fala em como a estrutura educacional vem, até os dias de hoje, moldada nesse tipo de teoria ao descrever que

> Em 1963, surgiu uma esperança: a teoria da aprendizagem significativa. Ao longo de cinquenta anos, autores e professores têm tentado divulgar e implementar essa abordagem focada na aprendizagem com significado, com compreensão, ao invés de resposta correta memorizada sem significado, sem compreensão. Mas, apesar desse esforço, o ensino parece estar cada vez mais voltado para a testagem.

Mesmo com a grande influência do Behaviorismo, Ausubel acreditava que o ensino baseado no cognitivo de maneira significativa seria mais consistente. Alguns autores

acreditaram nas ideias de Ausubel e levaram sua teoria adiante. Moreira, por exemplo, ao participar de um seminário no final da década de 1970, conheceu uma amiga (Masini) e, depois de uma boa conversa, concordaram que a teoria de Ausubel era pertinente e decidiram levar isso adiante (Moreira; Masini, 1982). Os autores afirmam, em relação a esse encontro, que a realização do seminário acabou confirmando a suspeita de que valeria escrever algo a respeito dessa teoria e, além disso, a grande maioria dos presentes eram professores universitários envolvidos em programas que trabalhavam com a melhoria do ensino e que nunca tinham ouvido falar em Ausubel ou tinha um conhecimento limitado da sua teoria (Moreira; Masini, 1982).

Apesar de Ausubel ser bastante desconhecido em alguns países, inclusive no seu país natal, os Estados Unidos, a abordagem ausubeliana poderia ser útil como referência teórica para uma organização de ensino (Moreira; Masini, 1982).

Outro nome bastante relevante em levar adiante a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, o qual é notadamente o seu principal adepto, é Joseph Donald Novak. Em um dos seus trabalhos, em parceria com Cañas, eles descrevem a teoria de aprendizagem significativa de Ausubel também como uma estrutura significativamente organizada e clara em que novas ideias surgem potencialmente a partir de conhecimentos prévios dos indivíduos (Novak; Cañas, 2010). Para eles,

> A ideia fundamental na psicologia cognitiva de Ausubel é que a aprendizagem se dá por meio da assimilação de novos conceitos e proposições dentro de conceitos preexistentes e sistemas proposicionais já possuídos pelo aprendiz. Essa estrutura de conhecimento de um determinado aprendiz é também chamada de estrutura cognitiva do indivíduo (Novak; Cañas, 2010, p. 11).

O conhecimento preexistente na estrutura cognitiva do indivíduo defendido pelos autores é chamado por Ausubel de subsunçor ou ideia-âncora. Trataremos mais efetivamente adiante.

2.1.1 Os Subsunçores ou Ideias-Âncora

A aprendizagem significativa, para Ausubel, representa uma organização estruturada das ideias na mente do indivíduo e que novas ideias podem ser aprendidas se esta estrutura organizada esteja bem clara, servindo como uma espécie de ancoragem para esses novos conceitos (Moreira; Masini, 1982).

A interação entre a estrutura cognitiva e a formação de novas ideias, para Ausubel (1968, p. 37-39), é denominada como uma experiência consciente, que, claramente articulada, surge quando alguns fatores como símbolos, sinais e outros termos potencialmente significativos são relacionados a essa estrutura e a nela incorporados.

O conceito mais relevante na teoria de aprendizagem de Ausubel é o da aprendizagem significativa. Nesse tipo de aprendizagem, o indivíduo assimila de uma forma mais contundente à medida que os novos conceitos interagem com as informações já armazenadas na sua estrutura cognitiva. Essas informações preexistentes no intelecto do indivíduo, para Ausubel, são chamadas de *subsunçores*. Moreira (2012, p. 2) descreve o significado de subsunçores, segundo a teoria de aprendizagem significativa de Ausubel, como

> [...] um conhecimento específico, existente na estrutura de conhecimentos do indivíduo, que permite dar significado a um novo conhecimento que lhe é apresentado ou por ele descoberto. Tanto por recepção como por descobrimento, a atribuição de significados a novos conhecimentos depende da existência de conhecimentos prévios especificamente relevantes e da interação com eles.

A ideia central da teoria de Ausubel é a de que o fator que mais influencia na aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe, sendo esse um aspecto fundamental para o seu conceito mais importante: a aprendizagem significativa (Moreira; Masini, 1982). Nesse sentido, Ausubel descreve o processo de subsunção por meio do que ele chama de "princípio da assimilação", o qual é simbolicamente representado da seguinte forma:

Tabela 1- Princípio da Assimilação de Ausubel

a				A		A' a'
Nova informação, potencialmente significativa.	→	Relacionada a e assimilada por	→	Conceito subsunçor existente na estrutura cognitiva.	→	Produto interacional (subsunçor modificado).

Fonte – Elaborada pelos autores, baseada em (MOREIRA; MASINI, 1982, p. 7).

Assim, a assimilação, conforme a teoria ausubeliana,

> [...] é um processo que ocorre quando um conceito ou proposição *a*, potencialmente significativo, é assimilado sob uma nova ideia ou conceito mais inclusivo, já existente na estrutura cognitiva, como um exemplo, extensão, elaboração ou qualificação do

> mesmo. Tal como sugerido no diagrama, não só a nova informação *a*, mas também o conceito de subsunçor *A*, com o qual ela se relaciona, são modificados pela interação. Além disso, *a'* e A' permanecem relacionados como co-participantes de uma nova unidade de A' a' que nada mais é do que o subsunçor modificado (moreira; Masini, 1982, p. 16).

Os subsunçores, quando organizados na estrutura cognitiva do aprendiz, cria um mecanismo de aprendizagem potencialmente significativa e são chamados por Ausubel de organizadores prévios, os quais veremos a seguir.

2.1.2 Os Organizadores prévios

As informações prévias estruturalmente organizadas no cognitivo do aprendiz, chamadas por Ausubel de subsunçores, podem, segundo ele, ser manipulavelmente organizadas no intelecto do indivíduo de modo que facilite na construção de novos conceitos. Essa estruturação que visa esses objetivos é chamada por Ausubel de organizadores prévios ou, simplesmente, organizadores, que são mais eficientes quando apresentados no início das atividades e, para serem úteis, precisam conter termos que sejam habituais aos alunos, de forma clara, organizada e com boa organização pedagógica (Moreira; Masini, 1982, p. 12-13).

Existem dois tipos de organizadores prévios: aquele que usado quando o aprendiz nada sabe sobre o conteúdo a ser estudado e esse é usado para criar nele uma gama de subsunçores familiares aos aspectos cognitivos do que que sejam ideais aos objetivos de aprendizagem potencialmente significativas; e aquele usado para quando o estudante já tem uma certa estrutura cognitiva relacionada aos objetivos de aprendizagem pretendidos, e o organizador servirá para criar nele outros subsunçores mais adequados e também significativamente potenciais (Moreira, 2011).

Os organizadores prévios são, portanto, materiais introdutórios, apresentados em um nível geral de abstração e formulados de acordo com o conhecimento do aluno para o seu nível de ensino, e precisam ser abordados do geral para o específico, partindo de uma generalização do conteúdo, passando por relações importantes e finalizando com o conteúdo específico a ser abordado. Esses organizadores costumam ser pensados quando o aprendiz não possui subsunçores adequados.

2.1.3 Condições para a Aprendizagem Significativa

Em relação aos conceitos apresentados até então sobre a aprendizagem significativa, há,

basicamente, duas condições para se obtê-la: a necessidade do material de aprendizagem utilizado ser potencialmente significativo e a fundamental obrigação de o aprendiz apresentar uma predisposição para aprender.

O material de aprendizagem (livros, aulas, aplicativos...) devem ter significado lógico, ou seja, precisa se associar de forma não-arbitrária e não-literal a uma estrutura cognitiva adequada). Além disso, o aprendiz carece dispor em sua estrutura cognitiva de subsunçores expressivos com as quais esse material possa se relacionar (Moreira, 2012). Isso significa que "o material deve ser relacionável à estrutura cognitiva e o aprendiz deve ter o conhecimento prévio necessário para fazer esse relacionamento de forma não-arbitrária e não-literal" (Moreira, 2012, p. 8).

Nesse sentido, é de extrema importância compreender que não existem materiais significativos, mas potencialmente significativos, pois a significação está nas pessoas, não nos materiais (Moreira, 2012).

2.1.4 Aprendizagem Mecânica

A aprendizagem mecânica se baseia no método de ensino em que os conteúdos são dados de maneira repetitiva, focada na memorização e sem nenhum compromisso com os conhecimentos preexistentes de maneira lógica na estrutura cognitiva do aprendiz, os chamados subsunçores. Nela, a aprendizagem é automática, não significativa, em que o conhecimento é armazenado de maneira arbitrária e literal, fazendo com que a pessoa seja apenas capaz de reproduzir, mecanicamente, o que aprendeu, sem um significado real.

Esse tipo de aprendizagem vai em desencontro com a TAS, a qual enfatiza a importância dos conhecimentos prévios do indivíduo de modo que ele consiga estabelecer uma conexão lógica com os conceitos que deverão aprender.

A aprendizagem leva em consideração apenas a simples memorização dos conteúdos, contrariando a baseada nos conhecimentos prévios bem-organizados na estrutura cognitiva do aprendiz, é chamada por Ausubel (1968) de aprendizagem mecânica, as quais possuem pouca ou nenhuma relação com essas informações já estabelecidas e organizadas na estrutura cognitiva do indivíduo. É aquela praticamente sem significado, totalmente decorada, servindo apenas para as avaliações, sendo esquecida logo após. É a conhecida popularmente como decoreba, muito utilizada pelos alunos e basicamente são as usadas e incentivadas nas escolas (Moreira, 2012).

2.1.5 A Avaliação da Aprendizagem Significativa

De modo geral, a avaliação no contexto escolar é muito mais baseada no aspecto comportamental do aluno, se ela sabe ou não sabe, se está certo ou errado, do sim ou não. Esse tipo de avaliação é, geralmente, mecânica e não leva em consideração as informações que os alunos já sabem para fazê-los adquirir novos conhecimentos. Nesse contexto, a avaliação é muito mais behaviorista do que construtivista, determinando de maneira expressiva como se dão as práticas docentes no cotidiano escolar (Moreira, 2012).

Em relação de como deve ser a avaliação da aprendizagem em contradição a que vem sendo usada nas instituições de ensino atuais, a avaliação da aprendizagem significativa "implica outro enfoque, porque o que se deve avaliar é a compreensão, captação de significados, capacidade de transferência do conhecimento a situações não-conhecidas, não-rotineiras" (Moreira, 2012, p.24).

Apesar de a proposta de Ausubel para a avaliação aprendizagem ser mais radical, em que, para ele, a melhor maneira de evitar a simulação da aprendizagem significativa é propor ao aprendiz uma situação nova, não familiar, que requeira máxima transformação do conhecimento adquirido, Moreira, apesar de grande adepto da TAS de Ausubel, chama a atenção para esse radicalismo, quando diz que a ideia proposta do autor

> Não parece ser essa a melhor saída pois se o aluno não é acostumado a enfrentar situações novas não é adequado propô-las no momento da avaliação (somativa, no caso). Situações novas devem ser propostas progressivamente, ao longo do processo instrucional. Nesse caso, seria natural incluí-las nas avaliações. (Moreira, 2012, p. 24).

Essa nova perspectiva não é uma tarefa simples de ser adotada, pois o aluno está ambientado a ser avaliado de maneira predominantemente mecânica, com pouco significado daquilo que ele aprendeu e do que levou ele a aprender. É preciso que que essa ideia seja inserida de forma progressiva.

Portanto, na avaliação significativa, o aprendiz precisa ser observado de forma individualizada, de maneira formativa e recursiva, estabelecendo resultados lógicos daquilo que aprendeu e permitindo que ele refaça quantas vezes forem necessárias as suas tarefas de aprendizagem. Esse processo deve se dar ao longo da sua evolução cognitiva, não se pautando apenas na memorização de conteúdos para uma determinada atividade. O processo precisa ser construtivista e capaz de fazer com que o aluno aprenda de maneira expressiva, levando em consideração as informações preexistentes na sua estrutura cognitiva (Moreira, 2012).

2.2 UNIDADES DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVAS – UEPS

As Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) representam uma sequência didática criada pelo autor Marco Antonio Moreira fundamentada na Teoria da Aprendizagem Significativa. Nela, Moreira (2011) sugere passos para a sua construção, apresenta exemplos e um glossário com termos técnicos utilizados.

Essas UEPS possuem a intenção de contribuir para modificar, pelo menos em parte, uma estrutura de aprendizagem mecânica que é predominantemente utilizada pelas escolas (Moreira, 2011). Nesse contexto, o autor, em relação à aprendizagem mecânica, sugere que:

> As teorias de aprendizagem sugerem outras abordagens. Os resultados da pesquisa básica em ensino também, mas nem umas nem outros chegam às salas de aula. Não se trata aqui de culpar psicólogos educacionais, educadores, pesquisadores, professores e alunos, mas o fato é que o modelo da narrativa é aceito por todos – alunos, professores, pais, a sociedade em geral – como "o modelo" e a aprendizagem mecânica como "a aprendizagem". Na prática, uma grande perda de tempo. (MOREIRA, 2011, p. 2).

Assim, levando em consideração que as condições necessárias para que o aprendiz tenha uma aprendizagem significativa, os materiais utilizados precisam ser potencialmente significativos, além de o indivíduo carecem ter predisposição para aprender. Nessa circunstância, mostraremos, conforme descrito por Moreira (2011), os princípios, os aspectos sequenciais (passos) e os aspectos transversais da construção de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa.

2.2.1 Construção de uma UEPS de Marco Antonio Moreira

O objetivo do desenvolvimento de uma UEPS é ser facilitadora da aprendizagem significativa em relação aos procedimentos de tópicos específicos e propositivos (Moreira, 2011). Para o autor, "Só há ensino quando há aprendizagem e esta deve ser significativa; ensino é o meio, aprendizagem significativa é o fim; materiais de ensino que busquem essa aprendizagem devem ser potencialmente significativos" (Moreira, 2011, p.2).

Moreira, em seu artigo sobre a construção de uma UEPS, defende que, entre outros princípios, a aprendizagem significativa é influenciada pelos conhecimentos prévios do aprendiz, sendo essa a variável que mais interfere nesse aspecto. Nesse tipo de aprendizagem, a interação entre o ensino e o objeto da aprendizagem precisa ser construtivista e é o aluno

quem decide o que deseja aprender (Moreira, 2011). O professor precisa estabelecer situações-problemas para que haja o estabelecimento de uma nova aprendizagem a partir desses conhecimentos preexistentes, de maneira crítica, não mecanizada e relacionada com o seu contexto social, fazendo com que o sujeito seja observado e avaliado durante todo o contexto em que se dá a proposta de interação de ensino-aprendizagem (Moreira, 2011).

Na busca de construir uma UEPS que atenda aos princípios da aprendizagem significativa, Moreira (2011) estabelece oito passos sequenciais para esse procedimento:

- 1 – definição do tópico específico a ser abordado;
- 2 – coletar informações sobre os conhecimentos prévios do aluno, por meio de discussões, questionários, entre outros;
- 3 – para organizar os conhecimentos prévios dos alunos, propor situações-problemas;
- 4 – com foco na participação coletiva dos alunos, apresentar o conteúdo a ser ensinado;
- 5 – retomar o conteúdo com maior nível de complexidade, com a possibilidade de se usar meios computacionais alternativos;
- 6 – propor novos desafios de forma integradora, podendo fazer uso de recursos computacionais;
- 7 – avaliar o aluno de forma contínua;
- 8 – verificar se a SD atendeu aos objetivos da sua proposta.

Durante todos esses passos,

> [...] os materiais e as estratégias de ensino devem ser diversificados, o questionamento deve ser privilegiado em relação às respostas prontas e o diálogo e a crítica devem ser estimulados. [...] como tarefa de aprendizagem, em atividades desenvolvidas ao longo da UEPS, pode-se pedir aos alunos que proponham, eles mesmos, situações-problema relativas ao tópico em questão. [...] embora a UEPS deva privilegiar as atividades colaborativas, a mesma pode também prever momentos de atividades individuais (Moreira, 2011, p.5).

Nos pontos tratados e relacionados acima, houve um resumo acentuado do texto de Moreira (2011), pois apresar de esses aspectos serem, definitivamente, um manual de como

deve ser feita a elaboração dessa sequência didática com base nesses passos, eles podem ser consultados, na íntegra, no seu artigo.

Suprimimos os diagramas e os mapas mentais que estão presentes na proposta do autor, pois trabalharemos apenas com questionários para levantamento de dados durante a aplicação do produto educacional que será tratado mais adiante.

A seguir, abordaremos alguns trabalhos já realizados acerca do tema de estudo do produto educacional que discutiremos neste trabalho.

3 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo, trataremos sobre alguns estudos relacionados ao propósito do trabalho aqui realizado, que busca, apesar de não possuir um caráter singular e inovador, criar uma sequência didática para uso de um *software* computacional (*Algodoo*) de simulações em duas dimensões (2D) de fenômenos físicos.

Apesar deste trabalho não ser, como dito, revolucionário, ele apresenta uma característica própria: o seu produto educacional. Esse produto consiste em uma proposta didática que utiliza um objeto a ser aplicado em sala de aula, que se trata de um livro digital (*ebook*) chamado "*Algodoo e a Dinâmica Rotacional*", feito de forma integralmente autoral, dividido em doze capítulos, abordando desde as principais grandezas do movimento de rotação até a conservação do momento angular.

A unicidade do produto educacional mencionada está diretamente relacionada com a produção do livro digital totalmente no aplicativo *Word*, que faz parte do pacote de aplicativos do *Microsoft Office*, desde o seu texto como também a criação de figuras, equações, tabelas, marcadores de interatividade entre as partes do livro, *links* e *QR codes* para acessos externos a vídeos e materiais relacionados ao *software Algodoo*, além de exercícios dos conteúdo abordados nos capítulos e tarefas propostas em formato de laboratório virtual, com o uso do simulador computacional. E, para diferenciar este trabalho de outros já produzidos que tratam do *software*, buscamos abordar conteúdos que não foram, ou pouco foram, tratados em outras obras.

A seguir, selecionamos alguns trabalhos e textos sobre a importância do uso de *softwares* computacionais no contexto escolar, principalmente o *Algodoo*, como também da construção de uma sequência didática baseada nas UEPS de Moreira (2011).

3.1 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL COM O SOFTWARE ALGODOO: REFRAÇÃO LUMINOSA, DE FABIANO FREIRE DA SILVA

O trabalho intitulado "Simulação com o software Algodoo: refração luminosa" é um material desenvolvido por Fabiano Freire da Silva como Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF), oferecido pela Sociedade Brasileira de Física (SBF), em parceria com o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN), sob a orientação do Prof. Dr.

Melquisedec Lourenço da Silva.

Nesse trabalho, os autores abordam o tema refração luminosa e consiste em um conjunto de orientações de sugestões de atividades para se trabalhar com o *software Algodoo* em sala de aula e é um material desenvolvido ao longo do curso de mestrado. A aplicação do produto educacional dos autores foi realizada em uma turma de segunda série do Ensino Médio de uma escola pública estadual localizada na capital do estado do Rio Grande do Norte (RN), Natal, e tem como objetivo geral

> [...] descrever a aplicação de um produto educacional em sala de aula da segunda série do ensino médio, além de discutir e analisar os resultados alcançados com o uso de simulações computacionais criadas no software Algodoo, com a intenção de demonstrar fenômenos de refração luminosa. (Silva; Silva. 2018, p. 13).

Os autores, para aplicação do produto, fundamentam-se na Teoria de Aprendizagem Significativa de Ausubel, traçam um caminho metodológico para a sequência didática, apresentam resultados e discussões relativos às aulas dadas na turma e, nas considerações finais, concluem que o uso do *software* na sala de aula modifica para melhor a maneira com que os alunos encaram o estudo da disciplina, tornando-os mais críticos e reflexivos.

3.2 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL COM O SOFTWARE ALGODOO: MOVIMENTOS HARMÔNICOS, DE SERGIO DAMASCENO DA SILVA

O trabalho de título “Simulação com o software Algodoo: MOVIMENTOS HARMÔNICOS” é um material desenvolvido por Sergio Damasceno da Silva, orientado pelo Prof. Dr. Melquisedec Lourenço da Silva, como Produto Educacional, em forma de livro digital, apresentado em Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação do MNPEF, oferecido pela SBF, em parceria, como no trabalho descrito anteriormente, com o IFRN.

O produto trata do tema Movimentos Harmônicos, sendo composto “em um conjunto de orientações, na forma de sugestões de atividades, para se trabalhar com o software algodoo em sala de aula” (Silva; Silva, 2018, p. 8), desenvolvido ao longo do curso de Mestrado.

O texto do livro, apesar de não ser considerado pelos autores como um manual do *Algodoo*, apresenta tutoriais de manuseio de criações de simulações para a prática didática direcionadas principalmente para professores e alunos das disciplinas Ciências e Física. E, por se tratar de um livro sugestões de práticas, não se baseia em teoria de aprendizagem alguma,

cabendo ao professor adaptar à realidade que achar necessária e conveniente no momento, apesar de a sua aplicação, pelos autores, necessitar de uma das teorias de aprendizagem.

Dividido em várias sugestões de atividades, os autores, nas considerações finais do livro esperam que "esse produto possa contribuir para a prática pedagógica nas aulas de Física, e que esse material sirva de apoio ao livro didático adotado pelo professor, para que ele possa ir além das informações estáticas ali expostas" (Silva; Silva, 2018, p. 81).

3.3 UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM BASE EM METODOLOGIAS ATIVAS POR MEIO DO ENSINO HÍBRIDO PARA O ENSINO DA ÓPTICA DA VISÃO E DO EFEITO FOTOELÉTRICO, DE DIEGO DE OLIVEIRA PEZZIN

O trabalho de conclusão de curso (TCC) "Uma proposta de sequência didática com base em metodologias ativas por meio do ensino híbrido para o ensino de óptica da visão e do efeito fotoelétrico" refere-se a uma Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física do MNPEF, oferecido pela SBF, em parceria com o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo (IFES), Campus Cariacica, de autoria de Diego de Oliveira Pezzin, com orientação do Prof. Dr. Luiz Otavio Buffon e coorientação do Prof. Me. Robson Leone Evangelista.

A dissertação atenta-se a apresentar uma sequência didática para o ensino da óptica da visão e sua conexão com o efeito fotoelétrico por meio de uma sequência didática baseada na Teoria de Aprendizagem Significativa de Ausubel e, devido à pandemia do Coronavírus (COVID-19), os autores realizam algumas adaptações à metodologia de ensino escolhida que, no caso, foi a da Aprendizagem Ativa do Ensino Híbrido, para adequarem-se às restrições de saúde impostas pela escola e pelo Estado do Espírito Santo.

No meio de outras atividades compostas pela sequência didática, está o uso de programas gratuitos de computador, como, entre outros, o *Algodoo*, utilizado pelo aluno e produzido pelo professor, para a criação de problemas visuais no olho humano. Como resultado, os autores relatam que

> Os resultados da pesquisa apontaram que houve uma boa participação dos alunos no desenvolvimento das atividades além de evidências de indícios de aprendizagem dos assuntos desenvolvidos com um aumento significativo de questões corretas no pós-teste em relação ao pré-teste. Ao final, um questionário de opinião revelou uma boa aceitação das atividades por parte dos alunos. (Pezzin, 2022, p.6).

Apesar do problema de saúde, a sequência didática foi aplicada durante dez encontros

em uma turma da terceira série do ensino médio na escola Técnica CEDTEC – Ensino e Soluções Didáticas, localizada no município de Serra, no Espírito Santo, durante o segundo trimestre de 2021.

3.4 O *SOFTWARE* ALGODOO COMO MATERIAL POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO PARA O ENSINO DE FÍSICA: SIMULAÇÕES E MUDANÇAS CONCEITUAIS POSSÍVEIS, DE ELOÁ DEI TÓS GERMANO

"O *software* Algodoo como material potencialmente significativo para o Ensino de Física: simulações e mudanças conceituais possíveis" diz respeito a uma Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia (PPGECT), da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campus de Ponta Grossa, de autoria de Eloá Dei Tós Germano, com orientação do Prof. Dr. Marcos Cesar Danhoni Neves.

No seu trabalho, Eloá fala da importância, no mundo atual, e precisando ser inserida de forma adequada, dos recursos tecnológicos quando fala que

> Em pleno século XXI, nossas escolas foram invadidas por todos os tipos de tecnologias, computadores, tablets, celulares, etc, e diante de mundo de possibilidades, novidades e informações tecnológicas em que vivemos é inegável admitir a necessidade de inseri-las em nossas práticas pedagógicas. (Germano, 2016, p. 15).

A autora acrescenta que as escolas podem ter a possibilidade de usar essa tecnologia com alguma teoria de aprendizagem que fuja do modelo tradicional comumente consumida nas instituições de ensino. Ela sugere a TAS de David Ausubel como referência que se encaixa perfeitamente para a situação, pois

> As necessidades pedagógicas essenciais para estimular a formação de um aluno mais participativo, crítico e consciente do mundo em que vivemos, podem ser casadas com diversas teorias de aprendizagem que fogem do modelo tradicional, porém, as ideias apresentadas pela Teoria de Aprendizagem Significativa de David Ausubel se encaixam de maneira bem ajustada satisfazendo essas necessidades. (Germano, 2016, p. 16).

Diante das dificuldades enfrentadas para o Ensino de Física, além da necessidade de se usar a tecnologia na prática pedagógica, a autora vê a possibilidade de que laboratórios virtuais serem usados para contribuir de forma significativa na alfabetização científica dos alunos. Para isso, como objetivo geral do seu trabalho, a autora escreve que busca "verificar a adequação e

a compreensão dos fenômenos físicos relacionados à cinemática e dinâmica por meio da produção e aplicação de simulações virtuais" (Germano, 2016, p. 17).

Com a ideia de se usar laboratórios virtuais em suas aulas, foi fundamental a procura por parte de Eloá de *softwares* acessíveis que pudessem explanar com simplicidade os conceitos de cinemática e dinâmica. A escolha do *Algodoo*, nesse cenário, se mostrou adequada, fazendo com que ela utilize o programa computacional em suas aulas com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e, assim, construir um manual didático para facilitar o acesso ao material para professores e acadêmicos da área.

A dissertação de Eloá se estrutura desde os problemas do Ensino de Física nas escolas, até as conclusões obtidas da aplicação do produto, baseada na Teoria de Aprendizagem Significativa de Ausubel. A autora finaliza seu trabalho dizendo que "ao fim das atividades, grande parte dos alunos já se portavam diferente durante os questionamentos sobre as situações físicas, assumiam hipóteses mais elaboradas do que no início das atividades (Germano, 2016, p. 77).

3.5 A INTEGRAÇÃO ENTRE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS E SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS PARA O ENSINO DA FÍSICA: LEVANTAMENTO DE TESES E DISSERTAÇÕES NACIONAIS NO PERÍODO DE 2009 A 2019, DE VALÉRIA CASTELO BRANCO DE SOUSA

O trabalho "A integração entre as atividades experimentais e simulações computacionais para o Ensino de Física: levantamento de teses e dissertações nacionais no período de 2009 a 2019", representa uma Monografia feita por Valéria Castelo Branco de Sousa, do Curso de Especialização em Ensino de Física, da Universidade Federal do Amapá (UNIFAP), com orientação e coorientação Prof. Dr. Victor Montero Del Águila e Prof. Me. Erveton Pinheiro Pinto, respectivamente.

O autor, convencido da importância das atividades experimentais e computacionais para o Ensino de Física, faz, no seu trabalho, um levantamento de trabalhos científicos com essa temática na base de dados de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) entre os anos de 2009 e 2019, encontrando três teses e vinte e duas dissertações.

Ao final, depois de analisar os trabalhos encontrados, Valéria chega à conclusão de que a utilização combinada das atividades experimentais e computacionais se mostra como uma opção animadora, pois todos os autores das obras avaliam o método de ensino de forma positiva

(Sousa, 2021). Entretanto, segundo a autora, é preciso avaliar isso de forma cuidadosa, tendo em vista que a quantidade de publicações nessa área é relativamente pequena.

3.6 O SOFTWARE ALGODOO COMO POSSIBILIDADE PARA O ENSINO DE FÍSICA, DE MICHEL CORCI BATISTA, ADRIANA DA SILVA FONTES, ROSELI CONSTANTINO SCHWERZ, MARCOS CESAR DANHONI NEVES E ELOÁ DEI TÓS GERMANO

A obra "O software Algodoo como possibilidades para o Ensino de Física" é um livro que trabalha na divulgação das potencialidades do *Algodoo* em situações de ensino de Física, que permite aos alunos buscarem os conceitos que possam surgir de situações práticas e construídas, tornando-os mais engajados e criativos em sala de aula (Batista *et al.*, 2022).

O *software*, segundo os autores, "insere-se numa proposta de aprendizagem construtivista, proporcionando, pela simulação, uma ampla possibilidade de aprendizado efetivo diante das situações prováveis dos diferentes fenômenos que formam o universo físico" (Batista *et al*., 2022).

Uma das autoras do livro, Eloá Dei Tói Germano, foi a pioneira do uso do *Algodoo* em meio educacional no Brasil, quando, em 2016, defendeu sua Dissertação de Mestrado de título "O software Algodoo como material potencialmente significativo para o Ensino de Física: simulações e mudanças conceituais possíveis" no PPGECT da UTFPR. O orientador do seu trabalho, já mencionado anteriormente neste capítulo, o Prof. Dr. Marcos Cesar Danhoni Neves, também é um dos autores da obra. Claramente, os resultados e as discussões da dissertação os motivaram na escrita do livro, uma vez que, de fato, o programa possui fácil acesso e é uma ferramenta poderosíssima que auxilia os professores de Física e Ciências nas suas práticas pedagógicas.

Apesar de O *Algodoo* ser um dos *softwares* educacionais mais utilizados por professores na Europa e nas Universidades dos Estados Unidos para ensinar conceitos de Física através de simulações, o seu uso é, como já dito, muito recente aqui no Brasil.

O livro ora tratado, muito provavelmente, é, em território brasileiro, o material mais bem elaborado quando se refere ao uso do *Algodoo* em sala de aula, pois se trata de um manual muito bem construído, com riqueza de detalhes e imagens, acerca do uso das funcionalidades do programa e o passo a passo da construção de muitas simulações virtuais de Física em diversos conteúdos da disciplina. Segundo os autores,

> Esse simulador é utilizado para o ensino de física e permite estudar diversos

> fenômenos de áreas diversas como Cinemática, Dinâmica, Óptica, Fluidos e Teoria Cinética dos gases entre outros, tendo sempre a opção de alterar a restituição dos corpos, o atrito com a superfície e com o ar, a força gravitacional, a textura, cor, distância e inúmeros outros recursos que permitem ao usuário desenvolver diversas atividades e relacionar a influência das variáveis físicas envolvidas. Outra característica positiva é que o usuário pode alterar a frequência das simulações podendo adequar a capacidade de cada computador (Batista *et al.*, 2022, p. 1).

Essa obra é, provavelmente, bastante consumida como material de apoio por muitos professores e alunos no processo de ensino-aprendizagem por se tratar de um manual de acesso gratuito referente a um programa de fácil acesso, que se adapta às configurações de praticamente qualquer computador e por ser bastante intuitivo. Ademais, também serve como base de conhecimento de alunos de programas de graduação e pós-graduação que se propõem a fazerem suas pesquisas direcionadas à temática.

3.7 CONSTRUINDO CONCEITOS UTILIZANDO UMA UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA (UEPS): O ENSINO DA POLUIÇÃO ATMOSFÉRICA, DE JUSCELINO REIS BARBOSA JUNIOR

Como a sequência didática que será utilizada para aplicação do produto educacional será baseada nas UEPS de Moreira (2011), para finalizar a revisão de trabalhos relacionados a programas computacionais em meio educativo, principalmente o *Algodoo*, apresentamos o trabalho de título "Construindo conceitos utilizando uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS): o ensino da poluição atmosférica", elaborado por Juscelino Reis Barbosa Junior como Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Rede Nacional para o Ensino das Ciências Ambientais (PROFCIAMB), em parceria com a Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), orientado pela Profa. Dra. Kátia Aparecida da Silva Aquino.

O autor busca, nesse trabalho "desenvolver uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS), a fim de dialogar e construir conceitos sobre poluição atmosférica com estudantes da educação básica no Ensino fundamental anos Finais" (Barbosa Junior, 2022, p.7). Para isso, ele tece, inicialmente, um diagnóstico conceitual sobre a temática e aborda, posteriormente, as UEPS ligadas ao contexto do meio ambiente, buscando a formação indivíduos críticos.

Por fim, Barbosa Junior (2022) faz um desenho metodológico enraizado no trabalho de Moreira (2011), criando uma sequência didática fundamentada nos principais pontos e passos do seu trabalho e constrói suas considerações finais falando que o trabalho "atingiu o propósito de integrar ciências, meio ambiente e formação crítica do cidadão (Barbosa Junior, 2022, p. 73).

Sobre esse último ponto, o autor ainda acrescenta que os resultados da construção da UEPS

> [...] atingiu o propósito de integrar ciências, meio ambiente e formação crítica do cidadão. Além disso, também se configurou como um recurso pedagógico para o ensino da redução da poluição atmosférica. O que demonstra que a temática pode desenvolver valores e costumes mais globais a partir de uma interação mais equilibrada no espaço em que os estudantes estão inseridos" (Barbosa Junior, 2022, p. 73).

Assim, percebemos que o autor constrói uma sequência didática baseada nas UEPS de Moreira (2011) para aplicação de um produto educacional e que atingiu aos objetivos que se propôs a atingir. Esse caminho é semelhante à que será usada para aplicação do produto educacional que será abordado mais adiante.

Finalizando, portanto, as análises de todas as obras deste capítulo, vimos que todos os autores obtiveram êxito nas aplicações dos recursos escolhidos para construção dos seus trabalhos, promovendo, para alguns (trabalhos de mestrado), uma melhoria significativa no aprendizado e no interesse dos seus alunos pelas aulas, o que demonstrou que o uso de aplicativos digitais, principalmente o *Algodoo*, se apresentou eficaz nos objetivos pretendidos e nos resultados esperados. Além disso, a escolha das sequências didáticas, do programa a ser utilizado nelas, assim como as características dos modelos de trabalhos analisados (Produtos Educacionais do MNPEF, principalmente), se conectam com os mesmos objetivos deste trabalho, o que valida o possível potencial do tipo de pesquisa escolhida.

4 DINÂMICA ROTACIONAL

Neste capítulo, iremos nos debruçar sobre a fundamentação teórica abordada no produto educacional (*Ebook Algodoo* e a Dinâmica Rotacional) que será apresentado mais adiante.

Apesar de esse ser um conteúdo bastante importante para a formação do aluno de Ensino Médio, ele, praticamente, não é encontrado de maneira aprofundada nos livros didáticos para esse nível, o que reforça mais a necessidade dessa abordagem.

4.1 ROTAÇÃO

Rotação é o movimento de giro de um corpo ou uma partícula em torno de um ponto ou eixo fixos, podendo ou não ter um movimento linear somado a esse corpo ou partícula.

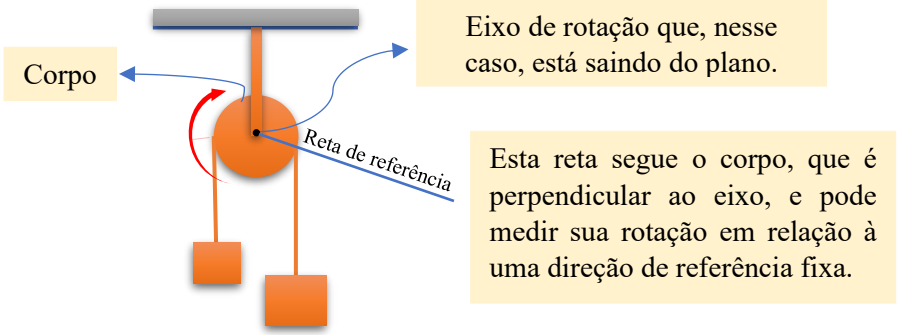
Para entender melhor, imagine um disco girando em torno de seu centro. O disco está em movimento de rotação, mas não está se movendo para frente ou para trás. Ele está apenas girando em torno de seu próprio eixo.

O movimento de rotação é caracterizado por três grandezas:

- Ângulo – medida do quanto um objeto girou em torno de seu eixo.
- Velocidade angular – taxa de mudança do ângulo de um objeto.
- Aceleração angular – taxa de mudança da velocidade angular de um objeto.

A rotação é uma parte fundamental da mecânica e é aplicada em diversos contextos, como, por exemplo, a rotação da Terra sobre seu eixo, que é responsável pela sucessão de dia e noite. O movimento de engrenagens em máquinas também é um exemplo de rotação. O movimento de rotação um disco em relação de seu centro é outro um exemplo típico de movimento de rotação.

Figura 1 - Polia em movimento de rotação em relação a um eixo fixo



Fonte: Elaborada pelos autores.

4.1.2 As Grandezas de Rotação

Para nossa análise, iremos restringir nosso foco à rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo. Um corpo rígido é aquele que gira mantendo todas as suas partes interconectadas e sem sofrer alterações em sua forma. Um eixo fixo é um ponto de referência que não se move. Ele é utilizado para descrever o movimento de rotação de um corpo rígido.

A figura 1 (Fig. 1) ilustra uma polia executando um movimento de rotação em torno de um eixo fixo. Durante esse movimento, todos os pontos da polia percorrem trajetórias circulares cujo centro é o próprio eixo de rotação. Além disso, todos os pontos da polia descrevem o mesmo ângulo durante o mesmo intervalo de tempo.

O movimento de linear de um corpo é chamado de translação. Se houver apenas o movimento linear, sem que haja o de rotação, obviamente, trata-se de uma translação pura.

Imagine uma fila de pessoas andando em linha reta. A distância percorrida por cada pessoa é a mesma no mesmo intervalo de tempo, ou seja, todos os pontos da fila gastam o mesmo tempo para percorrer a mesma distância. Esse tipo de movimento é chamado de translação pura.

As correspondentes angulares das grandezas lineares serão tratadas em seguida.

4.1.2.1 Posição Angular

A posição angular de uma reta é definida como o ângulo formado por essa reta em relação a uma direção fixa que é considerada como a posição angular zero. Na Fig. (2), a posição angular, representada por θ, é medida em relação ao semieixo x positivo.

O ângulo θ pode ser expresso da seguinte forma:

$$\theta = \frac{s}{r}, \tag{4.1.1}$$

em que θ é a posição angular do corpo em um determinado instante em relação a reta de referência, s o comprimento de um arco de circunferência formado entre o eixo positivo de x (posição angular zero) até a reta de referência, e r o raio da circunferência formada pela trajetória circular.

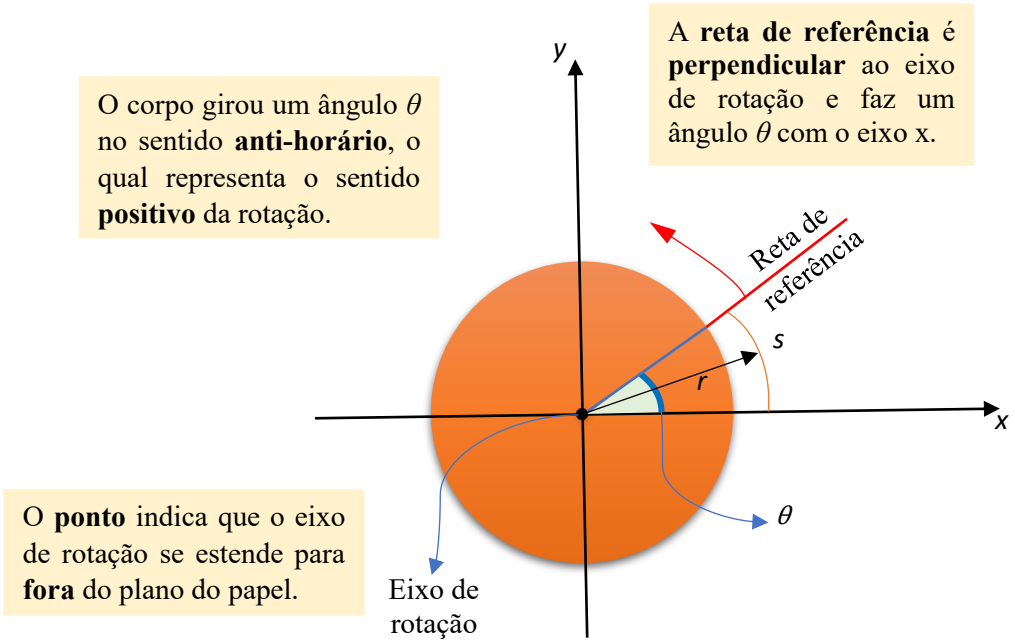
Um ângulo definido na forma da equação (4.1.1) [eq. (4.1.1)] é medido em radianos (*rad*) e não em revoluções (*rev*) ou em graus. Sendo a razão entre duas medidas de mesma unidade, o radiano não possui dimensão.

Sabendo que uma rotação completa equivale a um ângulo de 360º, a um comprimento $2\pi r$ e a uma revolução, podemos estabelecer uma relação de equivalência entre essas medidas a partir da eq. (4.1.1):

$$360º = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\ rad = 1\ rev. \tag{4.1.2}$$

Com os resultados da eq. (4.1.2), é possível converter qualquer valor entre as medidas dos ângulos fazendo uma simples regra de três.

Figura 2 - Disco com rotação em sentido anti-horário



Fonte: Elaborada pelos autores.

4.1.2.2 Deslocamento Angular

Se o disco da Fig. (2) gira em torno do eixo fixo de rotação, fazendo com que a reta de referência mude da posição angular θ_1 para θ_2, o corpo sofre uma variação na sua posição angular e, portando, descreve um deslocamento angular $\Delta\theta$ expresso por:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1, \tag{4.1.3}$$

sendo $\Delta\theta$ a variação da posição angular ou deslocamento angular (medida em radianos), θ_1 a posição angular inicial, e θ_2 a posição angular final.

É importante estabelecer, como mostra a figura anterior, que o sentido de rotação do

corpo, assim como o seu deslocamento angular, é positivo no sentido horário de rotação e negativo, no sentido anti-horário.

4.1.2.3 Velocidade Angular

Considere que um corpo em movimento de rotação está na posição angular θ_1, no instante t_1, e em θ_2, em t_2, como na Fig. (3) a seguir. O módulo da velocidade angular média do corpo nesse intervalo de tempo é definido como:

$$\omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}. \tag{4.1.4}$$

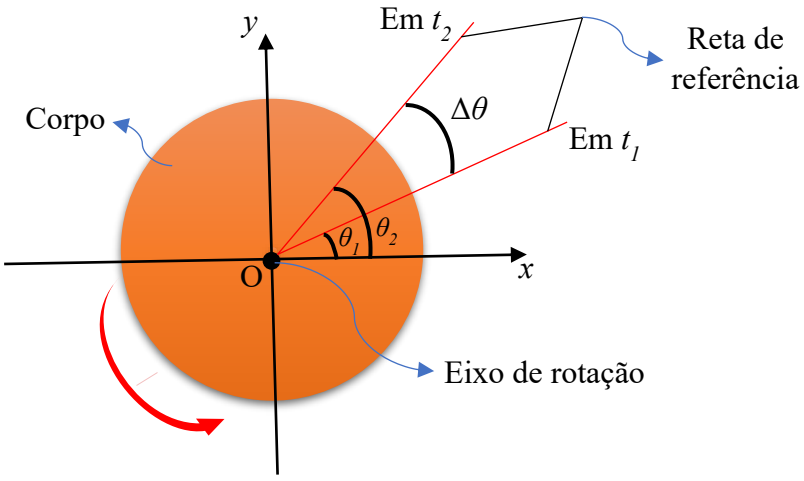
Como $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ e $\Delta t = t_2 - t_1$,

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \tag{4.1.5}$$

em que ω_m é a velocidade angular média desse corpo (medida em *rad/s*) e $\Delta\theta$ é o deslocamento angular que acontece durante o intervalo de tempo Δt.

A velocidade angular instantânea desse corpo é o limite da razão da eq. (4.1.5) quando o intervalo de tempo Δt tende a zero. Assim, se conhecermos um certo ângulo em função do tempo $\theta(t)$, podemos calcular a velocidade angular ω por derivação.

Figura 3 - Reta de referência ilustrando a variação da posição angular de um corpo rígido



Fonte: Elaborada pelos autores.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \tag{4.1.6}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \tag{4.1.7}$$

em que $d\theta$ é a variação infinitesimal angular e dt, a variação infinitesimal de tempo.

Uma outra forma de se calcular o ângulo $\theta(t)$, é usar a eq. (4.1.7) e fazer o processo inverso da derivação, ou seja, a integração:

$$d\theta = \omega dt, \tag{4.1.8}$$

$$\int d\theta = \int \omega \, dt. \tag{4.1.9}$$

4.1.2.4 Aceleração Angular

Quando a velocidade angular de um corpo, com o passar do tempo, sofre variações, ou seja, não é constante, o corpo possui aceleração angular.

O módulo da aceleração angular média de um corpo em rotação pode ser obtido da seguinte forma:

$$\alpha_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}, \tag{4.1.10}$$

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \tag{4.1.11}$$

em que α_m é a intensidade da aceleração angular média (em *rad/s²*) e $\Delta\omega$ a variação da velocidade angular no intervalo de tempo Δt.

Já o módulo da aceleração angular instantânea é o limite da razão do resultado da eq. (4.1.9) quando Δt tende a zero:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \tag{4.1.12}$$

Se conhecermos a velocidade angular instantânea em função do tempo $\omega(t)$, podemos calcular a intensidade da aceleração angular instantânea por derivação:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}, \tag{4.1.13}$$

em que $d\omega$ é a variação infinitesimal da velocidade angular e dt, a variação infinitesimal de tempo.

Uma outra forma de se calcular a velocidade angular instantânea $\omega(t)$, é usar a eq.

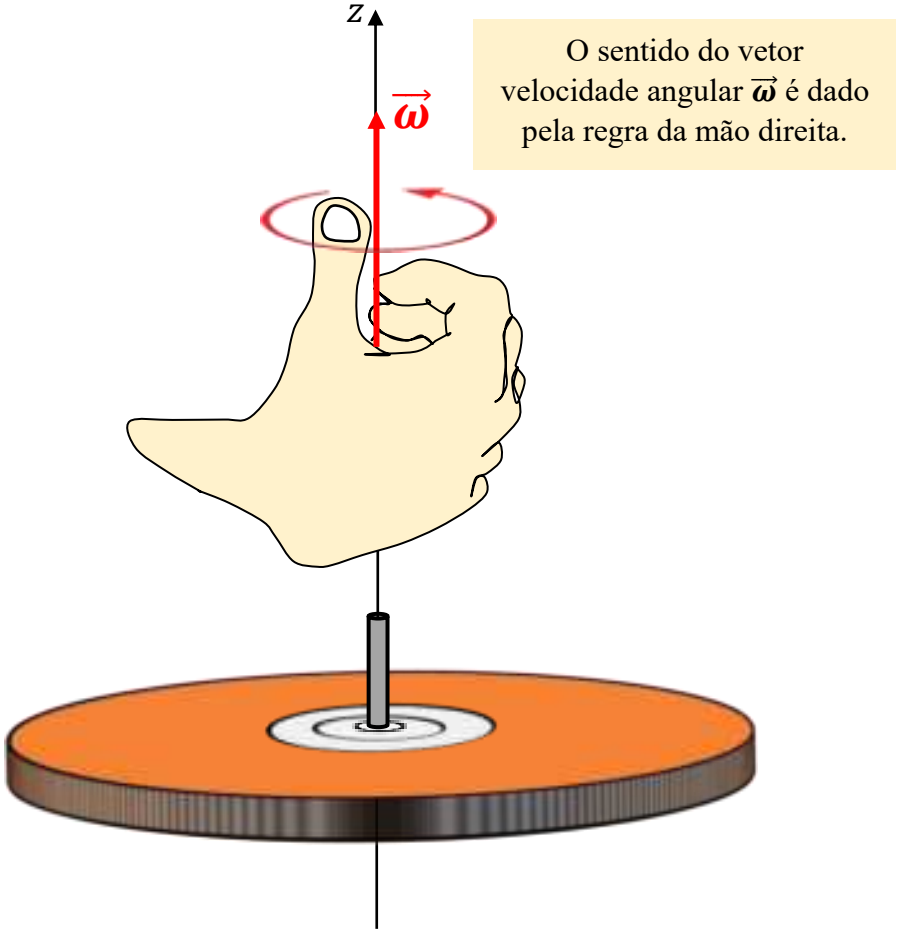
(4.1.10) e fazer o processo inverso da derivação, ou seja, a integração:

$$d\omega = \alpha dt, \tag{4.1.14}$$

$$\int d\omega = \int \alpha \, dt\,. \tag{4.1.15}$$

É IMPORTANTE verificar que a velocidade angular pode ser expressa como uma grandeza vetorial e o sentido do vetor velocidade angular é dado pela regra da mão direita, se estendendo sempre ao longo do eixo de rotação. Para determinar seu sentido, basta estender o polegar direito ao longo do eixo de rotação e girar os demais dedos no mesmo sentido de giro do corpo.

Figura 4 - Sentido do vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ de um disco rígido



Fonte: Elaborada pelos autores.

Uma ressalva importante é necessária aqui: para um deslocamento angular considerável não podem tratados como vetores, pois, na soma vetorial, a ordem dos vetores é irrelevante e as dimensões de um corpo são consideráveis no caso de deslocamento, dependendo da posição inicial que se encontram e da ordem das rotações. Para simplificar, podemos girar um livro três

vezes seguidas com rotações de 90º cada. A posição final do livro dependerá para que lado o livro sofrerá os giros. Para que em duas ou mais situações diferentes os deslocamentos angulares sejam iguais, os giros precisariam sofrer giros exatamente iguais.

4.1.2.5 Aceleração Angular Constante

Em movimentos de translação pura, as equações que descrevem movimentos com aceleração linear constante têm equivalentes nas equações que descrevem movimentos de rotação pura com aceleração angular constante.

Vamos demonstrar um par de equações (aceleração linear constante e aceleração angular constante) e generalizar para as demais situações, considerando $t_1 = 0$ e $t_2 = t$:

- $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \Delta v = a\Delta t \rightarrow v_2 - v_1 = a(t_2 - t_1) \rightarrow v_2 = v_1 + at$, (para $t_1 = 0$);
- $\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \rightarrow \Delta \omega = \alpha \Delta t \rightarrow \omega_2 - \omega_1 = \alpha(t_2 - t_1) \rightarrow \omega_2 = \omega_1 + \alpha t$, (para $t_0 = 0$).

A tabela a seguir discrimina a correspondência entre as equações angulares e as equações lineares para intensidades de acelerações constantes:

Tabela 2 - Equivalência entre acelerações linear e rotacional constantes

Equação Linear	Equação Angular	Nº da Equação Angular
$v_2 = v_1 + at$	$\omega_2 = \omega_1 + \alpha t$	(4.1.16)
$\Delta S = v_1 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\Delta \theta = \omega_1 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	(4.1.17)
$S_2 = S_1 + v_1 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta_2 = \theta_1 + \omega_1 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	(4.1.18)
$v_m = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$	$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$	(4.1.19)
$v_2^2 = v_1^2 + 2a\Delta S$	$\omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\alpha \Delta \theta$	(4.1.20)

Fonte: Elaborada pelos autores, baseada em (HALLIDAY, 2016, Vol. 1, p. 590).

4.2 CONEXÕES ENTRE AS VARIÁVEIS LINEARES E AS ANGULARES

Analisamos, anteriormente, a relação entre as grandezas de movimentos linear e angular em um movimento circular. Consideremos, agora, uma partícula que se move ao longo de uma circunferência com velocidade escalar constante. Essa partícula está realizando um movimento

circular uniforme (MCU).

No MCU, a velocidade escalar linear da partícula é constante, ou seja, o módulo da velocidade é sempre o mesmo, e sua direção é sempre tangente à trajetória circular, que também é perpendicular ao raio.

Vamos imaginar um disco girando em torno de um eixo fixo. Cada ponto do disco descreve uma circunferência em torno do eixo. Elas completam uma volta no mesmo intervalo de tempo, resultando em uma velocidade angular constante ω. No entanto, a velocidade escalar linear de cada ponto do disco é diferente em relação à distância do eixo de rotação.

Para relacionar as grandezas lineares e angulares de um movimento rotacional, precisamos considerar essas grandezas em função do raio da trajetória circular, o qual é perpendicular ao eixo fixo de rotação.

4.2.1 Movimento Circular e Uniforme de Rotação

No MCU, o tempo necessário para um corpo ou partícula completar uma volta se chama período T.

Por ou lado, a frequência f em um movimento circular e uniforme indica quantas vezes um objeto gira em torno de um ponto central em um determinado intervalo de tempo. Quanto maior a frequência, mais rápido o objeto gira.

A frequência é calculada dividindo-se o número de voltas n por um intervalo de tempo Δt:

$$f = \frac{n}{\Delta t}. \tag{4.2.1}$$

Considerando apenas uma volta completa, a eq. (4.2.1) se torna:

$$f = \frac{1}{T}. \tag{4.2.2}$$

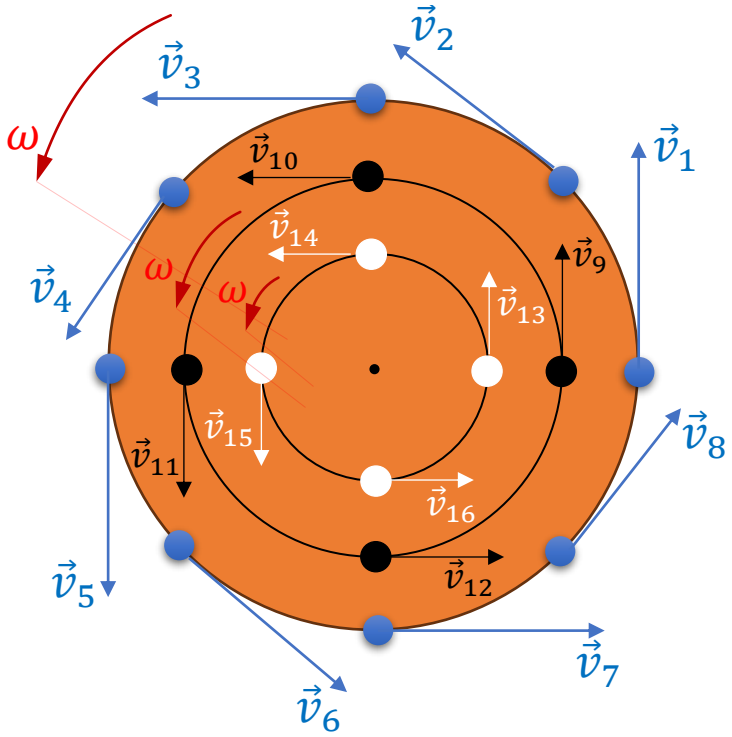
E, assim, podemos concluir que a frequência f é o inverso do período T e vice-versa.

4.2.1.1 A Velocidade Linear

A Fig. (5) mostra que a direção da velocidade linear de um corpo em MCU é sempre tangente à trajetória. Isso significa que o corpo está sempre se movendo nessa direção. O módulo da velocidade linear, por sua vez, é, em cada ponto, proporcional ao raio da trajetória.

Quanto mais afastado o ponto estiver do centro da trajetória, maior será o módulo da velocidade linear.

Figura 5 - Corpo rígido circular em rotação em sentido anti-horário, descrevendo um MCU



Fonte: Elaborada pelos autores.

Assim, de acordo com a Fig. (5), podemos dizer que, em módulo:

- $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = v_6 = v_7 = v_8$;
- $v_9 = v_{10} = v_{11} = v_{12}$;
- $v_{13} = v_{14} = v_{15} = v_{16}$.

Para encontrar a equação que nos permite calcular a intensidade da velocidade linear em função da velocidade angular, podemos partir da eq. (4.1.1):

$$s = \theta r. \tag{4.2.3}$$

Derivando a eq. (4.2.3) em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r. \tag{4.2.4}$$

Acontece que ds/dt é o módulo da velocidade linear v, e $d\theta/dt$ é a velocidade angular ω, que, no corpo em MCU, é constante em qualquer ponto. Assim, substituindo essas

informações na eq. (4.2.4):

$$v = \omega r. \tag{4.2.5}$$

O resultado acima serve para calcular o módulo da velocidade linear instantânea em cada ponto de um corpo rígido em um corpo que gira com eixo central de rotação com velocidade angular constante. Para uma volta completa, podemos considerar que a eq. (4.1.5), a qual nos permite calcular a velocidade angular média de um corpo em rotação, pode ser substituída no resultado acima, uma vez que, no MCU, a velocidade angular média é igual à instantânea em cada ponto, pois não há variação.

$$v = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} r. \tag{4.2.6}$$

Para uma volta completa, $\Delta\theta = 360^{\circ} = 2\pi\ rad$ e $\Delta t = T$. Assim,

$$v = \frac{2\pi}{T} r. \tag{4.2.7}$$

Como $f = 1/T$,

$$v = 2\pi r f, \tag{4.2.8}$$

em que v é a velocidade linear escalar, em *m/s,* no ponto considerado, e f, a frequência de giro do corpo.

Partindo da eq. (4.2.5), também podemos escrever a velocidade angular, que é constante em qualquer ponto do corpo, em função da velocidade linear escalar independentemente do ponto considerado:

$$\omega = \frac{v}{r}. \tag{4.2.9}$$

Substituindo a eq. (4.2.8) na eq. (4.2.9), obtemos a velocidade angular ω em qualquer ponto do corpo em função da sua frequência de rotação f:

$$\omega = \frac{2\pi r f}{r}, \tag{4.2.10}$$

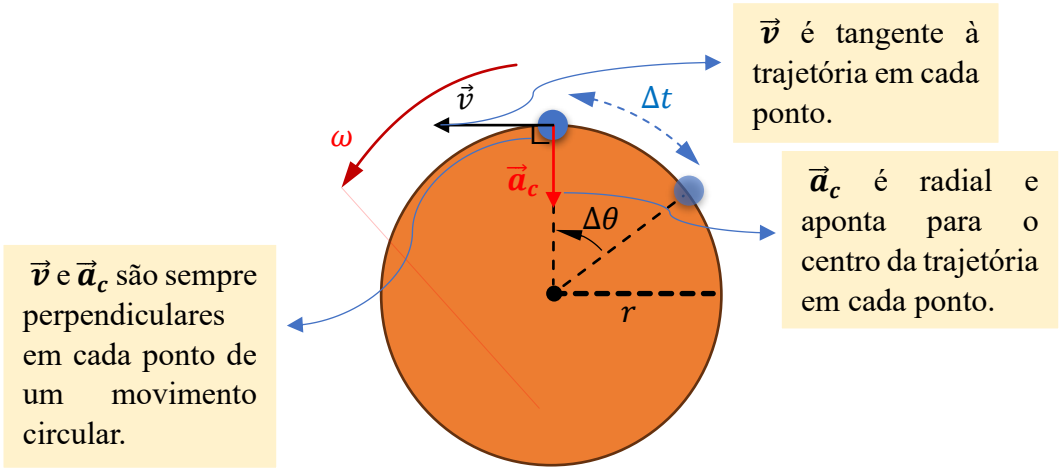
$$\omega = 2\pi f. \tag{4.2.11}$$

4.2.1.2 Aceleração no Movimento Circular

Apesar de, no MCU, o módulo da velocidade linear ser uniforme, há uma mudança de

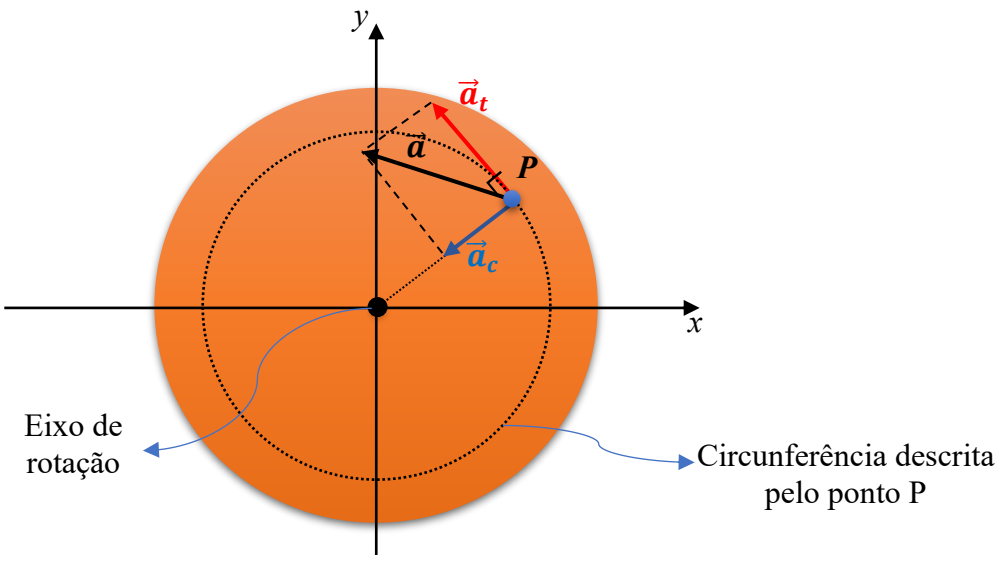
direção durante a trajetória circular. A grandeza física responsável pela variação da velocidade é a aceleração, que é composta por duas componentes. Uma delas é a aceleração centrípeta $\vec{a}_c$, que é a componente radial da aceleração, responsável pela mudança da direção e do sentido da velocidade linear em cada ponto. A outra componente da aceleração, que no MCU é nula, responsável pela variação do módulo da velocidade linear, é a aceleração tangencial $\vec{a}_t$, que possui a mesma direção da velocidade linear.

Figura 6 - Disco rígido com uma partícula em MCU



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 7 - Corpo rígido em movimento circular acelerado



Fonte: Elaborada pelos autores

Como já vimos, a aceleração centrípeta é radial, responsável pela mudança de direção e sentido da velocidade linear, é perpendicular ao vetor velocidade linear, aponta para o centro da trajetória circular e seu módulo é dado por:

$$a_c = \frac{v^2}{r}, \tag{4.2.12}$$

sendo v o módulo da velocidade linear e r o raio da trajetória circular. Como $v = \omega r$:

$$a_c = \frac{(\omega r)^2}{r}, \tag{4.2.13}$$

$$a_c = \frac{\omega^2 r^2}{r}, \tag{4.2.14}$$

$$a_c = \omega^2 r. \tag{4.2.15}$$

Substituindo novamente $v = \omega r$, podemos, ainda, escrever a aceleração centrípeta em função das velocidades angular e linear:

$$a_c = \omega \,.\, \omega r, \tag{4.2.16}$$

$$a_c = \omega v. \tag{4.2.17}$$

Derivando a eq. (4.2.5) em relação ao tempo, com r constante, obtemos a equação da aceleração tangencial, uma vez que dv/dt é o módulo da componente da aceleração que é tangencial à trajetória circular a_t (em *m/s²*), e $d\omega/dt$ é a aceleração angular α (em *rad/s²*):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r, \tag{4.2.18}$$

$$a_t = \alpha r \tag{4.2.19}$$

Como já dito, e mostrado na Fig. (7), a aceleração linear $\vec{a}$ de um ponto *P,* que pertence a um corpo rígido em rotação, possui uma componente centrípeta $\vec{a}_c$ e, se o movimento de rotação for acelerado, contendo, portanto, uma aceleração angular não nula, a aceleração linear também possui uma componente tangencial $\vec{a}_t$. Assim, a aceleração linear $\vec{a}$ (aceleração resultante) corresponde à soma vetorial das suas componentes radial e tangencial, de modo que seu módulo pode ser calculado por meio do Teorema de Pitágoras (componentes ortogonais):

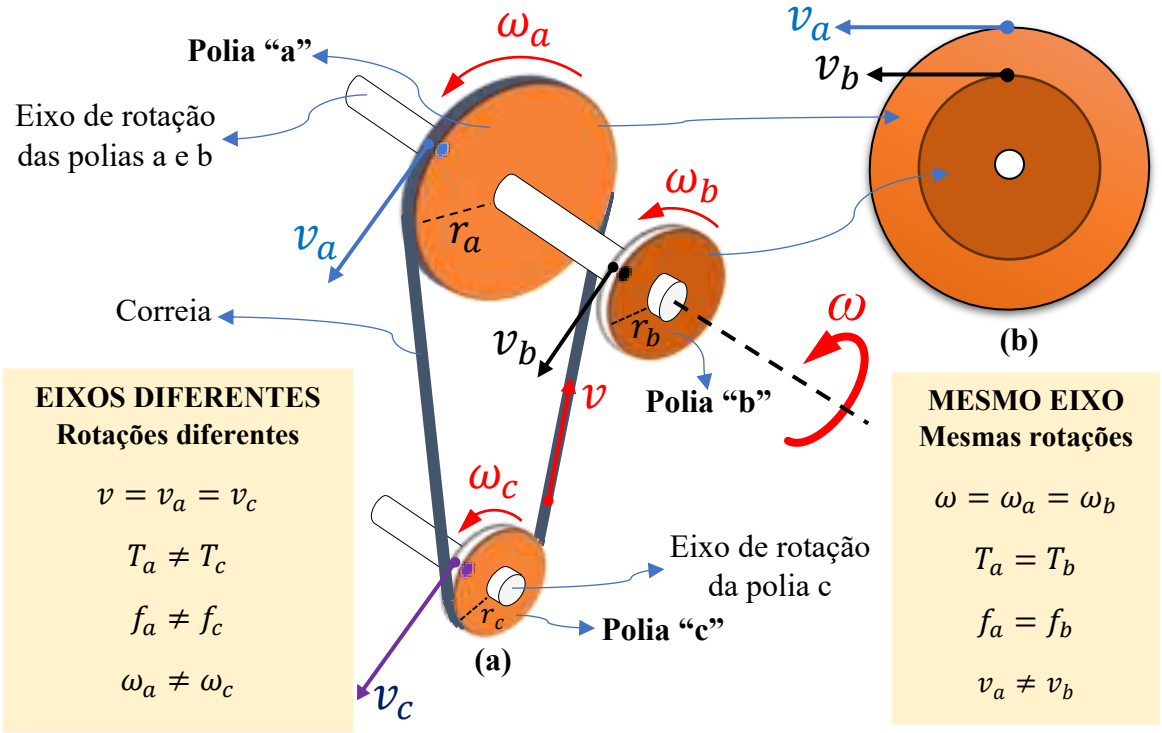
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_t, \tag{4.2.20}$$

$$a^2 = a_t^2 + a_c^2. \tag{4.2.21}$$

4.3 MOVIMENTOS CIRCULARES ACOPLADOS

Em diversas situações, nos deparamos com mecanismos que funcionam em conjunto como partes integrantes de um todo. No contexto dos motores de automóveis, por exemplo, polias e outros componentes rotativos são conectados entre si através de correias, cintas ou mesmo contato direto, utilizando o eixo do motor para criar algum efeito prático. Polias ou engrenagens montadas em eixos distintos transmitem movimento rotativo umas às outras por meio de correias.

Figura 8 - Transmissão de rotação entre polias



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na figura acima, temos um sistema de transmissão de movimentos de rotação entre polias que pertencem ou não ao mesmo eixo, sem escorregamento entre as partes. Em (a) está o sistema completo. Em (b), uma representação das duas polias do mesmo eixo de rotação. Não há escorregamento entre as partes do sistema.

Como as polias "a" e "c" pertencem ao mesmo eixo, chamado de eixo solidário, e, nesse contexto, elas realizam o mesmo número de voltas no mesmo intervalo de tempo. Isso significa que suas velocidades angulares são iguais, divergindo em suas velocidades lineares escalares:

- $\omega = \omega_a = \omega_b$.

Como $v = \omega r$, podemos escrever $\omega = v/r$ para pontos nas extremidades de cada uma das polias que pertencem ao mesmo eixo de rotação.

Para a polia "a":

$$\omega_a = \frac{v_a}{r_a}. \tag{4.3.1}$$

E para a polia "b":

$$\omega_b = \frac{v_b}{r_b}. \tag{4.3.2}$$

Igualando as duas equações acima, obtemos:

$$\frac{v_a}{r_a} = \frac{v_b}{r_b}. \tag{4.3.3}$$

Como as polias de um mesmo eixo de rotação dão o mesmo número de voltas no mesmo intervalo de tempo, conclui-se que:

- $T_a = T_b$;
- $f_a = f_b$.

Para polias com eixos diferentes, os pontos nas extremidades das polias, as quais estão em contato com a correia, como é o caso das polias "a" e "c" da Fig. (8), possuem a mesma velocidade escalar linear:

- $v = v_a = v_c$.

Usando novamente $v = \omega r$, temos que:

- $v_a = \omega_a r_a$;
- $v_c = \omega_c r_c$.

Para os eixos distintos, mas acoplados pela mesma correia, v_a e v_c são iguais:

$$v_a = v_c, \tag{4.3.4}$$

$$\omega_a r_a = \omega_c r_c. \tag{4.3.5}$$

Como $\omega = 2\pi f$, podemos reescrever o último resultado da seguinte forma:

$$2\pi f_a r_a = 2\pi f_c r_c, \tag{4.3.6}$$

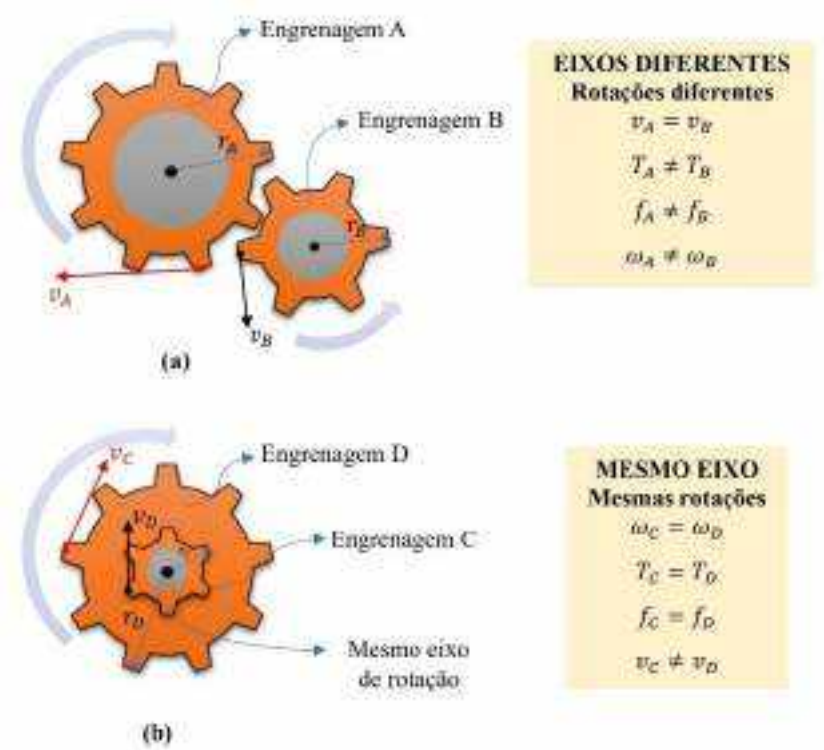
$$f_a r_a = f_c r_c, \tag{4.3.6}$$

$$\frac{f_a}{f_c} = \frac{r_c}{r_a}. \tag{4.3.7}$$

Para engrenagens em contato, mas com eixos distintos, a transmissão do movimento de rotação possui as mesmas características das polias em eixos diferentes, pois, de fato, elas não pertencem ao mesmo eixo.

Já para engrenagens pertencentes ao mesmo eixo de rotação, por estarem ligadas ao mesmo eixo, as características da transmissão do movimento de rotação são as mesmas para as polias em eixos solidários.

Figura 9 - Transmissão de rotação entre engrenagens



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na figura acima, temos, em (a), engrenagens em contato e com eixos de rotações diferentes. Em (b), uma representação de duas engrenagens acopladas ao mesmo eixo de rotação. Não há deslizamento entre as polias e os seus eixos.

Nesta seção, v, ω, f e r correspondem, respectivamente, ao módulo da velocidade linear da extremidade da polia, à sua velocidade angular, à sua frequência de giro e ao seu raio. O índice de cada grandeza representa a que polia a grandeza está relacionada. Isso também se estende às engrenagens, conforme Fig. (9).

4.4 ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

A energia cinética de rotação, na Física, é um conceito fundamental, que descreve objetos em rotação, sendo uma extensão da energia cinética linear que lida com movimentos de translação. Em outras palavras, é a energia que um corpo possui devido ao seu movimento de rotação em torno de um eixo fixo.

Esse tipo de energia depende da forma e de como a massa de um corpo é distribuída em um movimento circular. Se considerarmos um corpo com densidade distribuída uniformemente em toda a sua extensão, a sua energia cinética de rotação será influenciada, principalmente, pela distância do ponto em que desejamos calcular essa energia em relação ao eixo de giro. Quanto mais afastado desse eixo, maior será a energia rotacional.

Para calcular esse tipo de energia, não podemos usar, de maneira direta, e equação para cálculo da energia cinética linear para o corpo como um topo, pois cada partícula que o compõe possui uma energia cinética linear correspondente. Então, podemos usar essa equação individualmente para cada partícula e fazer a soma de todas elas para encontrar a energia cinética total do objeto em rotação.

De acordo com essa linha de pensamento, a energia cinética de um corpo em rotação é dada por:

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \ldots + \frac{1}{2}m_nv_n^2, \tag{4.4.1}$$

$$K = \sum \frac{1}{2}m_iv_i^2, \tag{4.4.2}$$

em que K é a energia cinética do corpo, m_i é a massa da partícula de ordem i e v_i a sua velocidade linear escalar na mesma ordem. Essa soma se estende a todas as partículas que compõe o corpo.

Como a velocidade linear de cada partícula que compõe o corpo é variável e depende da sua distância para o eixo de rotação, é mais conveniente escrever a energia cinética em termos da velocidade angular por ser constante em todos os pontos do corpo e, assim, determinarmos a energia cinética em termos do seu movimento angular.

Pela relação entre as grandezas lineares e angulares, podemos substituir a velocidade escalar linear v em termos da velocidade angular ω, ou seja, $v = \omega r$, na eq. (4.4.2):

$$K = \sum \frac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2, \tag{4.4.3}$$

$$K = \frac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2, \tag{4.4.4}$$

em que a velocidade angular ω é igual para todas as partículas.

Acima, na eq. (4.4.4), o termo destacado entre parênteses $(\sum m_i r_i^2)$ depende da maneira de como a massa é distribuida no corpo em relação ao seu eixo de giro. Esse termo representa a grandeza chamada de momento de inércia I do corpo rígido, onde r_i é a distância perpendicular da partícula de ordem i em relação ao eixo de rotação. O cálculo do valor desse termo, ou seja, do momento de inércia, só é possível quando é especificado o eixo de rotação ao qual o corpo está girando.

Logo, podemos expressar o momento de inércia de um corpo como:

$$I = \left(\sum m_i r_i^2\right), \tag{4.4.5}$$

sendo a unidade do momento de inércia no Sistema Internacional de unidades (SI) o quilograma-metro quadrado $(kg.m^2)$.

Substituindo, agora, a eq. (4.4.5) na eq. (4.4.4), podemos escrever a energia cinética total de um corpo em movimento de giro em função do seu momento de inércia e da sua velocidade angular, ou seja, a sua energia cinética de rotação:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2, \tag{4.4.6}$$

em que a unidade de energia cinética de rotação, no SI, é o joule (J).

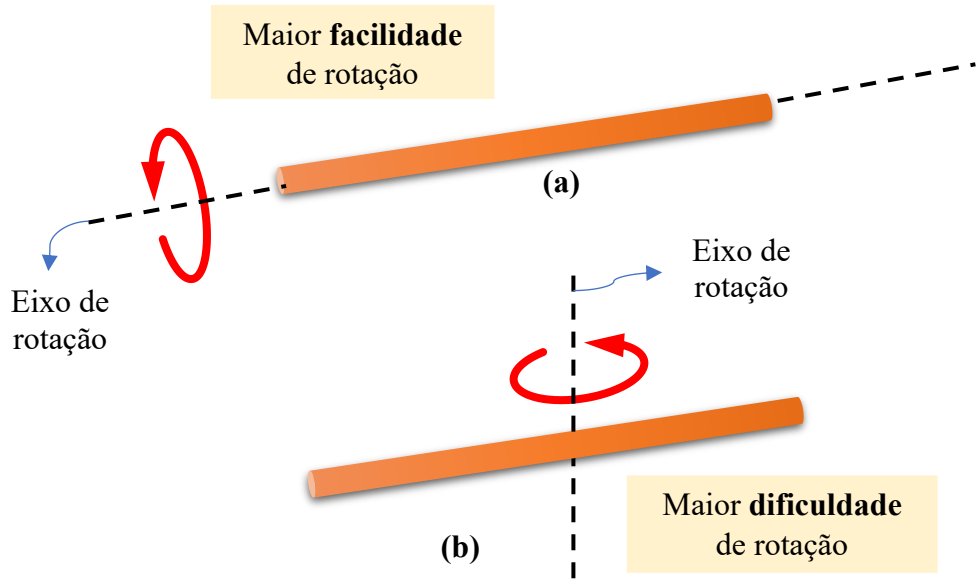
Em resumo, para calcular a energia cinética de rotação de todo o corpo rígido, precisamos calcular o seu o momento de inércia em relação ao eixo de rotação, já que a velocidade angular de cada partícula que o compõe é constante em qualquer outro ponto.

A eq. (4.4.6), em uma lógica simples, nos permite calcular a energia cinética de um corpo rígido com um número de partículas relativamente pequeno, onde, em teoria, conseguiríamos calcular o momento de inercia de cada partícula desse corpo e chegarmos ao seu momento de inércia total como o resultado da soma de todos os momentos de inércia das partículas que o compõe, como expresso na eq. (4.4.5), e depois multiplicarmos esse valor pela sua velocidade angular. Acontece que esse cálculo pode se referir a um corpo com um número partículas muito expressivo e de como a sua massa é distribuída, fazendo com que a obtenção do valor do seu momento de inércia não seja uma tarefa tão simples.

Como o momento de inércia de um corpo depende da distribuição da sua massa em relação ao eixo de rotação, a Fig. (10) a seguir mostra um mesmo objeto sendo girado de formas

distintas. Quanto maior próximo os átomos que compõe o corpo rígido estão do eixo de rotação, maior a facilidade de fazê-lo girar.

Figura 10- Momentos de inércia diferentes para corpos idênticos



Fonte: Elaborada pelos autores.

Mais adiante, mostraremos como se calcular o momento de inércia para corpos rígidos homogêneos distintos com um número muito grande de partículas. Todavia, mostraremos, a seguir, o conceito de centro de massa (*CM*), um conceito de extrema importância para a dinâmica rotacional, o qual nos ajudará a entender como descrever, principalmente, movimentos rotacionais de corpos rígidos em relação a um eixo que passa por esse ponto.

4.4.1 Centro de massa de um corpo rígido

O ponto de um corpo, ou um sistema de corpos, onde se pode considerar que toda a concentração de massa se concentra sobre ele é chamado de centro de massa *CM*, comumente chamado de centro de gravidade.

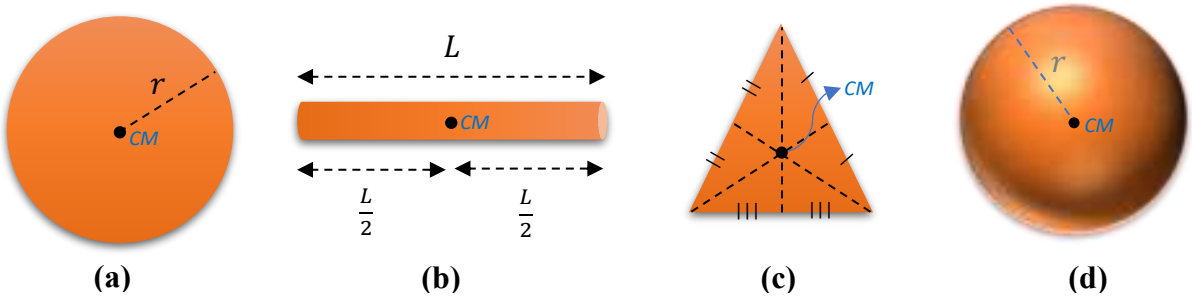
Em objetos com densidade uniforme (homogêneos), como uma esfera, por exemplo, esse ponto está no seu centro geométrico, equidistante de todas as suas partes ou superfícies.

O centro geométrico de objetos não homogêneos pode não ser o mesmo do seu *CM* devido às suas características irregulares, dificultando a sua análise para cálculos envolvendo essa distribuição de massa.

O *CM* é um ponto importante para a análise da dinâmica rotacional. A torção de um

corpo rígido, por exemplo, é descrita, principalmente, em relação ao centro de massa.

Figura 11 - Alguns corpos rígidos homogêneos



Fonte: Elaborada pelos autores.

A Fig. (11) acima é a representação de alguns corpos rígidos homogêneos (densidades constantes), onde em (a) se trata de um disco com centro de massa no seu centro. Em (b), uma barra com centro de massa no ponto que a divide ao meio. Em (c), uma placa triangular com centro de massa no ponto de encontro das suas três medianas. Em (d), uma esfera maciça com centro de massa em seu centro.

4.4.2 Momento de Inércia - Distribuição Contínua de Massa

Quando um corpo rígido é contínuo, como um disco, por exemplo, e possui um grande número de partículas localizadas em proximidade, a aplicação da eq. (4.4.6) se torna uma tarefa não tão simples. Assim, para calcularmos o momento de inércia de um corpo rígido com uma densidade constante de massa, substituímos o somatório da eq. (4.4.5) por uma integral e definimos o momento de inércia desse tipo de corpo como:

$$I = \int r^2 \, dm, \tag{4.4.7}$$

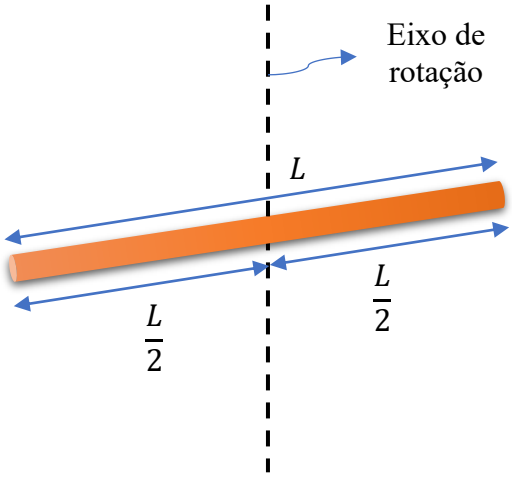
em que r é a distância perpendicular de uma partícula ou elemento infinitesimal de massa ao eixo de rotação e dm, esse elemento infinitesimal de massa.

A seguir, veremos os resultados dessa integração para algumas formas geométricas com densidades de massa constantes. Lembrando que o momento de inércia só faz sentido se levarmos em consideração o eixo de rotação do corpo.

4.4.2.1 Barra fina homogênea

A Fig. (12) a seguir mostra uma barra fina de comprimento L, massa M, densidade de massa constante e eixo fixo de rotação coincidindo com o seu ponto médio.

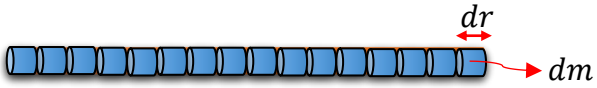
Figura 12 - Barra fina homogênea de comprimento L e eixo central de rotação



Fonte: Elaborada pelos autores.

Como a massa M da barra da Fig. (12) se distribui uniformemente ao longo do seu comprimento L, podemos dividi-la em elementos infinitesimais de massa dm, cada um com um comprimento dr, como podemos mostrar na Fig. (13) abaixo.

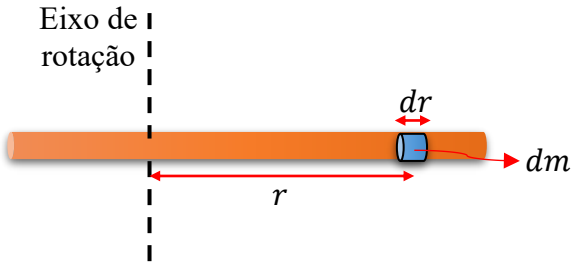
Figura 13 - Barra fina homogênea dividida em elementos de massa infinitesimais



Fonte: Elaborada pelos autores.

Cada um dos elementos infinitesimais de massa da barra Fig. (13) está a uma certa distância r do eixo de rotação, como ilustrado na Fig. (14) a seguir.

Figura 14 - Elemento infinitesimal de massa *dm* da barra distante *r* do eixo de rotação



Fonte: Elaborada pelos autores.

Para encontrarmos a equação geral que nos possibilitará calcular o momento de inércia de uma barra fina homogênea, vamos relacionar a sua massa com o seu comprimento por meio

do conceito de densidade linear, a qual pode ser escrita da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{M}{L}, \tag{4.4.8}$$

em que λ é a densidade linear da barra, M a sua massa e L, o seu comprimento.

Como a densidade é constante, também podemos escrever essa densidade em função dos seus elementos infinitesimais.

$$\lambda = \frac{dm}{dr}. \tag{4.4.9}$$

Igualando a eq. (4.4.8) com a eq. (4.4.9), obtemos:

$$\frac{dm}{dr} = \frac{M}{L}, \tag{4.4.10}$$

$$dm = \frac{M}{L} dr. \tag{4.4.11}$$

Substituindo esse último resultado na integral da eq. (4.4.7), obtemos:

$$I = \int r^2 \frac{M}{L} dr. \tag{4.4.12}$$

Como a massa da barra e o seu comprimento são constantes, podemos retirá-los da integral:

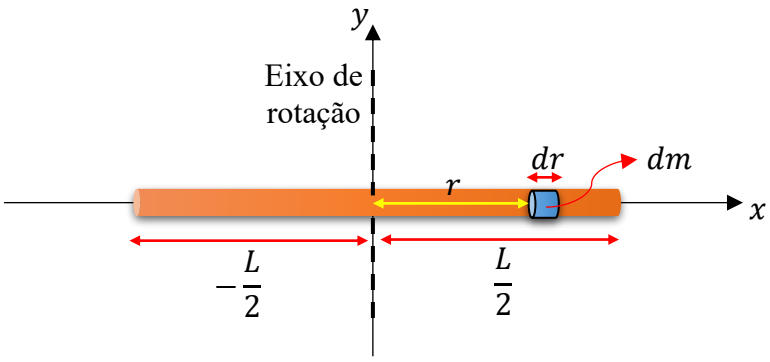
$$I = \frac{M}{L} \int r^2 \, dr. \tag{4.4.13}$$

A eq. (4.4.13) é a equação geral do momento de inércia de uma barra fina de massa M e comprimento L . Para resolvê-la, é preciso definir os limites de integração, que, por sua vez, irá depender de onde estará posicionada a barra em relação ao eixo de rotação.

Considerando essa barra fina com o eixo de rotação que passa pelo seu ponto médio, ou seja, pelo seu centro de massa, os limites de integração vão de $-{}^{L}/_{2}$ a ${}^{L}/_{2}$.

A Fig. (15) a seguir ilustra a mesma barra da Fig. (14), sendo que o seu eixo fixo de rotação, agora, está localizado no ponto central da barra, ou seja, está passando pelo seu centro de massa.

Figura 15 - Barra fina homogênea com eixo central de rotação



Fonte: Elaborada pelos autores.

Definindo os limites de integração da Fig. (15) na eq. (4.4.13), podemos escrever:

$$I = \frac{M}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2\, dr. \tag{4.4.14}$$

Resolvendo a integral:

$$I = \frac{M}{L}\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}, \tag{4.4.15}$$

$$I = \frac{M}{3L}(r^3)\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}. \tag{4.4.16}$$

Aplicando os limites de integração na variável r:

$$I = \frac{M}{3L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right], \tag{4.4.17}$$

$$I = \frac{M}{3L}\left[\frac{L^3}{8} - \left(-\frac{L^3}{8}\right)\right], \tag{4.4.18}$$

$$I = \frac{M}{3L}\left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8}\right), \tag{4.4.19}$$

$$I = \frac{M}{3L}\left(\frac{2L^3}{8}\right), \tag{4.4.20}$$

$$I = \frac{2ML^3}{24L}. \tag{4.4.21}$$

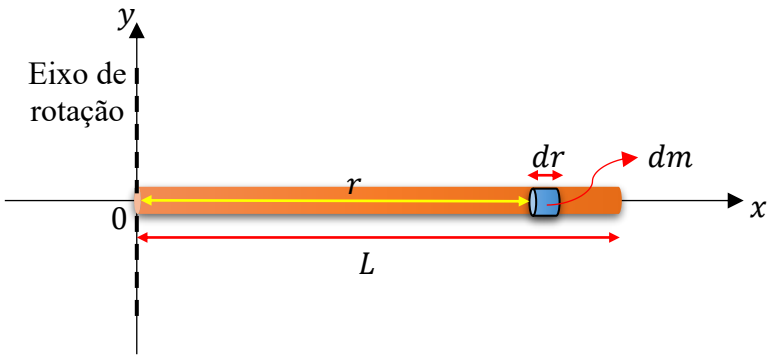
Simplificando a eq. (4.4.21), chegamos à equação que nos permite calcular o momento

de inércia de uma barra fina homogênea com eixo de rotação paralelo à barra e que passa pelo seu centro de massa:

$$I = \frac{1}{12} ML^3. \tag{4.4.22}$$

Para se calcular o momento de inércia dessa mesma barra fina em relação a um outro eixo, basta aplicar os limites de integração corretos. Vamos usar a eq. (4.4.13) novamente e aplicar os limites de integração para uma nova situação referente a esse mesmo objeto. Dessa vez, o eixo de rotação se encontrará em uma de suas extremidades, como ilustra a Fig. (16) a seguir.

Figura 16 - Barra fina homogênea com eixo de rotação em uma de suas extremidades



Fonte: Elaborada pelos autores.

Agora, os limites de integração serão de 0 a L [Fig. (16)]. Definindo esses limites na integral:

$$I = \frac{M}{L} \int_0^L r^2 \, dr. \tag{4.4.23}$$

Resolvendo a integral, chegaremos ao mesmo resultado da situação anterior antes de aplicar os limites:

$$I = \frac{M}{3L} (r^3)|_0^L. \tag{4.4.24}$$

Aplicando os limites de integração na variável r:

$$I = \frac{M}{3L} [(L)^3 - (0)^3], \tag{4.4.25}$$

$$I = \frac{M}{3L} L^3. \tag{4.4.26}$$

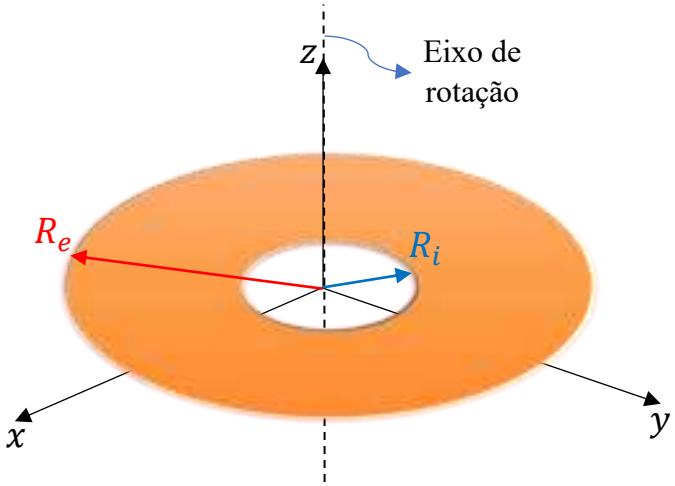
Simplificando a eq. (4.4.26), chegamos ao resultado que nos permite calcular o momento de inércia de uma barra fina homogênea de massa M, comprimento L e com eixo de rotação passando por uma das suas extremidades, paralelo ao seu CM:

$$I = \frac{1}{3}ML^2. \tag{4.4.27}$$

4.4.2.2 Disco rígido fino, anel e cilindro girando em torno dos seus centros

A Fig. (17) a seguir ilustra uma coroa circular girando em torno de seu centro de massa, como um disco de vinil, por exemplo, onde R_e e R_i são seus raios externo e interno, respectivamente.

Figura 17 - Coroa circular com eixo de rotação no seu centro de



Fonte: Elaborada pelos autores.

Sabemos que o momento de inércia de um corpo rígido é dado pela integral [eq. (4.4.7)] ($I = \int r^2\, dm$). Vamos considerar que esse disco possui massa M e que essa massa se distribui uniformemente sobre a sua superfície. Isso significa que sua densidade superficial de massa é constante. Assim, podemos usar a relação:

$$\sigma = \frac{M}{A}, \tag{4.4.28}$$

em que σ representa a densidade superficial de massa do disco, M a sua massa e A área do disco onde sua massa está distribuída.

Considerando apenas um elemento infinitesimal de massa dm, a densidade superficial

de massa do disco será o elemento infinitesimal dm pelo elemento infinitesimal da área do disco da.

$$\sigma = \frac{dm}{da}. \tag{4.4.29}$$

Igualando as duas expressões e isolando dm, temos que:

$$\frac{dm}{da} = \frac{M}{A}, \tag{4.4.30}$$

$$dm = \frac{M}{A} da. \tag{4.4.31}$$

Precisamos, agora, determinar os valores da área da coroa circular A e a do elemento infinitesimal de área da. A da coroa circular é dada pela área total do disco menos a área circular vazada. Logo:

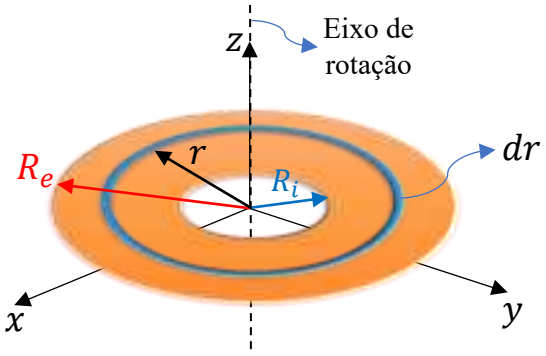
$$A = A_T - A_V, \tag{4.4.32}$$

$$A = \pi R_e^2 - \pi R_i^2, \tag{4.4.33}$$

$$A = \pi(R_e^2 - R_i^2). \tag{4.4.34}$$

Para determinar a área da, vamos usar condições de simetria do problema. Para isso, um elemento infinitesimal de massa dm deve ser uma coroa circular extremamente fina, a qual podemos considerar um anel de comprimento $2\pi r$ e da espessura dr, de modo que podemos aproximar os raios externos e internos ($R_e = R_i = r$).

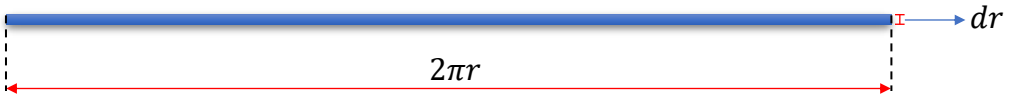
Figura 18 - Elemento infinitesimal de área da coroa circular



Fonte: Elaborada pelos autores.

Ao estirarmos o anel, ele ficará com formato de retângulo, cuja altura será dr e a base o comprimento da circunferência, ou seja, $2\pi r$.

Figura 19 - Anel aberto com comprimento $2\pi r$ e largura dr



Fonte: Elaborada pelos autores.

Como a área do retângulo é o produto da sua base pela sua altura, temos que:

$$da = 2\pi r dr. \tag{4.4.35}$$

Substituindo a eq. (4.4.34) e a eq. (4.4.35) na eq. (4.4.31), temos que:

$$dm = \frac{M}{\pi(R_e^2 - R_i^2)} 2\pi r dr. \tag{4.4.36}$$

Simplificando, obtemos:

$$dm = \frac{2Mrdr}{R_e^2 - R_i^2}. \tag{4.4.37}$$

Vamos substituir esse último resultado na eq. (4.4.7) (momento de inércia do corpo rígido):

$$I = \int r^2 \frac{2Mrdr}{R_e^2 - R_i^2}. \tag{4.4.38}$$

Os termos constantes saem da integral, resultando, assim, no momento de inércia da coroa circular na sua forma integral:

$$I = \frac{2M}{R_e^2 - R_i^2} \int r^3 \, dr. \tag{4.4.39}$$

A integração da eq. (4.4.39) está fazendo a soma dos infinitos anéis de massa dm que preenchem todo o disco. No caso da coroa circular, os limites de integração irão do raio interno R_i ao raio externo R_e.

$$I = \frac{2M}{R_e^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_e} r^3 dr. \tag{4.4.40}$$

Resolvendo a integral, obtemos:

$$I = \frac{2M}{R_e^2 - R_i^2} \left(\frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_{R_i}^{R_e}, \tag{4.4.41}$$

$$I = \frac{2M}{4(R_e^2 - R_i^2)}(r^4)|_{R_i}^{R_e}, \tag{4.4.42}$$

$$I = \frac{M}{2(R_e^2 - R_i^2)}(r^4)|_{R_i}^{R_e}. \tag{4.4.43}$$

Aplicando os limites de integração:

$$I = \frac{M}{2(R_e^2 - R_i^2)}(R_e^4 - R_e^4). \tag{4.4.44}$$

Como $(R_e^4 - R_e^4)$ pode ser escrito como o produto da soma pela diferença $[(R_e^2 - R_i^2)(R_e^2 + R_i^2)]$, podemos reescrever a eq. (4.4.44) da seguinte forma:

$$I = \frac{M}{2(R_e^2 - R_i^2)}[(R_e^2 - R_i^2)(R_e^2 + R_i^2)]. \tag{4.4.45}$$

Simplificando a eq. (4.4.45), chegamos, finalmente, à equação que nos permite calcular o momento de inércia de uma coroa circular com densidade de massa constante e eixo de rotação que passa pelo seu centro.

$$I = \frac{1}{2}M(R_e^2 + R_i^2). \tag{4.4.46}$$

Partindo desse último resultado, já vimos que para um anel bem fino, podemos aproximar os valores dos raios externo e interno.

$$I = \frac{M}{2}(R^2 + R^2), \tag{4.4.47}$$

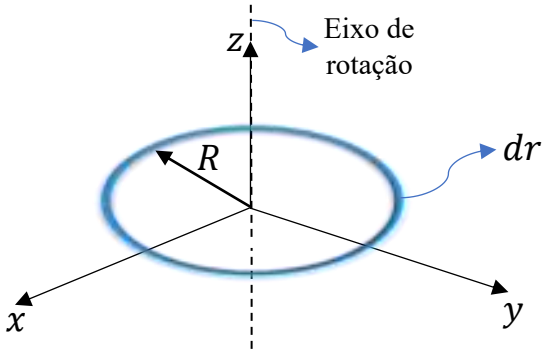
$$I = \frac{M}{2}(2R^2). \tag{4.4.48}$$

Simplificando a eq. (4.4.48), chegamos ao resultado que nos permite calcular o momento de inércia de um anel com massa M, distribuída uniformemente por ele e que gira em torno do seu centro.

$$I = MR^2. \tag{4.4.49}$$

A Fig. (20) a seguir ilustra um anel fino de raio R com eixo de rotação que passa pelo seu centro.

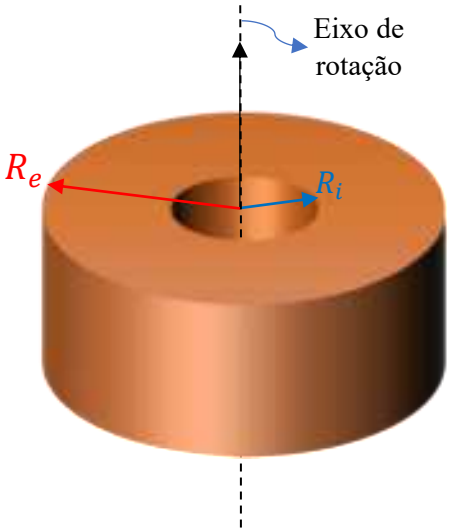
Figura 20 - Anel fino com eixo central de rotação



Fonte: Elaborada pelos autores.

Empilhando várias coroas circulares, o sólido formado será um cilindro vazado, como mostra a Fig. (21) abaixo.

Figura 21 - Cilindro homogêneo vazado



Fonte: Elaborada pelos autores.

Assim, o momento de inércia desse cilindro homogêneo vazado será a soma de todos os momentos de inércia das coroas circulares empilhadas [eq. (4.4.46)].

$$I = \frac{M_1}{2}(R_e^2 - R_i^2) + \frac{M_2}{2}(R_e^2 - R_i^2) + \frac{M_3}{2}(R_e^2 - R_i^2) + \ldots + \frac{M_n}{2}(R_e^2 - R_i^2), \qquad (4.4.50)$$

em que M_1 é a massa da coroa 1, M_2 a massa da coroa 2, M_3 a massa da coroa 3 e M_n a massa da enésima coroa.

Colocando $(R_e^2 - R_i^2)$ em evidência, temos que:

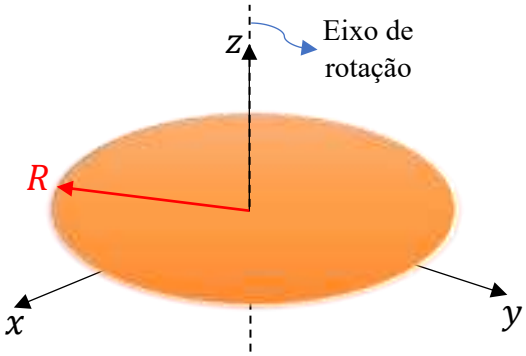
$$I = \frac{1}{2}(M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n)(R_e^2 - R_i^2). \qquad (4.4.51)$$

O termo entre parênteses da eq. (4.4.51) representa a soma de todas as massas das coroas circulares, o que corresponde na massa total M do cilindro vazado e nos leva à mesma eq. (4.4.46) que nos permite calcular o momento de inércia de uma coroa homogênea circular com eixo central de rotação:

$$I = \frac{1}{2}M(R_e^2 - R_i^2\ ). \tag{4.4.52}$$

Em um disco com densidade uniforme de massa totalmente preenchido, o raio interno da coroa circular é inexistente ($R_i = 0$). Então, $R_e = R$.

Figura 22 - Disco homogêneo com eixo central de rotação



Fonte: Elaborada pelos autores.

Logo, podemos usar a eq. (4.4.46), usando $R_i = 0$, para chegarmos à equação que nos permite calcular o momento de inércia de um disco homogêneo com eixo de rotação que passa pelo seu centro de massa.

$$I = \frac{1}{2}M(R^2 - 0\ ), \tag{4.4.53}$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2, \tag{4.4.54}$$

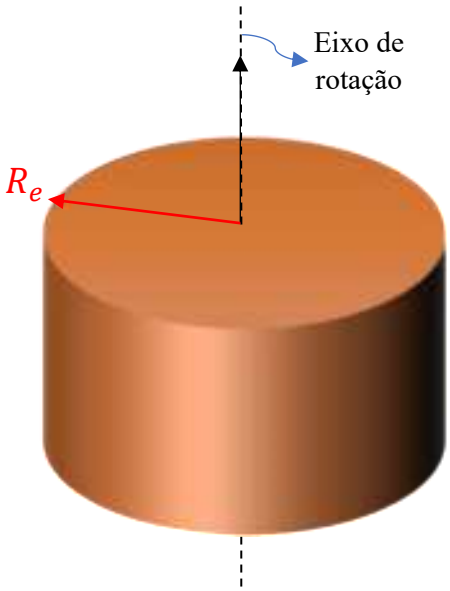
em que M, na eq. (4.4.54), representa a massa do disco e R, o seu raio.

Usando o mesmo raciocínio que fizemos para o cilindro vazado, um cilindro totalmente preenchido será composto por vários discos empilhados. Assim, o momento de inércia de um cilindro homogêneo com eixo de rotação que passa pelo seu centro de massa é o mesmo do disco.

$$I = \frac{1}{2}MR^2, \tag{4.4.55}$$

sendo M, na eq. (4.4.55), a massa do cilindro e R, o seu raio.

Figura 23 - Cilindro homogêneo de raio R

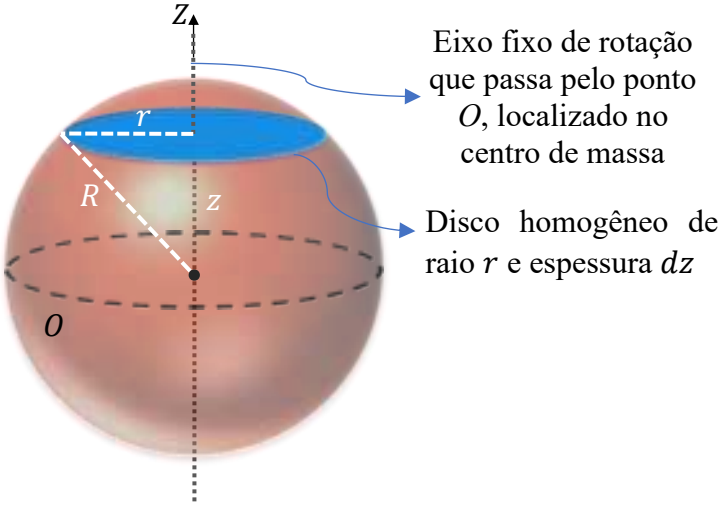


Fonte: Elaborada pelos autores.

4.4.2.3 Esfera maciça homogênea

Vamos considerar uma esfera maciça de raio R com densidade volumétrica de massa ρ, massa M e volume V, girando através de um eixo de rotação que passa pelo seu CM.

Figura 24 - Esfera homogênea girando em torno de um eixo fixo que passa pelo seu *CM*



Fonte: Elaborada pelos autores.

Podemos deduzir o momento de inércia dessa esfera maciça, partindo da eq. (4.4.54), que corresponde à equação do momento de inércia de um disco ou cilindro homogêneos com eixo de rotação que passa pelo seu centro $\left(I = \frac{1}{2}MR^2\right)$, pois essa esfera nada mais é do que a superposição de vários cilindros de espessura infinitesimal dz e raio r.

Figura 25 - Cilindro homogêneo com momento de inércia *dI*



Fonte: Elaborada pelos autores.

O pequeno cilindro homogêneo da Fig. (25) contribui com um momento de inércia infinitesimal dI do total da esfera. Assim, podemos escrever dI da seguinte forma:

$$dI = \frac{1}{2} dm\, r^2, \tag{4.4.56}$$

em que dI é o momento de inércia do cilindro, dm a sua massa e r o seu raio.

Notemos que dI e dm, além de ser o momento de inércia e a massa do cilindro, respectivamente, corresponde ao elemento infinitesimal do momento de inércia e o elemento infinitesimal de massa da esfera, visto que o disco é um elemento infinitesimal seu. Portanto, se quisermos o momento de inércia dotal da esfera, basta somarmos o momento de inércia de cada cilindro que a preenche totalmente. Para isso, vamos integrar a eq. (4.4.56):

$$\int dI = \int \frac{1}{2} dm\, r^2. \tag{4.4.57}$$

Resolvendo o lado esquerdo da equação:

$$I = \int \frac{1}{2} dm\, r^2, \tag{4.4.58}$$

$$I = \frac{1}{2} \int r^2 dm. \tag{4.4.58}$$

A densidade volumétrica de massa da esfera é dada por:

$$\rho = \frac{M}{V}. \tag{4.4.59}$$

Bem como a densidade volumétrica do cilindro como sendo:

$$\rho = \frac{dm}{dV}. \tag{4.4.60}$$

Como as densidades da esfera e do cilindro são as mesmas, podemos igualar as duas densidades:

$$\frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}, \tag{4.4.61}$$

$$dm = \frac{M}{V} dV. \tag{4.4.62}$$

Como a espessura e o raio do cilindro sendo dz e r, respectivamente, podemos determinar o seu volume dV pelo produto da área da sua base (πr^2) pela sua espessura (dz):

$$dV = \pi r^2 dz. \tag{4.4.63}$$

Substituindo esse último resultado na eq. (4.4.62):

$$dm = \frac{M}{V} \pi r^2 dz. \tag{4.4.64}$$

Agora, substituindo a eq. (4.4.64) na eq. (4.4.58) e retirando os termos constantes da integral, obtemos a equação geral para cálculo do momento de inércia de uma esfera maciça homogênea com eixo central de rotação, levando também em consideração que o volume de uma esfera maciça de raio R e massa M é dado por $V = \frac{4}{3}\pi R^3$:

$$I = \frac{1}{2} \int r^2 \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \pi r^2 dz, \tag{4.4.65}$$

$$I = \frac{1}{2} \frac{3M}{4R^3} \int r^4 dz, \tag{4.4.66}$$

$$I = \frac{3}{8} \frac{M}{R^3} \int r^4 dz. \tag{4.4.67}$$

Observamos que, no resultado acima, temos os termos r e dz na integral e precisamos encontrar uma relação entre eles. Para isso, verificamos que, na Fig. (24), r, R e z formam um triângulo retângulo, sendo este último a altura desse triângulo e o raio R da esfera, sua hipotenusa. Assim, pelo Teorema de Pitágoras:

$$R^2 = r^2 + z^2. \tag{4.4.68}$$

Isolando a variável r:

$$r^2 = R^2 - z^2. \tag{4.4.69}$$

Substituindo esse último resultado na eq. (4.4.67), sendo $(r^4 = r^2 . r^2)$:

$$I = \frac{3}{8} \frac{M}{R^3} \int r^2 r^2 dz, \tag{4.4.70}$$

$$I = \frac{3}{8}\frac{M}{R^3}\int (R^2 - z^2)(R^2 - z^2)\, dz. \tag{4.4.71}$$

Aplicando a distributiva:

$$I = \frac{3}{8}\frac{M}{R^3}\int (R^4 - R^2z^2 - R^2z^2 + z^4)\, dz. \tag{4.4.72}$$

Somando os termos em comum:

$$I = \frac{3}{8}\frac{M}{R^3}\int (R^4 - 2R^2z^2 + z^4)\, dz. \tag{4.4.73}$$

Para varrer tora a esfera em relação ao eixo *Z*, os limites de integração vão de $(-R\ a\ R)$.

$$I = \frac{3}{8}\frac{M}{R^3}\int_{-R}^{R} (R^4 - 2R^2z^2 + z^4)\, dz. \tag{4.4.74}$$

Aplicando novamente a distributiva e separando a integral do resultado acima em três integrais, ficamos com:

$$I = \frac{3}{8}\frac{M}{R^3}\left(\int_{-R}^{R} R^4 dz - \int_{-R}^{R} 2R^2z^2 dz + \int_{-R}^{R} z^4 dz\right). \tag{4.4.75}$$

Tirando as constantes das integrais, ficamos com a seguinte forma:

$$I = \frac{3}{8}\frac{M}{R^3}\left(R^4\int_{-R}^{R} dz - 2R^2\int_{-R}^{R} z^2 dz + \int_{-R}^{R} z^4 dz\right). \tag{4.4.76}$$

Resolvendo as integrais:

$$I = \frac{3}{8}\frac{M}{R^3}\left\{[R^4(z)|_{-R}^{R}] - 2R^2\left[\left(\frac{z^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R}\right] + \left[\left(\frac{z^5}{5}\right)\Big|_{-R}^{R}\right]\right\}. \tag{4.4.77}$$

Aplicando os limites de integração:

$$I = \frac{3}{8}\frac{M}{R^3}\left\{R^4[R - (-R)] - 2R^2\left[\frac{R^3}{3} - \left(-\frac{R^3}{3}\right)\right] + \left[\frac{R^5}{5} - \left(-\frac{R^5}{5}\right)\right]\right\}. \tag{4.4.78}$$

Resolvendo as operações:

$$I = \frac{3}{8}\frac{M}{R^3}\left[R^4(2R) - 2R^2\left(\frac{2}{3}R^3\right) + \left(\frac{2}{5}R^5\right)\right], \tag{4.4.79}$$

$$I = \frac{3}{8}\frac{M}{R^3}\left(2R^5 - \frac{4}{3}R^3 + \frac{2}{5}R^5\right), \tag{4.4.80}$$

$$I = \frac{3}{8}\frac{M}{R^3}\left(\frac{30}{15}R^5 - \frac{20}{15}R^3 + \frac{6}{15}R^5\right), \tag{4.4.81}$$

$$I = \frac{3}{8}\,\frac{\pi}{R^3}\,\frac{16}{15}R^5. \tag{4.4.82}$$

Simplificando as operações, encontraremos a equação que nos permite calcular o momento de inércia de uma esfera maciça de raio R com densidade volumétrica de massa constante e com eixo de rotação que passa pelo seu centro de massa.

$$I = \frac{6}{15}MR^2, \tag{4.4.83}$$

$$I = \frac{2}{5}MR^2. \tag{4.4.84}$$

Na Tab. (3) a seguir, encontram-se as equações dos momentos de inércia que demonstramos até aqui.

Tabela 3 - Momento de inércia de alguns corpos rígidos com densidade uniforme

Corpo	Momento de Inércia *(kg . m²)*
Partícula distante r de um eixo de rotação	$I = mr^2$
Anel fino em relação ao eixo central	$I = Mr^2$
Barra fina em relação ao eixo central	$I = \frac{1}{12}ML^3$
Barra fina em relação ao eixo que passa por uma das extremidades	$I = \frac{1}{3}ML^2$
Coroa circular em relação ao eixo central	$I = \frac{1}{2}M(R_e^2 - R_i^2)$
Cilindro vazado em relação ao eixo central	
Disco em relação ao seu eixo central	$I = \frac{1}{2}Mr^2$
Cilindro em relação ao seu eixo central	
Esfera maciça em relação ao eixo central	$I = \frac{2}{5}MR^2$

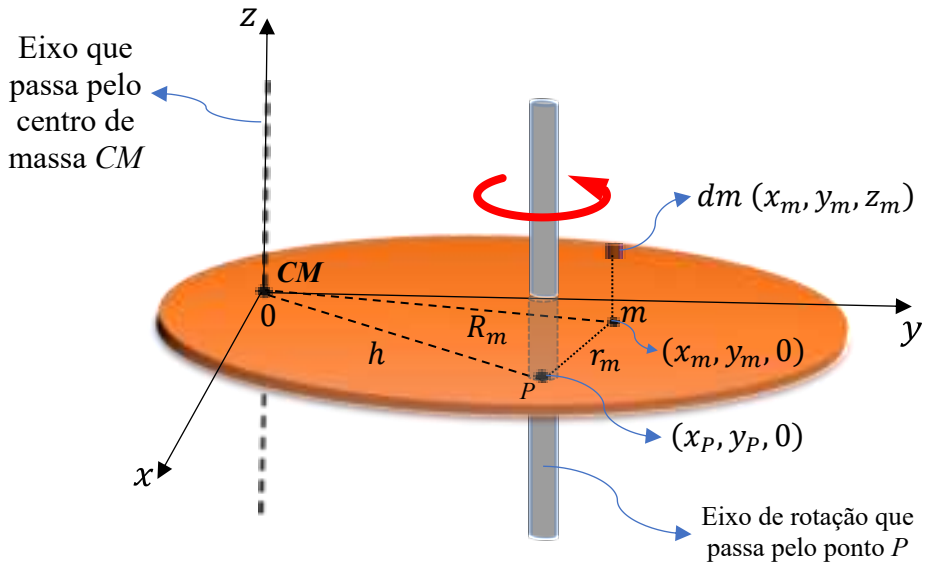
Fonte: Elaborada pelos autores.

Na maioria das vezes, quando precisaremos calcular o momento de inércia em outro eixo, precisamos calculá-lo em função do momento de inércia que passa pelo *CM*. Para isso, utilizamos o teorema dos eixos paralelos.

4.4.3 Teorema dos Eixos Paralelos

O teorema dos eixos paralelos é um modelo matemático que serve para calcular o momento de inércia de um corpo em relação a um ponto localizado em um eixo que não passa pelo seu centro de massa, desde que conheçamos o momento de inércia em relação a outro ponto localizado no eixo que passa pelo seu *CM*, desde que esses dois eixos sejam paralelos.

Figura 26 - Eixos paralelos de um corpo rígido



Fonte: Elaborada pelos autores.

A Fig. (26) mostra um corpo rígido com eixo de rotação que passa pelo ponto P que é paralelo ao eixo que passa pelo seu centro de massa, localizado na origem do plano cartesiano, sendo h a distância perpendicular entre os eixos paralelos, R_m a distância perpendicular entre a origem e o ponto referente à projeção do elemento de massa dm (ponto m) no plano x-y e r_m a distância perpendicular entre o ponto P, o qual passa o eixo de rotação do corpo, e o ponto m. Para calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano, podemos usar as coordenadas desses pontos ilustrados na figura.

A seguir, estão representadas as equações que correspondem aos valores de r_m, R_m e h:

$$r_m^2 = \left(x_m - x_p\right)^2 + \left(y_m - y_p\right)^2 + \left(0_m - 0_p\right)^2, \tag{4.4.85}$$

$$R_m^2 = (x_m - 0)^2 + (y_m - 0)^2 + (0_m - 0)^2, \tag{4.4.86}$$

$$h^2 = (x_P - 0)^2 + (y_P - 0)^2 + (0_P - 0)^2. \tag{4.4.87}$$

As três equações acima representam as distâncias entre dois pontos em um plano cartesiano de acordo com as suas coordenadas, sendo r_m a distância de P a m; R_m a distância entre a origem do plano cartesiano ao ponto m; e h, a distância perpendicular entre os eixos paralelos. Simplificando essas equações:

$$r_m^2 = (x_m - x_P)^2 + (y_m - y_P)^2, \tag{4.4.88}$$

$$R_m^2 = {x_m}^2 + {y_m}^2, \tag{4.4.89}$$

$$h^2 = {x_P}^2 + {y_P}^2. \tag{4.4.90}$$

O momento de inércia do corpo rígido em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa I_{CM} é o produto do somatório (integral) de todos os elementos infinitesimais de massa desse corpo com o quadrado da distância de cada um desses elementos a esse eixo, dado pela eq. (4.4.7).

$$I_{CM} = \int R_m^2 dm. \tag{4.4.91}$$

Substituindo a eq. (4.4.89) na eq. (4.4.91):

$$I_{CM} = \int ({x_m}^2 + {y_m}^2) dm. \tag{4.4.92}$$

Já o momento de inércia desse corpo em relação ao seu eixo de rotação, o qual passa pelo ponto P (I_P), usando o mesmo raciocínio, é dado por:

$$I_P = \int r_m^2 dm. \tag{4.4.93}$$

Substituindo a eq. (4.4.88) na eq. (4.4.93):

$$I_P = \int [(x_m - x_P)^2 + (y_m - y_P)^2] dm. \tag{4.4.94}$$

Expandindo os dois termos entre parênteses:

$$I_P = \int (x_m^2 + x_P^2 - 2x_m x_P + y_m^2 + y_P^2 - 2y_m y_P) dm. \tag{4.4.95}$$

Separando a integral em termos semelhantes (mesmo índice):

$$I_P = \int (x_m^2 + y_m^2) dm + \int (-2x_m x_P - 2y_m y_P) dm + \int (x_P^2 + y_P^2) dm. \tag{4.4.96}$$

A primeira integral do resultado acima representa o momento de inércia do corpo que passa pelo seu centro de massa I_{CM}. Na segunda, podemos colocar os termos que correspondem às coordenadas fixas referentes ao ponto que passa o eixo fixo de rotação (ponto P) e separá-lo em duas integrais. O termo entre parênteses da terceira integral representa o quadrado da distância h [eq. (4.4.90)]. Já $\int dm$, representa a soma de todos os elementos infinitesimais de massa do corpo rígido e, por consequência, a sua massa total M.

Substituindo as informações do parágrafo anterior na eq. (4.4.96):

$$I_P = I_{CM} - 2x_P \int x_m dm - 2y_P \int y_m dm + Mh^2. \tag{4.4.97}$$

Para encontrar as coordenadas do centro de massa de um sistema que tem uma distribuição contínua de massa, usamos a seguintes equações:

$$\int x_m dm = Mx_{CM}, \tag{4.4.98}$$

$$\int y_m dm = My_{CM}. \tag{4.4.99}$$

em que x_{CM} é a abscissa do centro de massa, y_{CM}, a sua ordenada e M a massa total da estrutura do corpo rígido.

Para o exemplo que estamos estudando [Fig. (26)], a abscissa, a ordenada e o cota do centro de massa estão localizados na origem do sistema cartesiano e, portanto, são nulos ($x_{CM} = y_{CM} = z_{CM} = 0$). Assim, substituindo as duas últimas equações na eq. (4.4.97), chegamos na equação que representa o teorema dos eixos paralelos, considerando $I_P = I$:

$$I = I_{CM} - 2x_P Mx_{CM} - 2y_P My_{CM} + Mh^2, \tag{4.4.100}$$

$$I = I_{CM} - 2x_P M\,.\,0 - 2y_P M\,.\,0 + Mh^2, \tag{4.4.101}$$

$$I = I_{CM} + Mh^2. \tag{4.4.101}$$

Portanto, o momento de inércia de um corpo rígido em relação a um eixo que não passa pelo seu centro de massa I é igual à soma do seu momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa I_{CM} com o produto da sua massa total M com o quadrado da distância perpendicular entre esses dois eixos h^2.

É importante ficar atento de que é preciso saber qual o valor do momento de inércia de um corpo em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa para o uso do teorema dos eixos paralelos, objetivando o cálculo do momento de inércia de um corpo rígido em relação a

um eixo que passa por um ponto arbitrário desse corpo. Ademais, como o próprio nome do teorema sugere, os dois eixos (o do centro de massa e o que se deseja calcular o momento de inércia) precisam ser paralelos entre si e a distância de um em relação ao outro ser perpendicular.

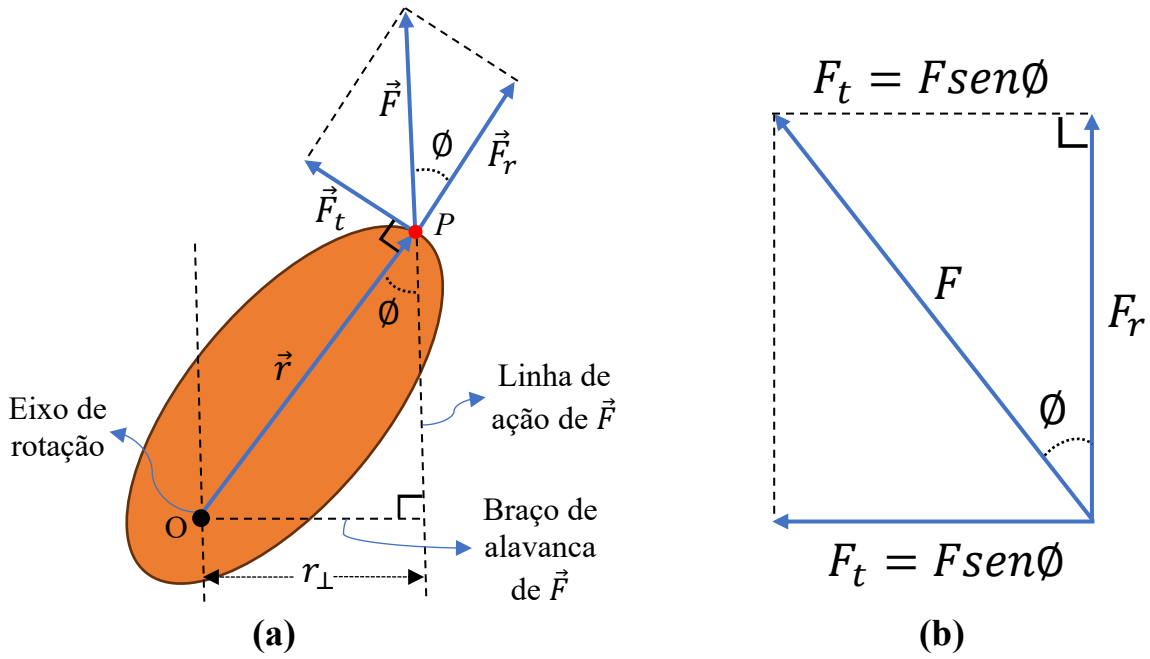
4.5 TORQUE

O torque ($\vec{\tau}$) ou momento de uma força é uma grandeza vetorial (iremos tratar essa grandeza como vetor no mais adiante), definido como a tendência de rotação sofrida por um corpo que está sujeito a uma força e descreve a capacidade dessa força aplicada fazer o objeto girar ao redor de um ponto onde existe um eixo de rotação.

Para um bom desempenho no movimento de rotação, é importante considerar que a força aplicada para girar o corpo deve ter uma intensidade adequada para vencer a resistência à rotação do objeto; que quanto maior a distância do ponto de rotação (eixo), maior a eficácia do torque; e que o ângulo entre a força aplicada e o vetor posição que vai do eixo de rotação ao ponto de aplicação da força influência no torque produzido.

Assim, o módulo do torque depende da intensidade da força aplicada, da distância do ponto de rotação e do ângulo de aplicação dessa força.

Figura 27 - Corpo rígido sofrendo a ação de uma força $\vec{F}$



Fonte: Elaborada pelos autores.

A Fig. (27) acima mostra um corpo rígido que está livre para girar, ou seja, não há

resistência a sua rotação e, consequentemente, não há força de resistência ao seu giro em relação a um eixo. Em (a), está um corpo sob a influência de uma força $\vec{F}$ que produz o torque $\vec{\tau}$. Em (b), estão representadas o módulo das componentes tangencial e radial ($\vec{F}_t$ e $\vec{F}_r$), que são perpendiculares entre si, da força $\vec{F}$.

O torque gerado pela força $\vec{F}$ induz a rotação do corpo rígido representado na Fig. (27a) em torno do eixo fixo de rotação que passa pelo ponto O, que se encontra perpendicular ao plano da superfície e se estende para fora da dela. Na realidade, apenas a componente tangencial $\vec{F}_t$ da força provoca a rotação. A componente radial $\vec{F}_r$ não produz rotação, visto que ela tem a mesma direção da reta que passa pelo ponto O.

Para calcular o módulo do torque, ou seja, a capacidade de uma força $\vec{F}$ fazer um corpo girar, precisamos levar em consideração não apenas o módulo da componente tangencial da força, mas também a distância entre o ponto de aplicação dessa força e o ponto que está sobre o eixo de rotação. Quanto maior a força aplicada e quanto maior a distância de aplicação dessa força em relação ao eixo de rotação, maior será o torque, ou seja, o módulo do torque é diretamente proporcional a esses dois fatores:

$$\tau = rF_t, \tag{4.5.1}$$

em que τ é o módulo do torque (em $N\,.\,m$), r é a distância entre o eixo de rotação e a força $\vec{F}$ aplicada e F_t, o módulo componente tangencial $\vec{F}_t$ da força $\vec{F}$.

Como $\vec{F}_t$, $\vec{F}_r$ e $\vec{F}$ formam um triângulo retângulo, conforme mostrado na Fig. (27b), podemos calcular o módulo de $\vec{F}_t$ em função do módulo de $\vec{F}$ usando as relações trigonométricas de um triângulo retângulo:

- $sen\emptyset = \dfrac{Cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \emptyset}{Hipotenusa}$.

O cateto oposto ao ângulo $\emptyset$ é F_t e a hipotenusa é a diagonal do polígono formado pelo pelas retas simétricas e paralelas às componentes, ou seja, a hipotenusa é F. Assim:

$$sen\emptyset = \frac{F_t}{F}, \tag{4.5.2}$$

$$F_t = Fsen\emptyset. \tag{4.5.3}$$

Substituindo a eq. (4.5.3) na eq. (4.5.1), obtemos:

$$\tau = Frsen\emptyset, \tag{4.5.4}$$

sendo $\emptyset$ ângulo formado entre o prolongamento do vetor $\vec{r}$ e a força $\vec{F}$.

O ângulo $\emptyset$ formado entre os vetores $\vec{F}$ e $\vec{F}_r$ é o mesmo ângulo formado entre a linha de ação de $\vec{F}$ e o vetor $\vec{r}$, pois, além de esses dois ângulos serem opostos pelo mesmo vértice, $\vec{F}_r$ e $\vec{r}$ estão na mesma direção radial.

Outra forma equivalente de se calcular o módulo do torque é usar o módulo da componente de $\vec{r}$ que é perpendicular às retas paralelas que passam pelo eixo de rotação e a que coincide com a direção do vetor $\vec{F}$ (linha de ação de $\vec{F}$). Essa distância é chamada de braço de alavanca $r_\perp$.

Sendo $r_\perp = rsen\emptyset$, vamos substituir esse valor na eq. (4.5.4):

$$\tau = Fr_\perp. \tag{4.5.5}$$

Usamos, até o momento, apenas uma forma para definir o módulo do torque. Mas se várias forças forem aplicadas ao corpo rígido com o objetivo de fazê-lo girar? Para esse caso, basta calcular a intensidade da força resultante e encontrar o módulo da componente tangencial dessa força.

De acordo com a segunda lei de Newton:

$$F_t = ma_t, \tag{4.5.6}$$

em que F_t é o módulo da componente tangencial da força resultante $\vec{F}_R$ e a_t, o módulo da aceleração tangencial.

Substituindo a eq. (4.5.6) na eq. (4.5.1):

$$\tau = rma_t. \tag{4.5.7}$$

Acontece que $a_t = \alpha r$ [eq. (4.2.19)]. Logo:

$$\tau = rm\alpha r \tag{4.5.8}$$

$$\tau = (mr^2)\alpha, \tag{4.5.9}$$

A termo mr^2 corresponde ao momento de inércia I de uma partícula. Assim:

$$\tau = I\alpha, \tag{4.5.10}$$

concluindo que o torque devido à componente tangencial de $\vec{F}$ produz uma aceleração angular do corpo rígido em volta do eixo fixo de rotação.

Se a partícula estiver sofrendo a ação de várias forças, podemos escrever a última equação da seguinte forma:

$$\tau_R = I\alpha, \tag{4.5.11}$$

em que τ_R é o torque resultante que age sobre a partícula.

De maneira genérica, as duas últimas equações também podem ser aplicadas a qualquer corpo rígido, desde que usemos a equação específica para calcular o seu momento de inércia.

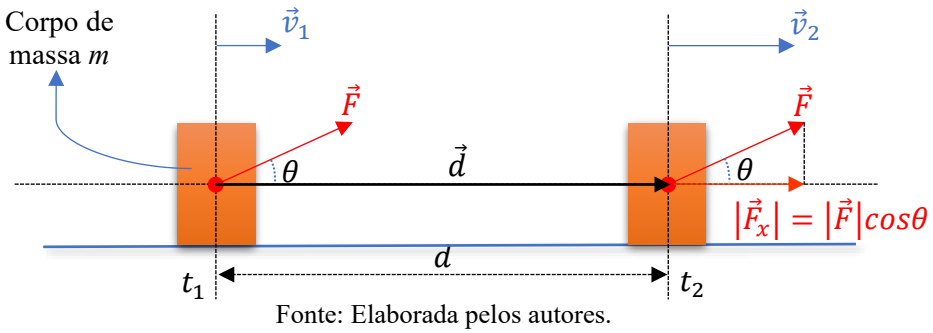
É importante lembrar que apesar de termos usado, basicamente, o módulo do torque para análise das situações deste tópico, ele é uma grandeza vetorial e sua orientação se dá pela regra da mão direita. Discutiremos sua natureza vetorial mais adiante. No caso do não uso do torque como grandeza vetorial, atribuímos um valor positivo ou negativo para ele, dependendo sentido da rotação do corpo ou partícula. No sentido anti-horário, o torque é positivo. No horário, negativo.

4.6 TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

Trabalho (W) é a grandeza física escalar responsável por transferir energia de um corpo para o outro devido à atuação de uma força $\vec{F}$. Quando um corpo rígido de massa m é acelerado em consequência dessa força, ela realiza um trabalho sobre ele, ou seja, o trabalho mede quanto de força foi capaz de mudar a posição de um corpo de um ponto para o outro, independentemente da sua trajetória.

Para um movimento linear, como o trabalho depende da força aplicada sobre o corpo rígido e do deslocamento ocasionado por ela, para calcular sua intensidade devemos levar em consideração a intensidade da força aplicada, o módulo do deslocamento sofrido pelo corpo enquanto submetido à força, além do ângulo formado entre a força e o deslocamento.

Figura 28 - Corpo rígido de massa m em trajetória retilínea do instante t_1 a t_2



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na figura acima, um corpo rígido de massa m, sob ação de uma força constante $\vec{F}$, percorre uma trajetória retilínea, sofrendo um deslocamento $\vec{d}$, formando um ângulo θ ente $\vec{F}$

e $\vec{d}$.

Para que o corpo de massa *m* da Fig. (28) sofra esse deslocamento paralelo ao seu plano de apoio, mesmo submetido a uma força constante com direção diferente da sua, é necessário que a força resultante tenha a mesma direção e o sentido do deslocamento, visto que há outras forças atuando sobre o corpo, como a força peso e a força de atrito, por exemplo.

Assim, como já mencionado, o trabalho realizado sobre um corpo depende da intensidade da força aplicada, do módulo do deslocamento sofrido pelo corpo enquanto submetido à força, além do ângulo formado entre a força e o deslocamento e é diretamente proporcional a eles:

$$W = Fdcos\theta, \tag{4.6.1}$$

sendo W o trabalho realizado sobre o corpo, d o módulo do deslocamento sofrido por ele e θ, o menor ângulo formado entre a força $\vec{F}$ aplicada sobre o corpo e o deslocamento $\vec{d}$.

A unidade do trabalho é o joule (*J*) e, de fato, trabalho é energia. Não qualquer energia, mas a energia útil capaz de realizar um deslocamento em um corpo.

Na eq. (4.6.1), $Fcos\theta$ é o módulo da componente da força aplicada sobre o corpo que tem a mesma direção e sentido do deslocamento.

Supondo que $\vec{F}$ e $\vec{d}$, agora, possuem mesma direção e sentido. O ângulo formado sobre eles é $\theta = 0º$, sendo $cos0º = 1$. Nesse caso, a eq. (4.6.1) se reduz a:

$$W = Fd. \tag{4.6.2}$$

Vamos considerar que, na eq. (4.6.2), F seja o módulo da única força que atua sobre um corpo e, portanto, ela é a força resultante. Pela segunda lei de Newton, $F_R = ma$. Assim:

$$W = mad. \tag{4.6.3}$$

De acordo com a equação de Torricelli ($v_1^2 = v_2^2 + 2ad$), podemos isolar o termo (ad),

$$ad = \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2. \tag{4.6.4}$$

Substituindo a eq. (4.6.4) na eq. (4.6.3), obtemos:

$$W = m\left(\frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2\right). \tag{4.6.5}$$

Fazendo a distributiva:

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2. \tag{4.6.6}$$

Acontece que $\frac{1}{2}mv^2$ corresponde à energia cinética linear de um corpo ou partícula. Então, podemos concluir que o trabalho corresponde à variação da energia cinética de um corpo, o qual definimos como o Teorema do Trabalho e Energia Cinética:

$$W = K_2 - K_1, \tag{4.6.7}$$

$$W = \Delta K, \tag{4.6.8}$$

sendo ΔK a variação da energia cinética do corpo.

De maneira análoga, quando um torque acelera um corpo, fazendo-o girar, esse torque realiza um trabalho sobre ele e, consequentemente, há uma variação na energia cinética de rotação desse corpo. Vamos considerar também que a única energia que muda nesse corpo é a energia cinética de rotação. Podemos relacionar, agora, a variação da energia cinética ΔK ao trabalho W por meio do Teorema do Trabalho e Energia Cinética, sendo que, nesse caso, a energia cinética é a de rotação.

De acordo com a eq. (4.4.6), $K = \frac{1}{2}I\omega^2$. Substituindo essa equação na eq. (4.6.7):

$$W = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2, \tag{4.6.9}$$

em que W é o trabalho realizado sobre o corpo, ΔK a variação da sua energia cinética de rotação, I o seu momento de inércia em relação a um eixo fixo de giro, ω_1 a sua velocidade angular inicial e ω_2, a sua velocidade angular final.

A eq. (4.6.9) pode ser usado para calcular o trabalho realizado tanto para uma partícula quanto para um corpo rígido, bastando usar o momento de inercia para uma partícula ou o adequado para um corpo rígido específico.

Para um eixo restrito a uma direção, como o eixo *x*, por exemplo, podemos calcular o trabalho, para força variável ou não, utilizando a seguinte equação:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx, \tag{4.6.10}$$

sendo dx um deslocamento infinitesimal no eixo x, nos limites de x_1 a x_2.

Se a força que realiza o trabalho for constante e tenha a mesma direção do deslocamento, podemos retirá-la da integral. Assim, o trabalho, eq. (4.6.10), se reduz a:

$$W = F\int_{x_1}^{x_2} dx. \tag{4.6.11}$$

Acontece que $\int_{x_1}^{x_2} dx$ é o deslocamento d nos limites da integral. Logo:

$$W = Fd, \tag{4.6.12}$$

o que corresponde à mesma a eq. (4.6.2) já demonstrada.

O deslocamento infinitesimal angular $d\theta$ é o correspondente angular do deslocamento infinitesimal linear ds, da mesma maneira que a força $\vec{F}$ é a correspondente linear do torque $\vec{\tau}$. Partindo dessa analogia, podemos escrever a eq. (4.6.2) da seguinte forma:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\, d\theta, \tag{4.6.13}$$

em que τ é o módulo do torque que faz o corpo girar, realizando um trabalho W sobre ele, e θ_1 e θ_2 são, respectivamente, as posições angulares antes e depois da rotação.

Se τ for constante, a eq. (4.6.13) se reduz a:

$$W = \tau\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta. \tag{4.6.14}$$

Resolvendo a integral:

$$W = \tau(\theta)|_{\theta_1}^{\theta_2}. \tag{4.6.15}$$

Aplicando os limites:

$$W = \tau(\theta_2 - \theta_1). \tag{4.6.16}$$

Sabendo que $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$,

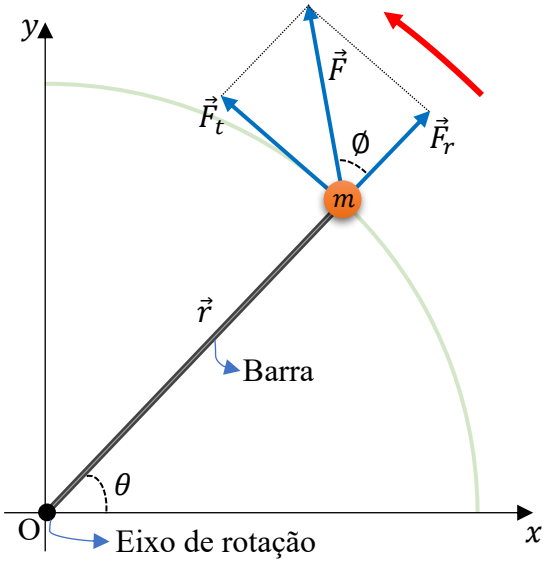
$$W = \tau\Delta\theta. \tag{4.6.17}$$

Para ilustrar os conceitos apresentados, a Fig. (29) a seguir mostra um corpo rígido simples, de massa *m*, livre para girar em torno de um eixo fixo que passa pelo ponto O. O corpo está preso na extremidade de uma barra de massa desprezível e está submetido a uma força $\vec{F}$, que gera um torque sobre ele, fazendo-o girar.

Vamos considerar que apenas a energia cinética de rotação varia. Durante a rotação, essa força realizará um trabalho sobre o corpo rígido, ocasionando em um deslocamento angular.

Figura 29 - Corpo rígido de massa m em rotação preso à extremidade de uma barra fina

O torque associado à componente tangencial da força aplicada sobre o corpo de massa m faz o corpo girar, adquirindo energia cinética de rotação e, assim, realizando um trabalho sobre ele.



Fonte: Elaborada pelos autores.

4.6.1 Potência

A Potência (P) está relacionada com a quantidade de energia que é recebida ou cedida por um corpo em certo intervalo de tempo, ou seja, ela mensura o quão rápido ocorre essa transferência de energia.

Como o trabalho é energia útil, a taxa de variação da energia com o qual o trabalho é realizado é a caracterização da potência. Podemos calcular a potência mecânica de um corpo em movimento unidimensional, submetido a uma força constante, da seguinte forma:

$$P = \frac{dW}{dt}. \tag{4.6.18}$$

Substituindo a eq. (4.6.2) na eq. (4.6.18), obtemos:

$$P = \frac{d}{dt}(Fd). \tag{4.6.19}$$

Para uma força F constante, podemos retirá-la da derivada:

$$P = F\frac{d}{dt}d. \tag{4.6.20}$$

Como a derivada do deslocamento d em relação ao tempo é a velocidade v, reduzimos o resultado acima a:

$$P = Fv. \tag{4.6.21}$$

Como as grandezas angulares correspondentes à força $\vec{F}$ e à velocidade $\vec{v}$ são o torque $\vec{\tau}$ e a velocidade angular $\vec{\omega}$, respectivamente, podemos usar uma equação análoga à eq. (4.6.21) para calcular a potência durante um movimento de rotação:

$$P = \tau\omega, \tag{4.6.22}$$

em que P é a potência, medida em *watt – W*.

É importante observar que a potência relacionada à energia mecânica, que, no nosso caso, estamos trabalhando com a energia cinética de rotação, só se aplica a sistemas dissipativos, uma vez que não existindo força dissipativa de energia, como o atrito, por exemplo, haverá conservação da energia e, portanto, não existirá trabalho realizado.

Ademais, devemos notar, ainda, que, no SI, a unidade da potência é o *watt*, representando pela letra "*W*", em homenagem ao inventor escocês James Watt (1736 a 1819) pelas suas contribuições científicas. Com isso, é importante não confundir a unidade de potência com a grandeza escalar trabalho, também representada pela letra "*W*", a qual é derivada do inglês (*work*).

4.7 ROLAMENTO

Nas seções anteriores, observamos a importância, na Física, do estudo das rotações. Em relação às aplicações desse estudo, a mais importante é, provavelmente, o estudo do rolamento de corpos rígidos, que possuem características de movimento idênticas aos das rodas.

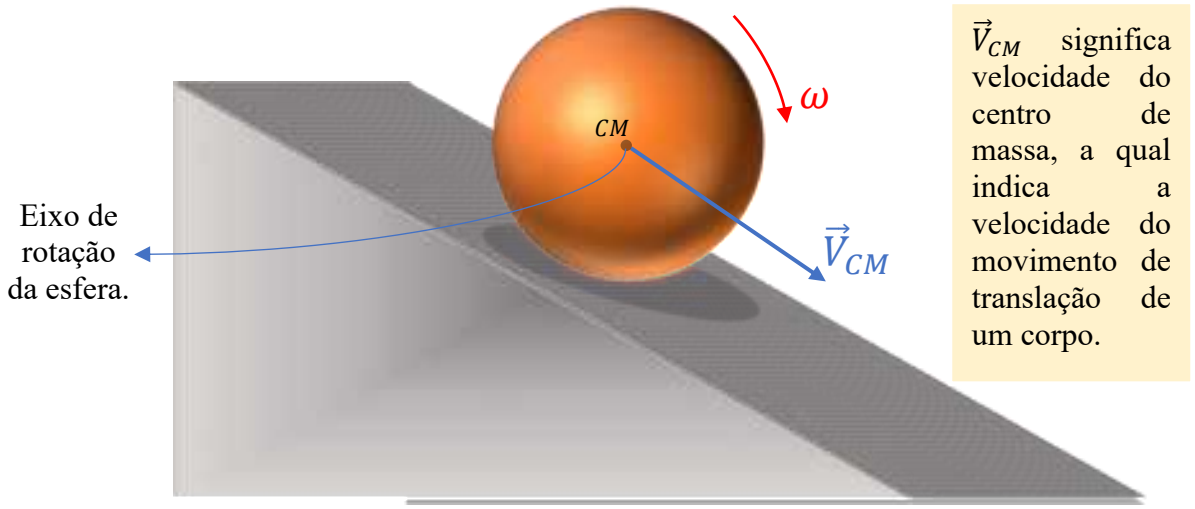
Talvez, a roda seja uma das principais invenções de toda a história. Com ela, foi possível tornar o transporte muito mais rápido, contribuindo para a evolução de cidades e da tecnologia humana ao longo dos tempos. É fácil perceber que, hoje em dia, é impossível de imaginar um mundo sem o uso delas. Basta observar bicicletas, motocicletas, carros, caminhões, ônibus e muitos outros veículos sobre rodas em nossa volta.

Apesar de o transporte sobre rodas ser bastante antigo, muito de novo pode ser criado usando essa engenharia, como o *Segway*, por exemplo, que consiste em um veículo elétrico semelhante a um patinete. Nele, é possível uma pessoa se movimentar linearmente e girar rapidamente em torno do seu próprio eixo ao mesmo tempo. O uso do rolamento vem sendo praticado pelo homem ao longo dos séculos e, certamente, muitas invenções ainda surgirão usando esse princípio. Assim, quando um corpo está, ao mesmo tempo, descrevendo os movimentos de translação e rotação, ele está descrevendo um movimento de rolamento.

A Fig. (30) a seguir ilustra uma esfera homogênea descrevendo um movimento de

rolagem sobre um plano inclinado. Observe que a esfera possui um movimento de giro enquanto descreve também um movimento linear.

Figura 30 - Esfera homogênea em rolamento sobre um plano inclinado



Fonte: Elaborada pelos autores.

4.7.1 – Rolamento: uma combinação de Rotação e Translação

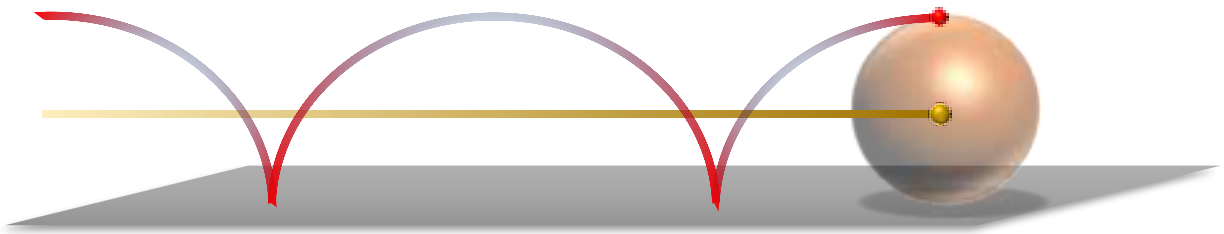
Como vimos, rolamento é a combinação do movimento linear de um corpo, chamado de translação, com o de movimento de giro em torno de um eixo fixo, chamado de rotação. Em outras palavras, rolamento é uma associação dos movimentos simultâneos de rotação com o movimento de rotação de um corpo, como um pneu de uma bicicleta em movimento retilíneo, por exemplo.

Neste capítulo, vamos considerar apenas corpos que rolam suavemente em uma superfície, ou seja, objetos que descrevem movimento de rolagem sem escorregar (deslizar) ou quicar nela. Esse movimento é chamado de rolamento suave.

Nesse tipo de rolamento, apesar de o centro dos objetos se moverem em linha reta paralela à superfície, um outro ponto do corpo diferente desse centro não realiza o mesmo movimento. Todavia, vamos estudar a combinação desses movimentos tratando o movimento linear de translação do centro de massa e rotação do resto do corpo em torno desse centro de massa.

A Fig. (31) ilustra as linhas que descrevem as trajetórias de dois pontos distintos de um objeto em rolamento.

Figura 31 - Esfera maciça homogênea rolando da esquerda para direita sem deslizamento

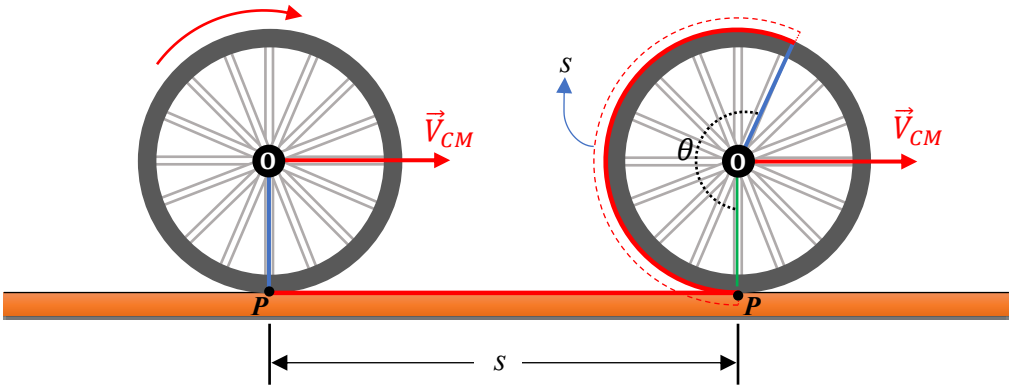


Fonte: Elaborada pelos autores.

Observe que, na Fig. (31), o ponto de cor “amarelado”, que se encontra no centro da esfera, realiza um movimento de translação, enquanto o ponto de cor vermelha, posicionado na extremidade superior da esfera, realiza uma trajetória extremamente distinta. Como o movimento descrito pela esfera não sofreu deslizamento, se trata de um rolamento suave, o que pode não ser tão simples de ser analisado.

Para entender melhor o movimento de rolamento, observe a seguir a Fig. (32) e perceba que um ponto O, contido no centro de massa da roda, se move com velocidade constante $\vec{V}_{CM}$. Por outro lado, um ponto P, que está sempre em contato com o solo, também se move com a velocidade $\vec{V}_{CM}$ (velocidade do centro de massa), uma vez que esses dois pontos caminham juntos no mesmo sentido no movimento de translação.

Figura 32 - Roda em rolamento com velocidade do centro de massa $\vec{V}_{CM}$.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na Fig. (32), o movimento da roda pode ser visto de várias perspectivas, dependendo do referencial adotado. Vamos considerar uma pessoa parada na calçada, olhando um ciclista passar como um dos referenciais, e o próprio ciclista como o outro referencial. Durante um intervalo de tempo Δt, o observador da calçada enxerga os pontos O e P se deslocarem em linha reta a uma distância s. Já o ciclista observa apenas a roda girar, descrevendo um ângulo θ com

o ponto P que está tocando o solo, descrevendo, no mesmo intervalo de tempo Δt, um arco de circunferência com a mesma medida s observada pela pessoa na calçada.

Como já vimos anteriormente, um arco de circunferência s pode ser relacionado com o ângulo de rotação θ e o raio da trajetória circular [eq. (4.1.1)], que, nesse caso, é o raio R da roda da bicicleta:

$$s = \theta R. \tag{4.7.1}$$

A velocidade linear do centro de massa V_{CM} da roda é obtida derivando s em relação ao tempo, ao passo que para se obter a velocidade angular em qualquer ponto do corpo, é preciso derivar o ângulo de giro θ também em relação ao tempo. Assim:

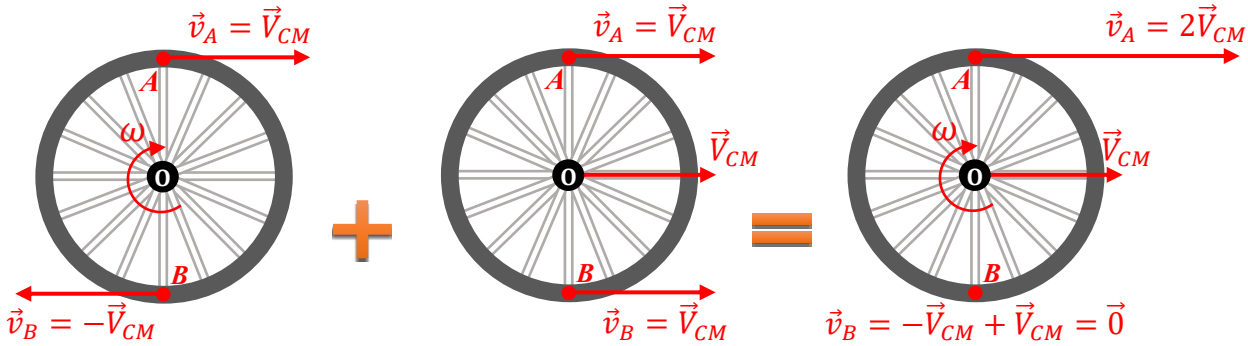
$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} R, \tag{4.7.2}$$

$$V_{CM} = \omega R, \tag{4.7.3}$$

em que V_{CM} é a velocidade do centro de massa da roda, ω a sua velocidade angular e R, o seu raio.

A Fig. (33) a seguir mostra que o movimento de rolamento é, de fato, a combinação dos movimentos individuais dos dois tipos de movimentos que vimos até então: o movimento de translação puro e o movimento de rotação puro. Na rotação pura, todos os pontos da roda se movem com a mesma velocidade angular e todos os pontos da sua borda se movem à mesma velocidade linear escalar. Na translação pura, todos os pontos da roda se movem com a mesma velocidade linear escalar, que é a mesma velocidade do seu centro de massa.

Figura 33 - Combinação dos movimentos de rotação e translação puros de uma roda



(a) Rolagem **(b) Translação pura** **(c) Rolamento**

Fonte: Elaborada pelos autores.

Podemos observar as características de um movimento apenas de giro da roda (rotação pura) na Fig. (33a). Nela, é como se o eixo estivesse estacionário e todos os pontos da roda

possuem a mesma velocidade angular, enquanto a velocidade linear, em pontos dessa roda, depende da distância desse eixo de rotação. Para pontos que descrevem a mesma trajetória circular, o módulo da velocidade linear permanece constante com o passar do tempo, mas sua direção e sentido muda a cada instante.

Na Fig. (33b), a roda não gira, faz apenas um movimento linear (translação pura) para direita. Nela, observamos que todos os pontos da roda possuem a mesma velocidade linear, que é a velocidade do centro de massa $\vec{V}_{CM}$.

Já na representação da Fig. (33c), é ilustrada a combinação entre os movimentos em (a) e (b). Como resultado, temos que a roda descreve um movimento linear para direita enquanto gira em torno do seu centro de massa no sentido horário. Esse é o movimento de rolamento, que, como já conceituamos várias vezes, consiste na junção dos movimentos de rotação e translação.

Observe que nas três representações da Fig. (33), existem três pontos posicionados no mesmo lugar a serem considerados: o ponto A, o qual faz parte da extremidade superior da roda; o ponto B, que se localiza na extremidade inferior; e o ponto O, que está no centro da roda e, portanto, no seu centro de massa, pois estamos considerando uma roda homogênea.

Como resultado algébrico dessa combinação, as velocidades do ponto A dos movimentos de rotação pura e translação pura possuem mesmo módulo direção e sentido, tendo como resultante no movimento de rolagem $\vec{v}_A = 2\vec{V}_{CM}$. No ponto B, as velocidades possuem mesmo módulo, mas sentidos opostos; o que resulta em uma velocidade nula $\vec{v}_B = \vec{0}$ no movimento de rolamento. Como no centro da roda (ponto O) a velocidade linear é nula na rotação pura, a velocidade de rolamento, nesse ponto, é apenas $\vec{V}_{CM}$.

Figura 34 - Roda de uma bicicleta em movimento para a direita.



Fonte: Elaborada pelos autores.

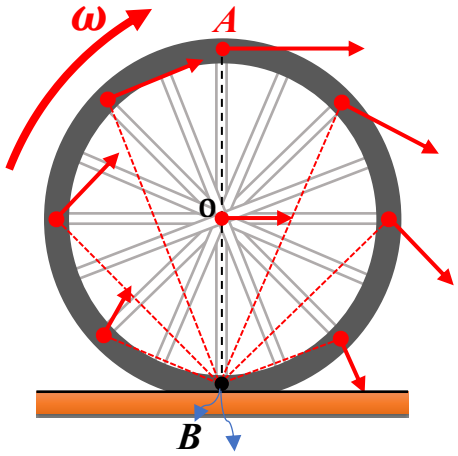
Na Fig. (34), podemos confirmar os resultados da Fig. (33), em que os raios de cima de uma roda de bicicleta em movimento estão menos nítidos do que os raios de baixo pelo fato da diferença de velocidade entre eles em um movimento de rolamento.

4.7.2 – Rolamento como uma Rotação Pura

O movimento de rolagem de uma roda também pode ser descrito como um movimento de rotação pura em que o eixo de rotação passa pelo ponto da roda que está em contato com o solo. Como exemplo, vamos usar a Fig. (33c): o ponto de contato entre a roda e o solo é o ponto B. Nesse exemplo, a velocidade linear em qualquer ponto da roda é perpendicular à linha que liga esse ponto ao ponto B, sendo a velocidade angular da roda constante em todos os pontos da roda, os quais descrevem arcos de circunferências cujos centros é o ponto de contato entre a roda e o solo, ou seja, o ponto B.

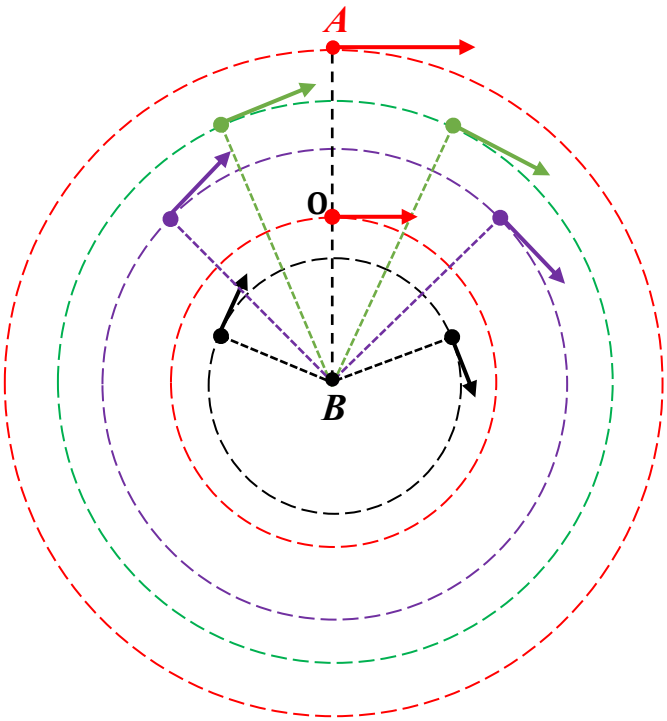
A Fig. (35) a seguir ilustra as velocidades instantâneas em alguns pontas da roda, os quais seus valores podem ser obtidos combinando os movimentos de rotação e translação puros, como mostrado na Fig. (33).

Figura 35 - Movimento de rolagem como uma rotação pura



A velocidade linear no ponto "**B**", nesse movimento de rolamento, é nula, pois as velocidades combinadas, nesse ponto, dos movimentos de rotação e translação são opostas.

(a)



(b)

Fonte: Elaborada pelos autores.

Nas duas ilustrações da Fig. (35), as velocidades lineares estão representadas nos mesmos pontos da roda em movimento de rolamento. Em (b), as linhas tracejadas revelam as trajetórias circulares do movimento com a análise de uma rotação pura, mesmo o movimento não sendo desse tipo. Como a velocidade angular é constante em cada ponto, podemos provar os valores para as velocidades do movimento de rolamento descrito na Fig. (33c).

Como o módulo da velocidade linear escalar em cada ponto é $v = \omega r$, vamos calcular as velocidades nos pontos conhecidos da Figura Fig. (33c) com base nas informações da Fig. (35b):

Para o Ponto A:

$$v_A = \omega r_A. \tag{4.7.4}$$

Acontece que o ponto O é o centro da roda, o qual divide ao meio a distância entre o ponto B e o ponto A, ou seja, o raio da trajetória do ponto A é igual a duas vezes o raio da roda ($r_A = 2R$):

$$v_A = \omega \,.\, 2R. \tag{4.7.5}$$

De acordo com a eq. (4.7.3), ωR representa a velocidade do centro de massa. Logo, podemos escrever:

$$v_A = 2V_{CM}. \tag{4.7.6}$$

Para o ponto O, a distância para o ponto B é o próprio raio da roda. Assim:

$$v_O = V_{CM}. \tag{4.7.7}$$

Para o ponto B, a distância para o eixo de rotação é zero, tendo em vista que ele está no eixo de rotação. Logo:

$$v_B = 0. \tag{4.7.8}$$

4.8 ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO

A energia cinética de rolamento de um corpo corresponde à soma das suas energias cinéticas de rotação e de translação, pois já sabemos que o movimento de rolagem é a combinação desses dois tipos de movimentos.

Para calcular a energia cinética de rolamento, vamos considerar o movimento de rolagem de uma roda homogênea em relação a um observador estacionário. Encarando o

movimento dessa roda como o de uma rotação pura em torno de um eixo que passa pelo ponto B da Fig. (35), o qual não representa o seu centro de massa, a sua energia cinética é calculada de acordo com a equação $K = \frac{1}{2} I\omega^2$ [eq. (4.4.6)], em que I é o momento de inércia da roda em relação ao eixo que passa pelo ponto B e ω, a sua velocidade angular.

Para calcular o momento de inércia de qualquer ponto de um corpo, nesse caso o da roda, basta sabermos o momento de inercia desse corpo em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa por meio do Teorema dos Eixos paralelos $I = I_{CM} + Mh^2$ [eq. (4.4.101)], sendo I_{CM} o momento de inércia da roda em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa, M a sua massa e h, a distância perpendicular entre os dois eixos (o que passa pelo centro de massa e o que passa por um outro ponto *P*), que, para a roda, representa a medida do seu raio R.

Substituindo I [eq. (4.4.101)] na equação da energia cinética de rotação [eq. (4.4.6)]:

$$K = \frac{1}{2}(I_{CM} + MR^2)\omega^2. \tag{4.8.1}$$

Fazendo a distributiva:

$$K = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} MR^2\omega^2. \tag{4.8.2}$$

De acordo com a eq. (4.7.3), $V_{CM} = \omega R$. Logo:

$$K = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} M\omega R \,.\, \omega R, \tag{4.8.3}$$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} MV_{CM} \,.\, V_{CM}, \tag{4.8.4}$$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} MV_{CM}^2, \tag{4.8.5}$$

sendo K a energia cinética de rolamento, I_{CM} o momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de massa, ω a velocidade angular, M a massa do corpo e V_{CM}, a velocidade do centro de massa.

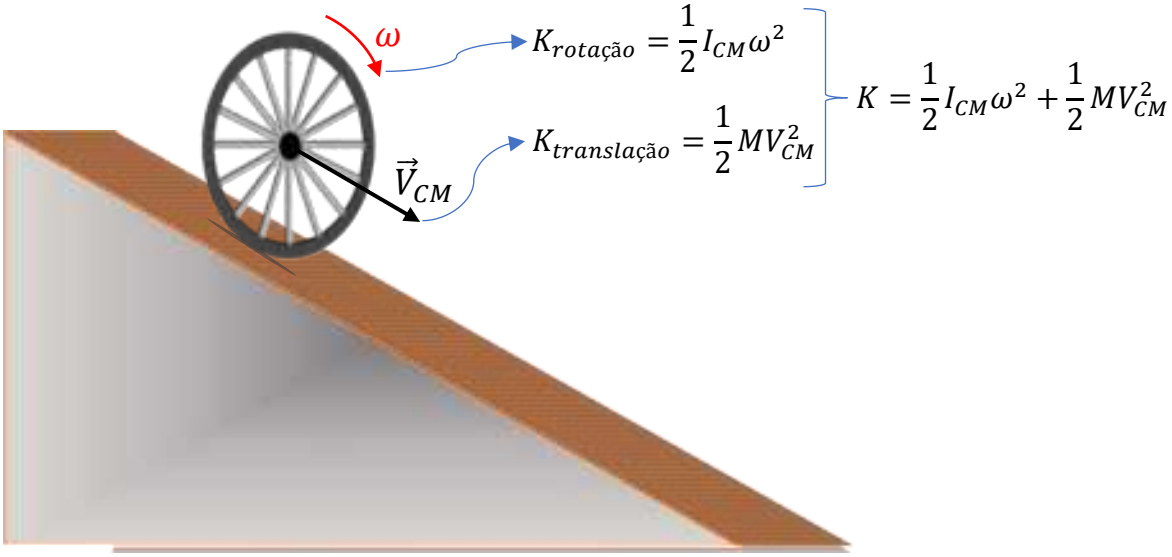
Para a roda, podemos interpretar a eq. (4.8.5) como $\frac{1}{2} I_{CM}\omega^2$ sendo a energia cinética associada ao seu movimento de rotação em torno do eixo que passa pelo seu centro de massa [Fig. (35a)], e o termo $\frac{1}{2} MV_{CM}^2$ como a energia cinética associada ao movimento de translação do centro de massa da roda [Fig. (35b)].

É importante destacar que um corpo em movimento de rolamento possui dois tipos de

energias cinéticas: uma associada ao movimento de rotação $\left(\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2\right)$ em torno do eixo que passa pelo centro de massa e uma associada ao movimento de translação do centro de massa $\left(\frac{1}{2}MV_{CM}^2\right)$.

A Fig. (36) a seguir ilustra uma roda homogênea com velocidade angular ω e velocidade do seu centro de massa $\vec{V}_{CM}$ descendo uma rampa. Associada a essas velocidades, temos as energias cinéticas de rotação e translação correspondentes, resultando na sua energia cinética de rolamento.

Figura 36 - Roda homogênea em rolamento em um plano inclinado



Fonte: Elaborada pelos autores.

4.9 AS FORÇAS DE ROLAMENTO

Até agora, estudamos apenas as variáveis relacionadas ao movimento de rolamento sem considerar as forças que interferem na tendência de haver deslizamento. Neste capítulo, vamos verificar algumas situações e observar quais são as forças contidas no movimento de rolagem.

4.9.1 Atrito e Rolamento

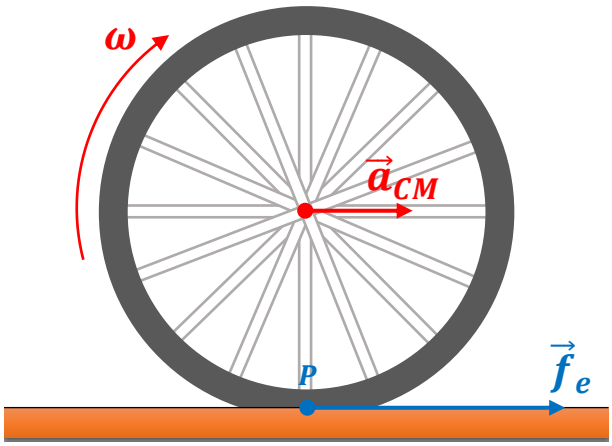
Quando uma roda se move aceleradamente, ela está sujeita a uma força de atrito no ponto em contato com o solo. A aceleração a qual a roda está submetida é devido a uma força que age sobre a ela para aumentar ou diminuir a sua velocidade. Essa aceleração é chamada de

aceleração do centro de massa $\vec{a}_{CM}$, e tem a mesma direção do movimento.

Essa força também produz uma aceleração angular α, fazendo a roda girar mais rápido ou mais lentamente, criando uma tendência de deslizamento no ponto de contato com o solo, o que não aconteceria se a velocidade da roda fosse constante, como mostrado na Fig. (32). A força que age sobre a roda para se opor a essa tendência de deslizamento é a força de atrito.

A Fig. (37) a seguir mostra uma roda em movimento horizontal de rolagem aceleradamente sem deslizar.

Figura 37 - Roda em movimento acelerado sem sofrer deslizamento



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na figura acima, a roda não desliza e, portanto, seu movimento é de rolamento suave e a força de atrito é estático $\vec{f}_e$. Para uma força constante, temos também uma aceleração do centro de massa constante. Assim, a aceleração do centro de massa da roda em um movimento de rolagem suave é análoga à componente tangencial da aceleração [eq. (4.8.5)] que age sobre ela, uma vez que todos os pontos de um corpo em movimento de translação possuem as mesmas características.

Para determinar o módulo da aceleração do centro de massa a_{CM}, em um movimento suave, basta derivar a eq. (4.7.3), com R constante, em relação ao tempo, uma vez que dV_{CM}/dt é igual a α_{CM} e $d\omega/dt$ é igual a α:

$$\frac{dV_{CM}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R, \tag{4.9.1}$$

$$a_{CM} = \alpha R, \tag{4.9.2}$$

em que a_{CM} é a intensidade da aceleração do centro de massa da roda, α é a sua aceleração

angular e R, o seu raio.

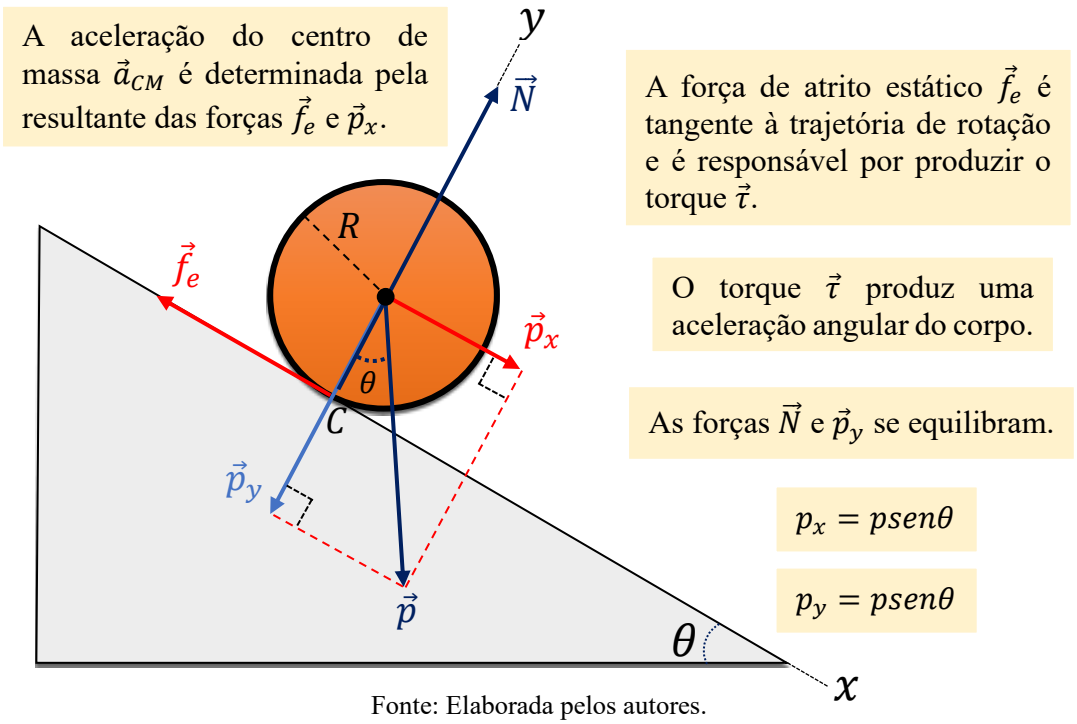
Se houver deslizamento no ponto P, a força de atrito será a força de atrito cinético $\vec{f}_c$. Nesse caso, a eq. (4.9.2) não poderá ser usada, pois não se trata de um movimento de rolamento suave.

Se o movimento da roda da Fig. (37) fosse de frenagem, tanto a aceleração do centro de massa $\vec{a}_{CM}$ quanto a força de atrito estático $\vec{f}_e$ teriam sentidos opostos aos mostrados na figura.

4.9.2 Rolamento no Plano Inclinado

Considere um corpo redondo, homogêneo (densidade constante), de massa M e raio R, descrevendo um movimento de rolamento suave ao longo de um eixo x de uma rampa inclinada, formando um ângulo θ com o solo, conforme mostra a Fig. (38) a seguir.

Figura 38 - Corpo redondo em rolamento suave ao longo de um plano inclinado



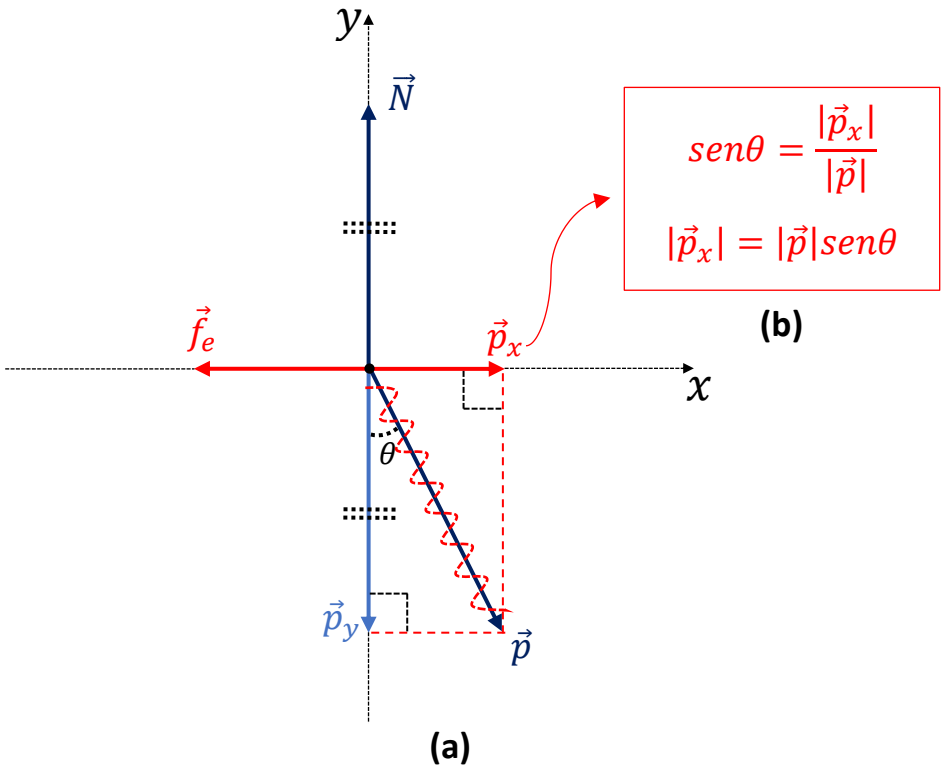
Fonte: Elaborada pelos autores.

Na figura acima, o corpo redondo, em rolamento suave ao longo de um plano inclinado, forma um ângulo θ com o plano horizontal. As forças que agem sobre ele são: a força peso $\vec{p}$ (força gravitacional) que atua sobre o corpo e tem sentido para baixo, sendo a origem desse vetor no centro de massa do corpo. Sua componente $\vec{p}_y$ tem mesmo módulo de $\vec{N}$, mas sentidos

opostos e, por isso, se equilibram. Sua componente $\vec{p}_x$ tem a mesma direção da aceleração do centro de massa $\vec{a}_{CM}$ e da força de atrito estático $\vec{f}_e$; a força normal $\vec{N}$, que é ortogonal à superfície de contato com o corpo (rampa) e atua nesse ponto de contato (C); e a força de atrito estático $\vec{f}_e$, que atua no ponto de contato entre o corpo e a superfície e se opõe à tendência do deslizamento.

Vamos fazer uma representação das forças no plano cartesiano para podemos chegar à equação para cálculo do módulo da aceleração do centro de massa do corpo. Veja a Fig. (39) a seguir.

Figura 39 - Representação das forças que agem no corpo redondo da Fig. (38)



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na Fig. (39), estão representadas as forças que atuam no corpo redondo da Fig. (39). Em (a), todas as forças que atuam sobre o corpo. Em (b), o valor do módulo da componente x da força. Observamos que as únicas que se equilibram são as duas forças que atuam no eixo x: a força de atrito estático $\vec{f}_e$ e a componente x da força peso $\vec{p}_x$, que, de acordo com a Fig. (39b), possui módulo igual a $psen\theta$.

Pela segunda lei de Newton, a resultante das forças que atuam sobre um corpo corresponde ao produto de sua massa m pela aceleração $\vec{a}$ produzida por essa força:

$$\vec{F}_R = m\vec{a}. \tag{4.9.3}$$

Para o movimento de rolamento do corpo redondo da Fig. (38), não é correto afirmar que a força de atrito estático $\vec{f}_e$ é máximo, mas apenas dizer que ela é suficiente para que não haja deslizamento e que o corpo role suavemente. Como $\vec{f}_e$ está no eixo negativo de *x,* enquanto $\vec{p}_x$ está no positivo, vamos escrever o módulo da força resultante $\vec{F}_R$ da seguinte maneira:

$$p_x - f_e = Ma_{CM}, \tag{4.9.4}$$

sendo p_x a componente x da força peso $\vec{p}$ no eixo x, M a massa do corpo redondo em movimento de rolamento para baixo da rampa e a_{CM}, a intensidade da sua aceleração do centro de massa.

A força responsável para produzir o torque e fazer o corpo girar em torno do eixo que passa pelo centro de massa é a força de atrito estático $\vec{f}_e$, pois haveria apenas deslizamento se ela não atuasse em um movimento acelerado. De acordo com a eq. (4.5.4):

$$\tau = rFsen\emptyset, \tag{4.9.5}$$

sendo r o raio R da roda e F a intensidade da força de atrito estático f_e que age sobre ela. o ângulo $\emptyset$ é o ângulo formado entre R e F, que, nesse caso, vale 90º, sendo o $sen90° = 1$. Logo:

$$\tau = Rf_e. \tag{4.9.6}$$

Usando a forma angular para o módulo do torque resultante sobre um corpo eq. (4.5.11), temos:

$$\tau_R = I_{CM}\alpha. \tag{4.9.7}$$

Igualando as equações (4.9.6) e (4.9.7) referentes ao torque:

$$Rf_e = I_{CM}\alpha, \tag{4.9.8}$$

$$f_e = \frac{I_{CM}\alpha}{R}. \tag{4.9.9}$$

Substituindo a eq. (4.9.9) na eq. (4.9.4):

$$p_x - \frac{I_{CM}\alpha}{R} = Ma_{CM}. \tag{4.9.10}$$

Na eq. (4.9.10), $p_x = psen\theta = Mgsen\theta$ e, de acordo com a eq. (4.9.2), $a_{CM} = \alpha R$. Logo:

$$p_x = Mgsen\theta, \tag{4.9.11}$$

$$\alpha = \frac{a_{CM}}{R}. \tag{4.9.12}$$

Substituindo as equações (4.9.11) e (4.9.12) na eq. (4.9.10):

$$Mgsen\theta - \frac{I_{CM}}{R} \cdot \frac{a_{CM}}{R} = Ma_{CM}, \tag{4.9.13}$$

$$Mgsen\theta - \frac{I_{CM}a_{CM}}{R^2} = Ma_{CM}, \tag{4.9.14}$$

$$\frac{Mgsen\theta}{M} - \frac{I_{CM}a_{CM}}{MR^2} = \frac{Ma_{CM}}{M}, \tag{4.9.15}$$

$$gsen\theta - \frac{I_{CM}a_{CM}}{MR^2} = a_{CM}, \tag{4.9.16}$$

$$-\frac{I_{CM}a_{CM}}{MR^2} - a_{CM} = -gsen\theta, \tag{4.9.17}$$

$$\frac{I_{CM}a_{CM}}{MR^2} + a_{CM} = gsen\theta, \tag{4.9.18}$$

$$a_{CM}\left(\frac{I_{CM}}{MR^2} + 1\right) = gsen\theta, \tag{4.9.19}$$

$$a_{CM} = \frac{gsen\theta}{\frac{I_{CM}}{MR^2} + 1}, \tag{4.9.20}$$

$$a_{CM} = \frac{gsen\theta}{1 + I_{CM}/MR^2}, \tag{4.9.21}$$

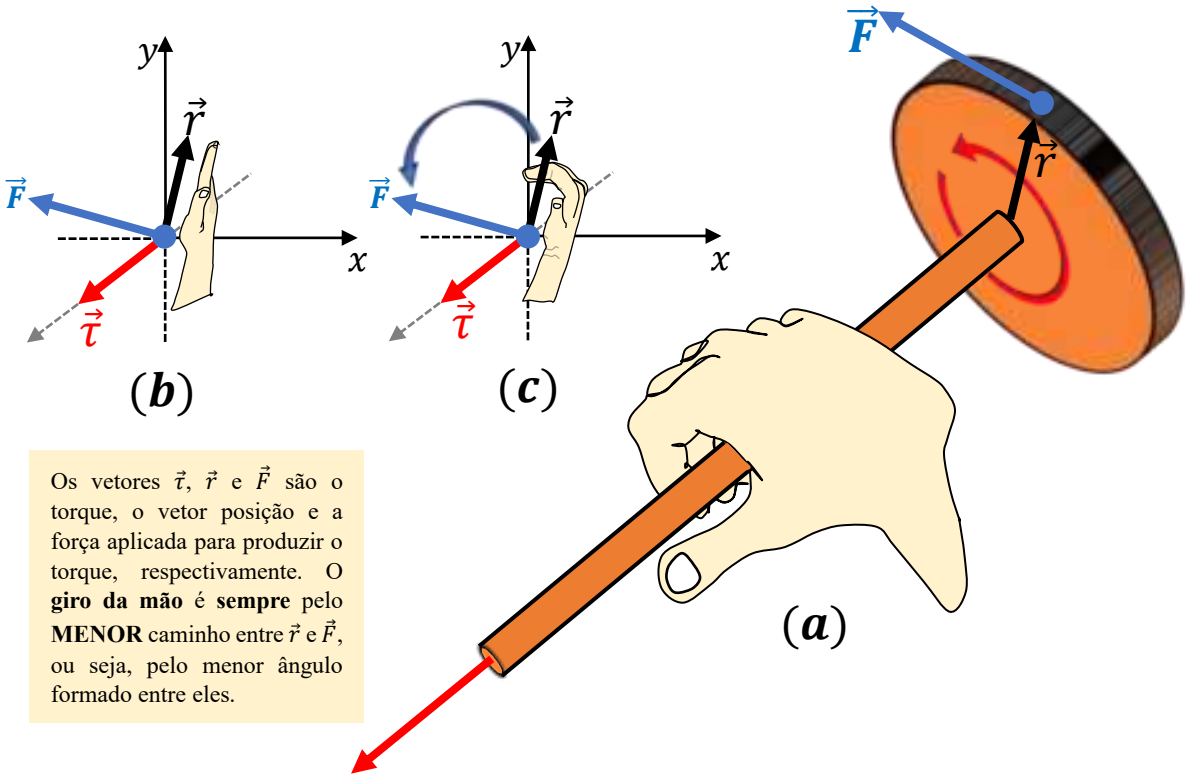
em que a_{CM} representa o módulo da aceleração do centro de massa do corpo redondo, em *m/s*, g o módulo da aceleração da gravidade, θ o ângulo formado entre a horizontal e a inclinação da rampa, I_{CM} o momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de massa do corpo, Ma sua massa e R, o seu raio.

4.10 REVISANDO O TORQUE

Anteriormente, estudamos o torque, também chamado de momento de uma força, em um movimento de rotação de um corpo rígido fixo a um eixo de giro, levando em consideração apenas a sua intensidade. Agora, vamos explorar essa grandeza para aplicação sobre uma

partícula que descreve uma trajetória qualquer e em relação a um ponto fixo, que pode ou não ser o mesmo do eixo de rotação. Assim, será possível determinar, além da sua intensidade, também a sua direção e seu sentido, pelo fato dessa grandeza ser vetorial. Sua orientação é obtida pela regra da mão direita.

Figura 40 - Regra da mão direita para determinar a orientação do torque



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na Fig. (40a), a mão direita está envolvendo o eixo de rotação. Na Fig. (40b), os vetores que envolvem o torque deslocados em relação a uma origem. Em (c), o sentido de giro dos dedos para determinar o sentido do torque.

Para obtermos a orientação do torque, podemos usar a regra da mão direita para produtos vetoriais.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}. \qquad (4.10.1)$$

Sendo o módulo do torque dado pelo produto do módulo do primeiro vetor com o módulo do segundo e com o seno do menor ângulo formado entre os dois vetores.

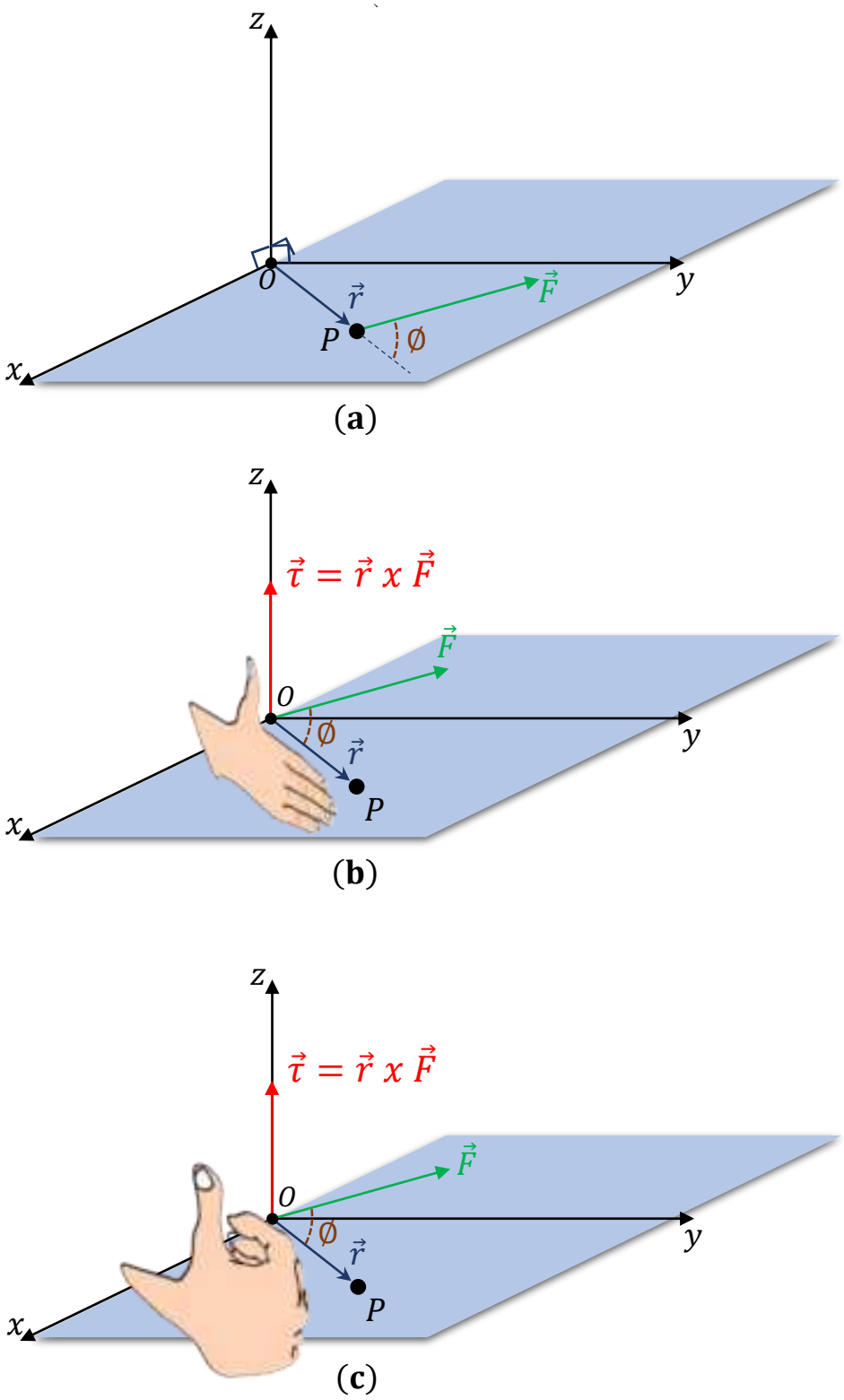
Assim, recaímos sobre a mesma equação já exposta anteriormente:

$$\tau = rFsen\emptyset. \qquad (4.10.2)$$

Vamos usar a Fig. (41) a seguir para verificar como obter a orientação do torque usando

a regra da mão direita para produtos vetoriais.

Figura 41 - Regra da mão direita para produtos vetoriais (torque $\vec{\tau}$)



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na figura acima, temos a representação da regra da mão direita para produtos vetoriais.

Em (a), os vetores posição $\vec{r}$ e força $\vec{F}$ no plano *x-y* relacionados à partícula no ponto P. Em (b), o deslocamento da força para a origem O do sistema e o posicionamento da mão direta para definir a orientação do torque. Em (c), o curvamento dos dedos da mão para o menor ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$, determinando o sentido do torque pelo posicionamento do polegar. É importante verificar que os vetores $\vec{r}$ e $\vec{F}$ precisam estar no mesmo plano para aplicação da regra.

Dito isso, para se obter o sentido do torque, devemos deslocar a força $\vec{F}$ para a origem do sistema (ponto O), sem mudar a sua orientação, de modo que as origens dos dois vetores envolvidos no produto vetorial sejam as mesmas. Em seguida, usaremos a regra da mão direita para produtos vetoriais, posicionando os dedos no sentido do primeiro vetor do produto, ou seja, o vetor posição $\vec{r}$ e depois curvando as pontas dos dedos para o segundo vetor (a força $\vec{F}$), sendo que essa curvatura deverá ser no sentido do menor caminho entre os dois vetores, ou seja, para o menor ângulo entre os dois. O sentido do torque será determinado para onde o polegar direito estiver esticado. Na Fig. (41c), por exemplo, está apontando para o sentido positivo do eixo z.

O módulo do torque também pode ser escrito como:

$$\tau = rFsen\emptyset = r_{\perp}F = rF_{\perp}, \qquad (4.10.3)$$

em que $(F_{\perp} = Fsen\emptyset)$ é a componente de $\vec{F}$ perpendicular a $\vec{r}$, $(r_{\perp} = rsen\emptyset)$ é o braço de alavanca de $\vec{F}$ (distância perpendicular entre a origem *O* e a linha de ação de $\vec{F}$) e $\emptyset$, o menor dos ângulos entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$.

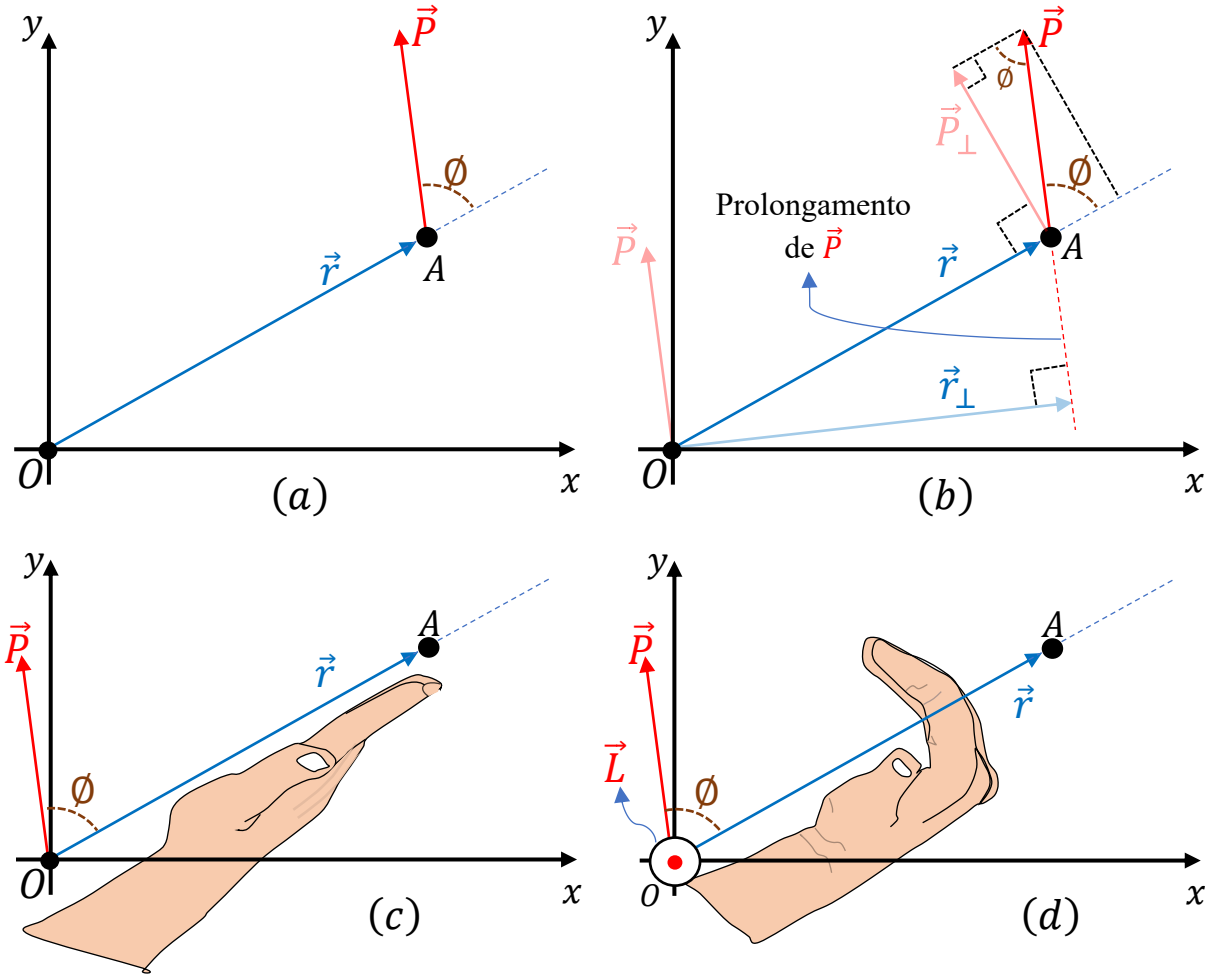
4.11 MOMENTO ANGULAR

Todo corpo em movimento possui uma certa quantidade de movimento. No movimento de translação, essa quantidade de movimento é chamada de momento linear $\vec{P}$.

Já para os movimentos rotacionais, essa quantidade de movimento é chamada de Momento Angular $\vec{L}$ e é umas das principais grandezas da dinâmica rotacional, pois mede a quantidade de movimento de um corpo em rotação em relação a um ponto fixo, que pode ou não ser o mesmo do eixo de rotação. O momento angular é, portanto, uma grandeza vetorial e o equivalente angular do momento linear.

A Fig. (42) a seguir mostra como se obter a orientação de $\vec{L}$ de uma partícula de massa m e momento linear $\vec{P}$ que está passando por um ponto *A* de um plano *x-y*.

Figura 42 - Regra da mão direita para se obter a orientação do momento angular $\vec{L}$



Fonte: Elaborada pelos autores.

De acordo com a Fig. (42), usamos, agora, o plano *x*-*y* paralelo ao plano do papel e observamos a grande semelhança entre o momento angular e o torque no que se diz respeito à aplicação da regra da mão direita para se obter as suas orientações. A única diferença é que, para o momento angular, usamos o momento linear no lugar da força usada no torque. De resto, a aplicação é a mesma.

Assim, basta posicionar a mão direita no mesmo plano que se encontra o vetor posição $\vec{r}$ e o momento linear $\vec{P}$ da partícula e curvar os dedos para o menor caminho entre eles, ou seja, o menor ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{P}$; e o sentido do momento angular se dará para onde apontar o polegar estirado. Na Fig. (42d), por exemplo, a orientação do momento angular é para fora do papel (representando por um ponto, como mostrado na origem), a qual é perpendicular ao plano *x*-*y*.

Já na Figura Fig. (42b), também podemos observar a componente $\vec{r}_\perp$ (distância perpendicular entre a origem e o prolongamento de $\vec{P}$) do vetor posição $\vec{r}$, além da componente tangencial do momento linear $\vec{P}_\perp$.

Assim, para obtermos definir o momento angular $\vec{L}$ e sua orientação, podemos usar a regra da mão direita para produtos vetoriais:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}. \tag{4.11.1}$$

Como $\vec{P} = m\vec{v}$:

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}), \tag{4.11.2}$$

em que $\vec{L}$ é o momento angular da partícula (em kgm^2/s), m a massa da partícula, $\vec{r}$ o seu vetor posição em relação à origem O e $\vec{P}$, o seu momento linear.

Sendo o módulo do momento angular dado pelo produto, além da massa, do módulo do primeiro vetor com o módulo do segundo e com o seno do menor ângulo formado entre os dois vetores.

$$L = rmvsen\emptyset, \tag{4.11.3}$$

em que $\emptyset$ é o menor ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{P}$.

De acordo com a Fig. (42b), a eq. (4.11.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$L = rP_{\perp} = rmv_{\perp}, \tag{4.11.4}$$

$$L = r_{\perp}P = r_{\perp}mv, \tag{4.11.5}$$

em que $(P_{\perp} = Psen\emptyset)$ é o módulo da componente $\vec{P}$ perpendicular a $\vec{r}$, $(r_{\perp} = rsen\emptyset)$ a distância perpendicular entre a origem O e a extensão de $\vec{F}$, $v_{\perp}$ a componente de $\vec{v}$ perpendicular a $\vec{r}$ e $\emptyset$, o menor dos ângulos entre $\vec{r}$ e $\vec{v}$ ou $\vec{r}$ e $\vec{P}$.

É importante notar que o momento angular apenas tem sentido em relação a um ponto dado, o qual sua orientação é sempre perpendicular ao plano formado pelos vetores posição e momento linear, $\vec{r}$ e $\vec{P}$, ou seja, ao plano da órbita de um corpo.

4.11.1 O Momento Angular e a Segunda Lei de Newton

Podemos obter o torque resultante, que age sobre uma partícula isolada, em função da variação do momento angular partindo da equação do momento angular [eq. (4.11.2)], derivando ambos os lados dessa equação:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}m(\vec{r} \times \vec{v}). \tag{4.11.6}$$

Aplicando a distributiva:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right). \tag{4.11.7}$$

Sendo $d\vec{r}/dt$ igual a $\vec{v}$ e $d\vec{v}/dt$ igual a $\vec{a}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m(\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a}). \tag{4.11.8}$$

Como o produto vetorial entre dois vetores iguais é 0:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\left(\vec{0} + \vec{r} \times \vec{a}\right), \tag{4.11.9}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a}), \tag{4.11.10}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{a}. \tag{4.11.11}$$

Sendo $\vec{F}_R = m\vec{a}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_R. \tag{4.11.12}$$

Acontece que $\vec{r} \times \vec{F}_R$ é a definição de produto vetorial para o torque resultante $\vec{\tau}_R$ produzido por uma força resultante $\vec{F}_R$. Logo:

$$\vec{\tau}_R = \frac{d\vec{L}}{dt}. \tag{4.11.13}$$

É importante notar que a eq. (4.11.13) só faz sentido se o torque resultante $\vec{\tau}_R$ e o momento angular $\vec{L}$ sejam definidos em relação ao mesmo ponto, que, em geral, é a origem do sistema de coordenadas considerado. Assim, podemos concluir que a soma vetorial dos torques que agem sobre uma partícula é igual a taxa de variação com o tempo do seu momento angular.

Esta última equação se aplica para a segunda lei de Newton para movimentos rotacionais para uma partícula isolada. Como o momento angular $\vec{L}$ é análogo ao momento linear $\vec{P}$, a segunda lei de Newton para movimentos lineares é escrita na forma:

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{P}}{dt}. \tag{4.11.14}$$

4.11.2 Momento Angular de um Sistema de Partículas

Para um sistema de partículas, o seu momento angular total $\vec{L}_T$ é a soma vetorial dos momentos angulares de todas as partículas que compõe esse sistema em relação a uma origem O, ou seja, em relação a um mesmo ponto:

$$\vec{L}_T = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \ldots + \vec{L}_n, \tag{4.11.15}$$

$$\vec{L}_T = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i, \tag{4.11.16}$$

em que $\vec{L}_T$ é o momento angular total do sistema de partículas, $\vec{L}_i$ é o seu momento angular de ordem i e n, a ordem da partícula do sistema.

Os momentos angulares das partículas podem variar por causa de forças externas ou até mesmo pelas interações entre elas. Assim, podemos determinar a variação do momento angular total do sistema derivando a eq. (4.11.16) em relação ao tempo:

$$\frac{d\vec{L}_T}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt}. \tag{4.11.17}$$

De acordo com a eq. (4.11.13), $d\vec{L}_i/dt$ é igual ao torque resultante que age sobre uma partícula de ordem i:

$$\frac{d\vec{L}_T}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{\tau}_R)_i. \tag{4.11.18}$$

O resultado acima significa que a taxa de variação do momento angular de um sistema de partículas é igual à soma vetorial de todos os torques a que estão submetidas as partículas de um sistema. Assim, o torque resultante que age em todo um sistema de partículas $[\vec{\tau}_R = \sum_{i=1}^{n} (\vec{\tau}_R)_i]$ é igual à taxa de variação com o tempo do momento angular total do sistema, podendo a eq. (4.11.18) ser escrito na forma:

$$\vec{\tau}_R = \frac{d\vec{L}_T}{dt}. \tag{4.11.19}$$

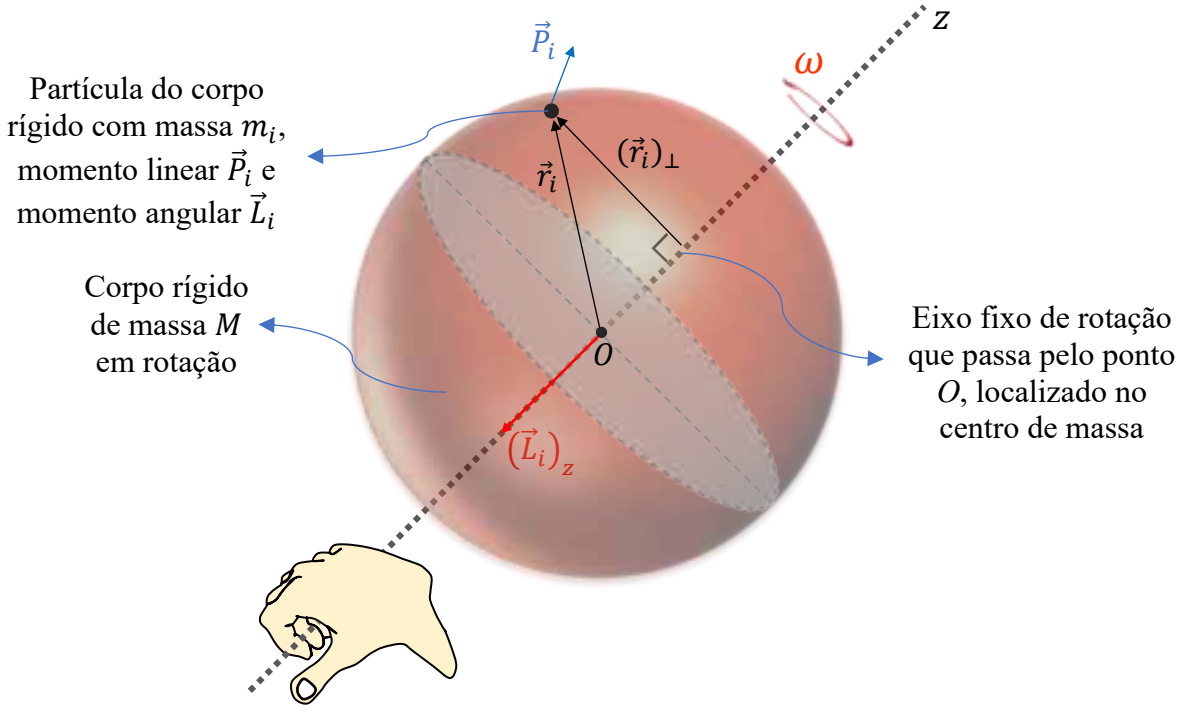
É IMPORTANTE observar que como as forças exercidas pelas partículas do sistema sempre aparecem como pares de forças da terceira lei de Newton, o torque resultante produzido por essas forças é nulo. Assim, os torques não nulos que faz o momento angular do sistema

variar são produzidos por forças externas. Além disso, os torques e o momento angular de um sistema devem ser medidos em relação a um mesmo ponto. Se o sistema estiver sendo acelerado em relação a um referencial inercial, o esse ponto deve estar no seu centro de massa. Caso contrário, pode ser qualquer outro ponto.

4.11.3 Momento Angular de um Corpo Rígido

Considere um corpo rígido (esfera homogênea), que gira com velocidade angular constante, em torno de um eixo fixo, conforme mostra a Fig. (43) a seguir.

Figura 43 - Esfera homogênea em rotação em relação a um fixo que passa pelo seu *CM*



Fonte: Elaborada pelos autores.

A Fig. (43) mostra o momento angular de uma partícula de massa m_i, momento linear $\vec{P}_i$, momento angular $(\vec{L}_i)_z$ que se estende no eixo z e posição $\vec{r}_i$ em relação à origem O, sendo $(\vec{r}_i)_\perp$ o braço de alavanca da força que age sobre a partícula; que compõe um corpo rígido de massa M (esfera homogênea) em rotação constante (velocidade angular ω constante) em torno do eixo fixo z. Observe que a orientação do momento angular da partícula se dá ao longo do eixo de rotação do corpo rígido de acordo com a regra da mão direita.

Para se obter o momento angular total do corpo rígido basta somar todas as componentes z do momento angular de todas as partículas que o compõe em relação ao mesmo ponto que

passa pelo eixo de rotação desse corpo. Assim, de acordo com a eq. (4.11.3), podemos calcular o módulo do momento angular de uma partícula que compõe um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo de rotação da seguinte forma:

$$L_i = r_i P_i sen\emptyset. \tag{4.11.20}$$

Acontece que o menor ângulo formado entre $\vec{r}_i$ e $\vec{P}_i$ é 90º e $sen90^o = 1$. Além disso, $P_i = m_i v_i$. Logo:

$$L_i = r_i m_i v_i, \tag{4.11.21}$$

em que L_i é o módulo do momento angular da partícula de massa m_i e velocidade de intensidade v_i, distante r_i da origem do sistema.

O módulo da componente z do momento angular da partícula $(L_i)_z$ é a intensidade da projeção de $\vec{L}_i$ no eixo z, ou seja:

$$(L_i)_z = L_i sen\theta. \tag{4.11.22}$$

Substituindo a eq. (4.11.21) na eq. (4.11.22), obtemos:

$$(L_i)_z = r_i m_i v_i sen\theta. \tag{4.11.23}$$

O último resultado representa o módulo do momento angular, paralelo ao eixo z, da partícula. A intensidade da componente total do momento angular da partícula no eixo z $(L_T)_z$ pode ser calculada somando as contribuições de todas as partículas que compõe o corpo rígido:

$$(L_T)_Z = \sum_{i=1}^{n} (L_i)_z. \tag{4.11.24}$$

Substituindo a eq. (4.11.23) na eq. (4.11.24), obtemos:

$$(L_T)_Z = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i v_i sen\theta. \tag{4.11.25}$$

Como $v_i = \omega_i (r_i)_\perp$, [sendo $(r_i)_\perp$ o módulo do vetor posição da partícula para o eixo de rotação, ou seja, o braço de alavanca, que são sempre ortogonais]:

$$(L_T)_Z = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i \omega_i (\vec{r}_i)_\perp sen\theta. \tag{4.11.26}$$

Nesse último resultado, $(\vec{r}_i)_\perp$ representa, como já dito, módulo do vetor posição da

partícula para o eixo de rotação, que não é necessariamente o mesmo valor de r_i, o qual representa o módulo do vetor posição que vai da partícula à origem do sistema.

Acontece que em um movimento de rotação constante, a velocidade angular em qualquer ponto do corpo rígido é constante ($\omega_i = \omega$). Além disso, o vetor posição da partícula para o eixo de rotação $(\vec{r}_i)_\perp$ é sempre perpendicular e representa a componente ortogonal do vetor $\vec{r}_i$, ou seja, a sua intensidade é [$(r_i)_\perp = r_i sen\theta$]. Assim, podemos reescrever a eq. (4.11.26) da seguinte forma:

$$(L_T)_Z = \sum_{i=1}^{n} (r_i)_\perp m_i \omega (r_i)_\perp, \tag{4.11.27}$$

$$(L_T)_Z = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \, (r_i)_\perp^2 \right) \omega. \tag{4.11.28}$$

O termo entre parênteses acima representa o momento de inércia I de um corpo rígido em relação a um eixo fixo [eq. (4.4.5)]. Assim, a eq. (4.11.28) se reduz a:

$$(L_T)_Z = I\omega. \tag{4.11.29}$$

Tendo em mente que o momento angular do resultado acima é o momento angular em torno do eixo de rotação do corpo rígido L_T e que I é o seu momento de inércia em relação ao mesmo eixo, podemos reescrever a eq. (4.4.29) da seguinte maneira:

$$L_T = I\omega. \tag{4.11.30}$$

A Tab. (4) a seguir traz algumas correspondências entre os movimentos de rotação e de translação.

Tabela 4 - Outras correspondências entre os movimentos de Translação e Rotação

Translação		Rotação	
Força	$\vec{F}$	Torque	$\vec{\tau}$
Momento linear	$\vec{P}$	Momento Angular	$\vec{L}$
2ª Lei de Newton	$\vec{F}_R = \frac{d\vec{P}}{dt}$	2ª lei de Newton	$\vec{\tau}_R = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Lei de conservação	$\vec{P} = constante$	Lei de conservação	$\vec{L} = constante$

Fonte: Elaborada pelos autores, baseada em (HALLIDAY, 2016, Vol. 1, p. 689).

Na Tab. (4) acima, a lei de conservação é válida para um sistema fechado e isolado.

4.12 CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

Da mesma forma que a energia (lei da conservação da energia) e o momento linear (lei da conservação do momento linear) podem se conservar, o momento angular (lei da conservação do momento angular) também pode. Para isso, é necessário que o torque resultante $\vec{\tau}_R$ produzido pelas forças externas que atuam sobre um corpo em rotação seja nulo. Assim, o momento angular $\vec{L}$ do corpo permanece constante.

Assim, para um sistema isolado:

$$\vec{L} = constante. \tag{4.12.1}$$

Esse resultando é conhecido como a lei de conservação do momento angular e pode ser escrito da seguinte forma:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2, \tag{4.12.2}$$

em que $\vec{L}_1$ é o momento angular inicial de um sistema e $\vec{L}_2$, o seu momento angular final, que são, necessariamente, iguais para que haja a sua conservação.

Em módulo, podemos escrever a eq. (4.12.2) da seguinte maneira:

$$L_1 = L_2, \tag{4.12.3}$$

em que L_1 é o módulo do momento angular inicial de um sistema e L_2, o módulo do seu momento angular final, que, necessariamente, são iguais para que haja a sua conservação.

As equações (4.12.2) e (4.12.3) nos permitem concluir que, para situações em que o somatório dos torques externos que agem sobre um sistema ao longo de um eixo for nulo, a componente do momento angular ao longo desse eixo é constante, sejam quais forem as mudanças que ocorram dentro desse sistema. Isso implica que, em situações desse tipo, podemos apenas considerar os estados inicial e final do sistema, sem nos preocupar o que acontece durante o processo.

Acontece que, de acordo com a eq. (4.11.30), $L = I\omega$, sendo L, nesse caso, o momento angular de um sistema ou de um corpo rígido. Substituindo esse resultado na eq. (4.12.3), obtemos:

$$L_1\omega_1 = L_2\omega_2, \tag{4.12.4}$$

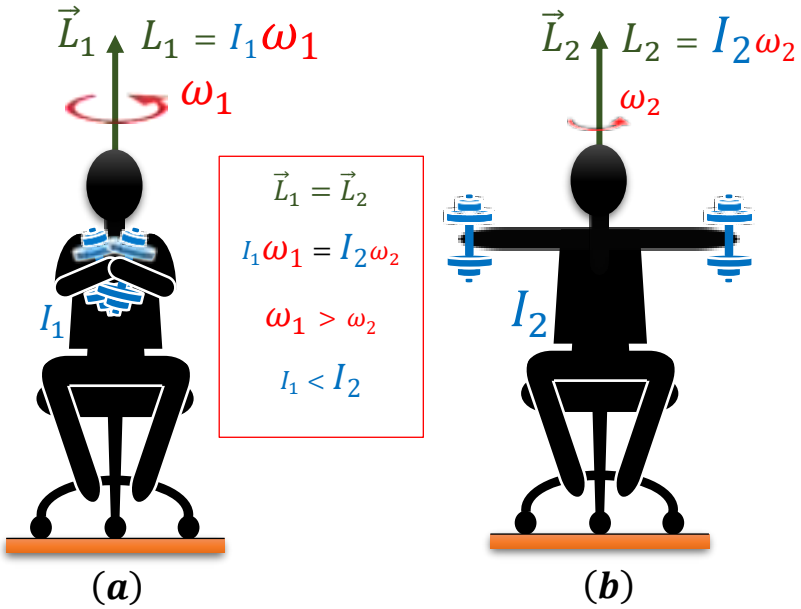
em que L_1 e ω_1 são as intensidades do momento angular e da velocidade angular em um instante inicial, respectivamente; e L_2 e ω_2 são as intensidades do momento angular e da velocidade angular em um instante final, respectivamente.

A lei da conservação do momento angular [eq. (4.12.4)] implica que se de um estado inicial para um estado final de um sistema:

- o momento de inércia aumentar $(I\uparrow)$ → a intensidade da velocidade angular $(\omega\downarrow)$ diminui;
- o momento de inércia diminuir $(I\downarrow)$ → a intensidade da velocidade angular $(\omega\uparrow)$ aumenta.

A Fig. (44) a seguir ilustra a diminuição da velocidade angular de uma pessoa devido ao aumento do seu momento de inércia, mas mantendo seu momento angular conservado.

Figura 44 - Representação de um estudante girando em uma cadeira giratória.



Fonte: Elaborada pelos autores.

A Fig. (44) mostra uma pessoa sentada em uma cadeira giratória, sem colocar os pés no chão, que pode girar livremente em torno de um eixo vertical. Em (a), a pessoa, com os braços fechados, possui momento de inércia I_1 e velocidade angular ω_1.

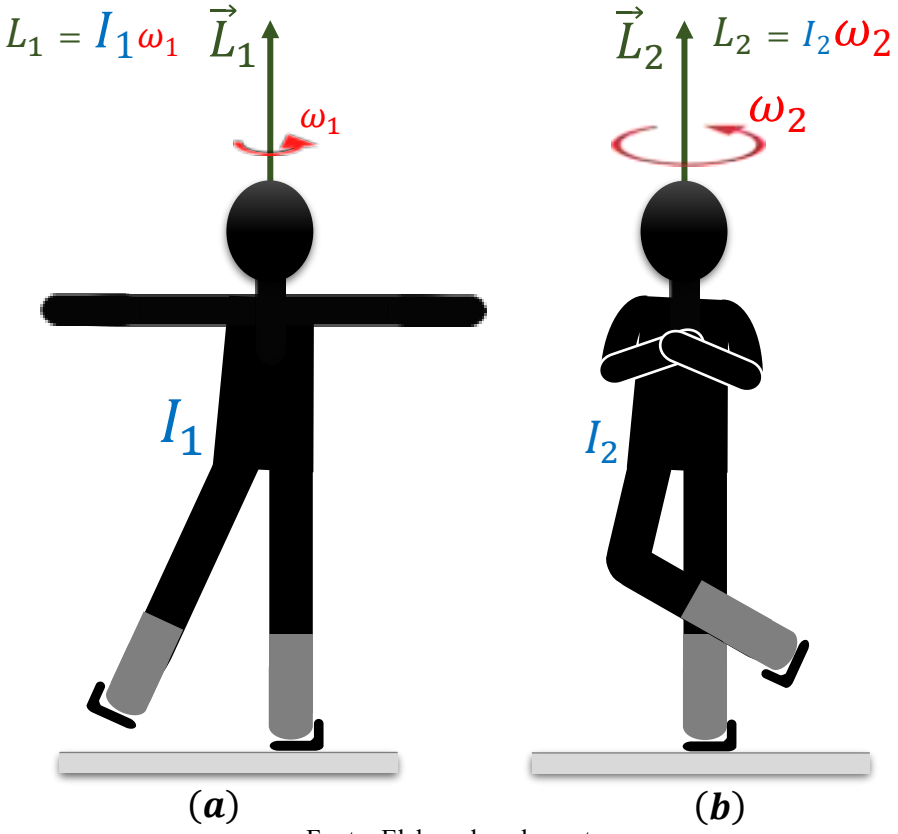
Em seguida, a pessoa abre os braços e, em (b), seu momento de inércia passa a ser I_2 e sua velocidade angular, ω_2. Note que quando os braços estão abertos, a massa da pessoa está distribuída mais longe do eixo de rotação em relação a quando os braços estão juntos do corpo e seu momento de inércia I_2 é maior que o momento de inércia inicial I_1, mas os momentos

angulares $\vec{L}_1$ e $\vec{L}_2$, que coincidem com o eixo de rotação e apontam para cima, em ambas as situações, são os mesmos, ou seja, se conservam.

O aumento do momento de inércia faz com que a velocidade de giro do conjunto cadeira e pessoa diminua devido à conservação do momento angular. Os halteres usados pela pessoa é para intensificar a variação do momento de inércia para obter um efeito mais considerável.

Na Fig. (45) a seguir, temos, agora, um exemplo de um patinador girando quase que livremente em torno do seu eixo vertical.

Figura 45 - Patinador de gelo girando em torno do seu eixo vertical

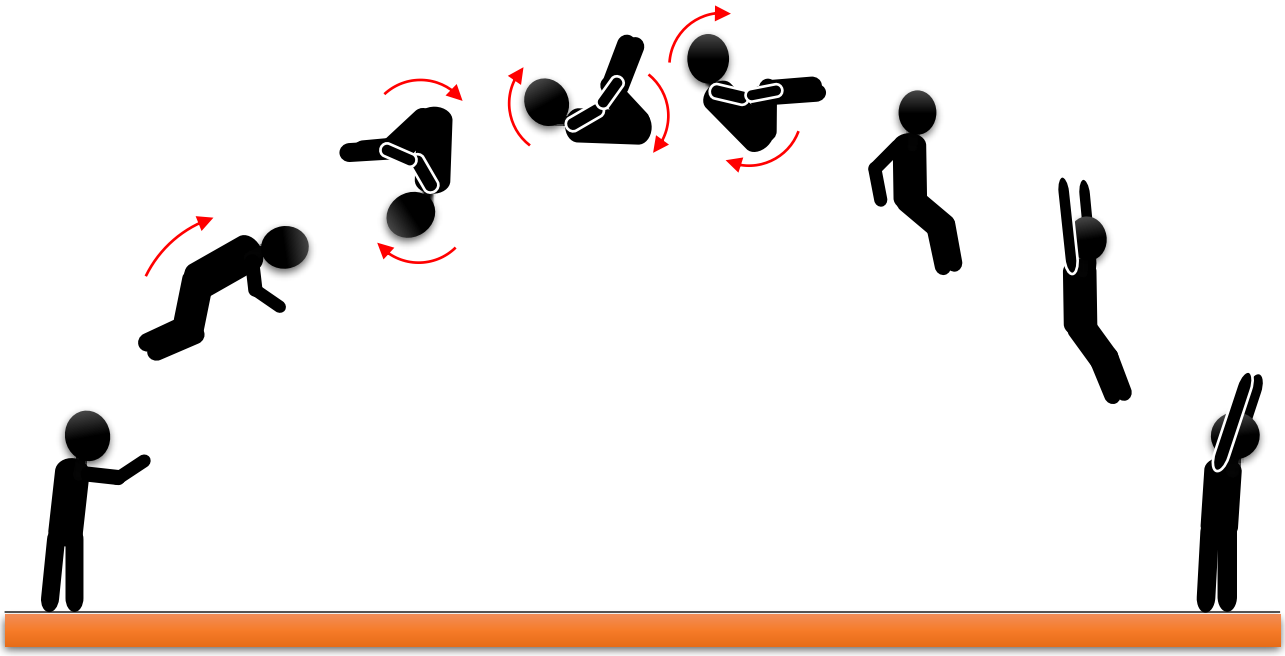


Fonte: Elaborada pelos autores.

Para o caso do patinador, o mesmo princípio da pessoa com a cadeira giratória é válido. Com os braços e pernas abertos, o patinador tem um momento de inércia maior do que com eles fechados e sua velocidade angular é maior quando o momento de inércia é menor, para que o momento angular seja conservado.

Para o caso de um atleta realizando um salto mortal, à medida que ele sobe, seu momento de inércia diminui em relação ao eixo de rotação que passa pelo seu centro de massa pelo fato de ele se encolher, aumentando sua velocidade angular. Na descida, ele faz o processo inverso, se estirando novamente e diminuindo sua velocidade angular devido ao aumento do seu momento de inércia. Veja a situação descrita na Fig. (46) a seguir.

Figura 46 - Representação de um atleta realizando um salto mortal



Fonte: Elaborada pelos autores.

Vários são os exemplos que poderíamos usar para explicar a conservação do momento angular. O fato é que essa lei vai além dos limites da mecânica newtoniana, sendo muito importante, por exemplo, na mecânica quântica, pois, além de ser a unidade básica da constante de Planck, que é a constante característica do mundo quântico, o momento angular é um conceito fundamental para descrição do movimento do átomo e sua nuvem eletrônica.

Para finalizar, podemos, de acordo com a Tab. (5) a seguir, mais uma vez, fazer um paralelo entre as equivalências das grandezas lineares e rotacionais.

Tabela 5 - Equivalência entre grandezas e equações lineares e rotacionais

Translação	Rotação	Conexão Translação/Rotação (continua)
S	θ	$S = r\theta$
v	ω	$v = r\omega$
a	α	$a_t = r\alpha$
m	I	$I = mr^2$ *(partícula)*
$\vec{F}$	$\vec{\tau}$	$\vec{\tau} = \vec{r}\ x\ \vec{F}$

Tabela 5 - Equivalência entre grandezas e equações lineares e rotacionais

Translação	Rotação	Conexão Translação/Rotação (conclusão)
$K = \frac{1}{2}MV_{CM}^2$	$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$	$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}MV_{CM}^2$ *(Rolamento)*
$\vec{P} = m\vec{v}$	$\vec{L} = I\vec{\omega}$	$\vec{L} = \vec{r}\ x\ \vec{P}$
$W = Fd$	$W = \tau\Delta\theta$	
$F_R = ma$	$\tau_R = I\alpha$	
$\vec{F}_R = \frac{d\vec{P}}{dt}$	$\vec{\tau}_R = \frac{d\vec{L}}{dt}$	
$P_1 = P_2 = m_1v_1 = m_2v_2$	$L_1 = L_2 = I_1\omega_1 = I_2\omega_2$	*Lei de conservação*

Fonte: Elaborada pelos autores, baseada em (HALLIDAY, 2016, Vol. 1).

Finalizada a fundamentação teórica deste trabalho, é importante mencionar, além de pesquisas na internet, as abras que serviram como referencial teórico para a sua construção. Dito isso, podemos citar: Moisés (2002); Young e Freendman (2008), Ferraro, Penteado e Torres (2012), e, principalmente, Halliday, Resnick e Walker (2016, Vol. 1), o qual, nos seus capítulos 10 e 11, traz os conteúdos abordados neste capítulo e que foi a principal fonte de pesquisa do conteúdo de Física aqui abordado.

5 PRODUTO EDUCACIONAL

Vamos nos limitar, neste capítulo, apenas a apresentar o livro digital que faz parte do produto educacional que foi desenvolvido para ser aplicado em sala de aula como requisito obrigatório de conclusão do curso do IFRN no curso de Mestrado do MNPEF. As imagens nele contidas são de produção própria dos autores e de sua inteira responsabilidade.

A limitação contida nesta apresentação se faz necessária pelo fato de o livro digital se tratar de um *ebook* relativamente extenso, que estará, na íntegra, nos apêndices deste trabalho, além de haver um capítulo destinado à metodologia adotada para sua aplicação, a qual está discriminada a sequência didática que será utilizada, inclusive de maneira genérica no Produto.

Outro fator que é importante ressaltar é o fato deste produto não ser um manual de uso do aplicativo, pois, além de haver outros trabalhos que possuem essa finalidade, ele possui vários *links* e códigos de acesso que levam o usuário a vários vídeos de como manusear as ferramentas do *software*, principalmente em relação às simulações contidas no próprio livro digital.

5.1 APRESENTAÇÃO DO *EBOOK*

Desde sempre, o processo de ensino-aprendizagem, como já reforçamos anteriormente com Moreira (2012), foi predominantemente baseado na aprendizagem mecânica do indivíduo e essa metodologia é a mais usada nas escolas até os dias de hoje. Com o avanço tecnológico e o surgimento das mídias digitais, o professor precisa se adequar a essas mudanças para atender as exigências da sociedade atual (Aguiar *et al*, 2020).

Pensando nisso, produzimos um *ebook* intitulado "*Algodoo e a Dinâmica Rotacional*", de autoria do aluno e do orientador desta dissertação, que se justifica pela necessidade de melhoria da qualidade do ensino de Física, principalmente fazendo uso de recursos tecnológicos; e tem como objetivo geral potencializar o ensino de Física com o auxílio de um *software* computacional gratuito de simulação de fenômenos físicos.

Como objetivos específicos, podemos citar:

- Criar um material didático, interativo e gratuito para professores e alunos usarem como recurso pedagógico quanto ao ensino-aprendizagem de Física com o auxílio do *software* nas aulas;
- Trabalhar a Dinâmica Rotacional com maior ênfase no Ensino Básico com o auxílio do

Algodoo;

- Criar atividades interativas e desafiadoras que explorem as funcionalidades do aplicativo;
- Proporcionar ao aluno uma experiência de aprendizagem mais rica e significativa;
- Disseminar o uso do *software* computacional de simulação física na comunidade escolar.

Esses objetivos estão alinhados à Base Nacional Comum Curricular, que busca, entre outros fatores, fazer uso da tecnologia para potencialização da aprendizagem no ensino de Ciências da Natureza e Suas Tecnologias (Brasil, 2018). Veremos isso com mais detalhes no capítulo que fala sobre a sequência didática de aplicação desse *ebook*.

O livro digital é um produto educacional a ser aplicado em sala de aula e trata sobre a dinâmica do movimento de rotação e a aplicação desses conceitos em simulações virtuais de Física com o uso de um *software* educacional computacional (*Algodoo*). Seu nível de conteúdo está mais voltado para o Ensino Médio, uma vez que foi construído para ser aplicado nessa modalidade. No entanto, ele também pode ser usado por alunos e professores da graduação, pois que apresenta um pequeno resumo de linguagem conceitual e matemática desse nível.

Obras como (Ferraro; Penteado; Torres, 2012), (Gogoy; Agnolo; MELO, 2020), (Halliday; Resnick; Walker, 2016), (Martini *et al*, 2016), (Nussenzveig, 2002), (Ramalho; Ferraro; Soares, 2015) e (Young; Freedman, 2008), além de outras plataformas, como o *YouTube* e o próprio *site* do *Algodoo*, foram as referências bibliográficas para o embasamento teórico da escrita do *ebook* e toda a fundamentação teórica do seu conteúdo está, em nível de graduação, no capítulo anterior DINÂMICA ROTACIONAL.

A teoria é dividida em 12 capítulos sobre a **Dinâmica Rotacional** e toda a estrutura do *ebook* se dá como mostra a tabela a seguir.

Tabela 6 - Estrutura do *Ebook*

ESTUTURA DO *EBOOK*		**(continua)**
ELEMENTOS PRÉ-TEXTUAIS	**CAPA**	
	CONTRACAPA	
	EPÍGRAFE	
	APRESENTAÇÃO	
	LISTA DE FIGURAS	
	SUMÁRIO	

Tabela 6 - Estrutura do *Ebook*

ESTUTURA DO *EBOOK*	(conclusão)
ELEMENTOS TEXTUAIS "CAPÍTULOS"	**CAPÍTULO 1 – ROTAÇÃO**
	CAPÍTULO 2 – CONEXÕES ENTRE AS VARIÁVEIS LINEARES E AS ANGULARES
	CAPÍTULO 3 – MOVIMENTOS CIRCULARES ACOPLADOS
	CAPÍTULO 4 – ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO
	CAPÍTULO 5 – TORQUE
	CAPÍTULO 6 – TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO
	CAPÍTULO 7 – ROLAMENTO
	CAPÍTULO 8 – ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO
	CAPÍTULO 9 – AS FORÇAS DE ROLAMENTO
	CAPÍTULO 10 – REVISANDO O TORQUE
	CAPÍTULO 11 – MOMENTO ANGULAR
	CAPÍTULO 12 – CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR
ELEMENTOS PÓS-TEXTUAIS	**RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS**
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS
	APRESENTAÇÃO DO AUTOR
	QUARTA CAPA (VERSO DO LIVRO)

Fonte: Elaborada pelos autores.

Como mostrado na tabela acima, o *ebook* também conta com toda a estrutura de um livro comum, contendo, além dos capítulos destinados à teoria dos conteúdos, Capa, Contracapa, Epígrafe, Apresentação, Lista de Figuras, Sumário, Respostas dos Exercícios Propostos, Referências Bibliográficas, Apresentação do Autor e capa de verso do livro.

Além disso, todos os capítulos contam com **Figuras**, T**abelas**, **Equações**, **Exercícios Resolvidos**, **Exercícios Propostos** e **Revisão** do conteúdo abordado no capítulo e, quando necessário, também há um tópico chamado **Saiba mais...**, destinado a apresentar uma linguagem, principalmente de cálculo, a nível de graduação para aqueles alunos ou professores que desejam se aprofundar um pouco mais, mesmo que o conteúdo de todos os capítulos sejam focados na linguagem de Ensino Médio.

Ademais, os capítulos também contam, principalmente, com o tópico **Usando o *Algodoo***, que consiste na demonstração do conteúdo estudado em simulação no programa computacional, em que o leitor pode acessar as simulações por meio de *links*. Também é possível fazer o *download* do *software* gratuitamente e visualizar, inclusive, a vídeos com

tutoriais, produzidos pelos autores, de como fazer as simulações. Nesse tópico, também são disponibilizados **Tarefas Propostas**, que correspondem a laboratórios digitais, os quais são conexas com o aplicativo e permitem que os usuários realizem atividades relacionadas com o conteúdo estudado no capítulo e possa interagir com o *software* para ter acesso à simulação que trará o gabarito do exercício feito.

Os vídeos com os tutoriais das simulações no *software* usados em todo o livro podem ser acessados escaneando, com o *smarthphone*, o QR *Code* da figura a seguir e tendo acesso à *playlist* do Canal Anderson Silva, no *YouTube*, o qual é um dos autores da obra.

Figura 47 - QR *Code* dos tutoriais das simulações do *Algodoo*



Ou clique em:
https://youtube.com/playlist?list=PLJ9tsFeU6BHFYXseU1Q OneZYiSy5LdyQX&si=b9r2e8Yq5Mjn_l3t

Fonte: MEQR (gerador de QR *Code*) – Disponível em <*https://me-qr.com/pt*>.

Como o código foi criado por uma página de terceiros, é preciso clicar, depois de ser direcionado ao *site* do gerador do QR *code*, em “Pular anúncio” para ter acesso aos vídeos.

5.2 O PROGRAMA *ALGODOO*

A palavra *Algodoo* é a junção das palavras em inglês “*Algorithm*” e “*Do*”, que significam algoritmo e fazer, respectivamente, e se refere a um aplicativo de simulação desenvolvido, a princípio, por Emil Ernerfeldt da Universidade Umea, Suécia, em 2008, como objeto de sua dissertação de Mestrado (Batista *et al*, 2022). Nele, podemos criar várias simulações de física em duas dimensões (2D).

Trata-se de um programa gratuito que, com ferramentas de desenho muito simples, como molas, engrenagens, motores, cordas, *lasers*... permite o usuário criar várias simulações de física em duas dimensões (2D) para própria diversão ou para fins pedagógicos. O *software*

não tem restrição de idade e possui uma comunidade ativa *online*, por meio de um fórum contigo na sua própria página da *internet*.

O simulador pode ser usado para o ensino de ciências e física, permitindo ser abordado algumas áreas como Cinemática, Dinâmica, Óptica, por exemplo, sendo muito flexível quanto à interatividade das simulações e à hospedagem do conteúdo. Segundo Batista *et al.* (2022, p. 1),

> Esse simulador é utilizado para o ensino de física e permite estudar diversos fenômenos de áreas diversas como Cinemática, Dinâmica, Óptica, Fluidos e Teoria Cinética dos gases entre outros, tendo sempre a opção de alterar a restituição dos corpos, o atrito com a superfície e com o ar, a força gravitacional, a textura, cor, distância e inúmeros outros recursos que permitem ao usuário desenvolver diversas atividades e relacionar a influência das variáveis físicas envolvidas. Outra característica positiva é que o usuário pode alterar a frequência das simulações podendo adequar a capacidade de cada computador.

Na página oficial do aplicativo, disponível no endereço eletrônico "http://www.algodoo.com/", contém várias referências que visam atrair o interesse do usuário para a disseminação do seu uso, como, por exemplo, enfatizar que o *software* parece uma ideia muito interessante e está disponível gratuitamente para ser baixado nas plataformas *Windows* ou *Mac* e também no *IPad*, além de oferecer a oportunidade de o próprio usuário criar, por meio de ferramentas de desenho simples, simulações para explorar o universo da Física (Algodoo, c2024).

A página também se preocupa em oferecer vários exemplos inspiradores de simulações e conta com um banco de dados de simulações de outros usuários que visam oferecer uma experiência mais integral ao seu utilizador.

Para o uso do *Algodoo*, é necessário fazer o *download* do programa na sua página da *internet* e possuir o programa Java instalado no computador. Para *Windows,* esse último programa pode ser baixado no *link* "https://www.java.com/pt-BR/". Possuindo uma interface originalmente em inglês, é possível instalar a extensão em português no endereço eletrônico "http://www.algodoo.com/forum/viewtopic.php?f=30&t=12229&p=86459&hilit=tradu%C3%A7%C3%A3o&sid=2ed19f082184cf645d2a3a6a7d9a9be8#p86459" para facilitar o uso de usuários que dominam esse idioma. O *download* da extensão em Português Brasil também pode, em caso de problemas de acesso com o *link* anterior, ser realizado em "https://drive.google.com/file/d/1qyqYVmbPE1gQ9OmASdNgV_sRnKXg0Bpn/view?usp=drive_link".

Figura 48 - Captura de tela da página oficial do *Algodoo* na *internet*



Fonte: Site do *Algodoo* – Disponível em: <*http://www.algodoo.com/*> *Acesso em 12 mar 2024.*

A página também se preocupa em oferecer vários exemplos inspiradores de simulações e conta com um banco de dados de simulações de outros usuários que visam oferecer uma experiência mais integral ao seu utilizador.

Para facilitar o manuseio do recurso pelos usuários, é possível, no *software*, salvar os progressos das interações realizadas. Essas simulações salvas podem ficar disponíveis de duas formas: apenas para o autor da simulação, onde ele pode salvar e compartilhar de maneira privativa os cenários com outras pessoas que fazem uso do programa; e pelo *Algobox*, o qual representa o armazém online para compartilhar cenários (Algodoo, c2024).

O *Algebox* está disponível no site oficial do *Algodoo* e qualquer pessoa que visite a página pode ter acesso às simulações lá disponíveis, o que torna esse recurso computacional em uma ferramenta extremamente útil para potencializar o ensino de Física.

Figura 49 - Ferramenta "Salvar e compartilhar cenários" no *Algodoo* e *Algebox*



Fonte: Em a, captura de tela do aplicativo. Em b, captura de tela do *site* do *Algodoo* – Disponível em: *<http://www.algodoo.com/> Acesso em 01 maio 2024.*

O *Algodoo* possui uma interface bastante dinâmica e interativa, como mostrado na Fig. (50), que permite o usuário aprender facilmente como manuseá-lo e começar a criar suas próprias interações, permitindo, inclusive, que profissionais da educação consigam montar seus planos de aulas com auxílio desse recurso computacional educacional, ou até mesmo sequências didáticas para tornar suas aulas mais interativas e significativas.

Figura 50 - Página inicial do *Algodoo* com idioma Português Brasil instalado



Fonte: Captura de tela da página inicial do *Algodoo.*

A seguir, está detalhada a metodologia de aplicação do produto educacional que usará esse programa por meio de uma sequência didática baseada nas UEPS de Marco Antônio Moreira (2011) em uma turma de Ensino Médio.

6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Com o livro digital finalizado, fomos em busca de um caminho que servisse para nos guiar na sua aplicação. Então, neste capítulo, faremos o detalhamento do percurso metodológico que será utilizado na aplicação do produto educacional. De forma detalhada, vamos organizar as informações de como será a sua aplicabilidade; quais serão as ferramentas necessárias para isso; em que lugar ocorrerá; a que público-alvo se destina, a duração e as etapas que deverão ser seguidas.

Fugindo da abordagem mecânica de ensino, a qual é focada incisivamente na repetição e memorização, e baseada na Teoria de Aprendizagem Significativa de Ausubel, o produto educacional, que possui o *ebook* com título "*Algodoo e a Dinâmica Rotacional*", que tem como principal característica o uso de um *software* computacional (*Algodoo*) para alinhar a teoria dos conteúdos do livro à prática por meio de simulações virtuais, será aplicado segundo uma sequência didática norteada, principalmente, nas UEPS de Marco Antônio Moreira (2011), que busca uma forma eficiente de potencializar a aprendizagem do aluno com ênfase nos seus conhecimentos prévios, pois, segundo o autor, a aprendizagem não pode ser mecânica, mas significativa e crítica (Moreira, 2012).

6.1 A PESQUISA QUALITATIVA

Em se tratando em pesquisa em educação, precisamos ter um olhar bastante abrangente em relação ao percurso metodológico escolhido, não nos limitando, mesmo tendo sua grande importância, apenas a dados estatísticos. Segundo Godoy (1995, p.58), em um estudo quantitativo

> O quantitativo o pesquisador conduz seu trabalho a partir de um plano estabelecido a priori, com hipóteses claramente especificadas e variáveis operacionalmente definidas. Preocupa-se com a medição objetiva e a quantificação dos resultados. Busca a precisão, evitando distorções na etapa de análise e interpretação dos dados, garantindo assim uma margem de segurança em relação às inferências obtidas.

Nesse sentido, uma abordagem quantitativa dos dados de uma pesquisa, apesar de ser fundamental, mostra-se bastante limitada, pois é preciso ter um olhar mais genérico dos fatos, pois as relações pessoais são complexas e adaptações durante o processo se tornam necessárias (Godoy, 1995). A pesquisadora, em contraste à pesquisa quantitativa, fala que

> De maneira diversa, a pesquisa qualitativa não procura enumerar e/ ou medir os eventos estudados, nem emprega instrumental estatístico na análise dos dados. Parte de questões ou focos de interesses amplos, que vão se definindo à medida que o estudo se desenvolve. Envolve a obtenção de dados descritivos sobre pessoas, lugares e processos interativos pelo contato direto do pesquisador com a situação estudada, procurando compreender os fenômenos segundo a perspectiva dos sujeitos, ou seja, dos participantes da situação em estudo (Godoy, 1995, p. 58).

A pesquisa qualitativa tem caráter mais subjetivo, permitindo, durante o seu processo, identificar situações e qual a sua importância. Nela, surgem motivações naturais para o avanço da observação e interpretação do espaço, dos sujeitos e a generalidade da questão de estudo. Partindo dessa questão, nesse tipo de abordagem, o investigar é o sujeito principal, sendo o ambiente natural a fonte principal de pesquisa e os dados recolhidos são, em geral, descritivos, com enfoque em descrições pessoais e situações que ocorrem durante o ambiente de pesquisa e coleta de dados (Bogdan; Biklen, 1994).

Na presente pesquisa, na perspectiva de pesquisa qualitativa de Bogdan e Biklen (1982), o sujeito principal da pesquisa é o professor de Física que irá desenvolver a sequência didática no ambiente de pesquisa, que corresponde à sala de aula.

6.2 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Antes de se iniciar a aplicação de um conjunto de atividades, é necessário organizá-las para se obter o objetivo desejado. Nesse sentido, surge o conceito de sequência didática, a qual se refere a uma organização bem estruturada e sistematizada de atividades. Zabala (1998, p. 18) define o conceito de sequência didática como um conjunto de atividades bem-organizadas quando fala que

> Se realizarmos uma análise destas seqüências buscando os elementos que as compõem, nos daremos conta de que são um *conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos*.

A proposta de SD aqui estabelecida não ser, necessariamente, fiel em todos os aspectos das UEPS de Moreira (2011), está muito próxima e, certamente, mantém os pontos mais relevantes do seu trabalho, como as definições de situações problemas através de questionários, verificação de conhecimentos prévios dos alunos e aplicações de pré- e pós-testes, por exemplo.

Nesse sentido, os objetivos da SD que será usada para aplicação do produto educacional são:

- Desenvolver unidades de ensino potencialmente significativas, levando em consideração os conhecimentos prévios dos alunos e uma avaliação principalmente contínua durante todo o processo.

- Definir e explicar os conceitos das energias cinéticas de rotação e rolamento de um corpo, relacionando-os com o seu momento de inércia e a sua velocidade angular.

- Identificar situações em que esses tipos de energias relacionadas à rotação e ao rolamento de um corpo são relevantes para a descrição do movimento de um corpo rígido, como na rotação de um disco, de uma esfera ou de um pêndulo.

- Calcular essas energias para diferentes corpos rígidos a partir das suas propriedades geométricas, da distribuição da sua massa e da sua velocidade angular.

- Entender os conceitos de energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento para explicar diferentes fenômenos físicos, como a influência do momento de inércia na estabilidade de objetos em rolamento, como giroscópios e bicicletas, por exemplo.

- Usar um livro eletrônico (*ebook*), que tem como principal característica a utilização de um aplicativo digital, para a potencialização da aprendizagem do aluno por meio de aulas expositivas e práticas.

Esses objetivos estão alinhados à BNCC, que deixa clara a importância do uso de ferramentas digitais em sala de aula quando declara que

> [...] propostas de trabalho que possibilitem aos estudantes o acesso a saberes sobre o mundo digital e a práticas da cultura digital devem também ser priorizadas, já que impactam seu dia a dia nos vários campos de atuação social. Sua utilização na escola não só possibilita maior apropriação técnica e crítica desses recursos, como também é determinante para uma aprendizagem significativa e autônoma pelos estudantes (Brasil, 2018, p. 478).

Ainda de acordo com a BNCC (2018, p. 541 e 543), em suas competências específicas e habilidades de Ciências da Natureza e suas Tecnologias no Ensino Médio, a importância da análise, representação e explicações do conteúdo específico (Energia Cinética de Rotação e Energia Cinética de Rolamento) com uso de aplicativos digitais que será utilizado na aplicação da SD são

> [...] **(EM13CNT101)** Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas; [...] **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros).

Essas competências e habilidades trazidas pela BNCC estão pautadas na necessidade de atender a definição de educação trazida pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação, a LDB de 1996, que, em seu art. 1º, define a educação como um processo permanente de construção do conhecimento (Brasil, 1996).

Em relação aos recursos que irão auxiliar no desenvolvimento da SD, estes serão organizados para atender aos seus objetivos, como, por exemplo, o uso de quadro negro para aulas expositivas sobre o tema; experimentos simples com objetos do cotidiano; vídeos e animações de fenômenos relacionados à temática com o auxílio de projetor de imagens na sala de aula ou na sala de vídeo da escola; *software* computacional (*Algodoo*) para criação de simulações de fenômenos físicos virtuais na sala de aula e no laboratório de informática (Lab. Inf.); questionários e atividades de aprendizagem e avaliação para verificar os conhecimentos pré-existentes dos alunos e suas evoluções cognitivas e sociais durante o processo de aplicação da SD; além, do uso do livro digital, que estará sendo aplicado como ferramenta que dará embasamento teórico e prático acerca do conteúdo abordado e do uso do aplicativo.

Para fazer o levantamento e analisar os conhecimentos prévios dos alunos, como também avaliar a evolução dos conhecimentos adquiridos e bem estruturados nas suas estruturas cognitivas, conforme o modelo da TAS de Ausubel, serão feitos questionários em papel, que tratarão de conceitos do conteúdo que será abordado e também do *software* utilizado em forma de, inicialmente, pré-teste e, posteriormente, em pós-teste, além de avaliações contínuas através de observações da participação e do desempenho dos alunos nas atividades escritas e práticas.

A utilização de questionários físicos e bem estruturados, em relação aos questionários virtuais, que possuem inúmeras vantagens significativas por oferecerem um maior alcance e facilidades por causa dos recursos tecnológicos atuais; é de extrema importância para aplicação da SD que será desenvolvida, pois o emprego de questionários virtuais pode trazer problemas quanto ao alcance desejado, pois seu preenchimento fora de um espaço físico pode fazer com

que o público alvo não se sinta atraído em respondê-lo, prejudicando, assim, o andar natural da SD (Bastos *et al*., 2023, p. 631).

Ao final, o aluno também terá a oportunidade de fazer uma autoavaliação para reflexão sobre o próprio processo de aprendizagem, principalmente no que diz respeito ao uso do *Algodoo* como ferramenta de ensino nas aulas de Física, além de ser solicitado um *feedback* a respeito de todo o processo de aplicação da SD e do seu aprendizado.

6.2.1 Informações sobre a proposta de aplicação do produto educacional

Como a principal fonte norteadora da SD são as UEPS de Moreira (2011), julgamos necessário que a aplicação do produto educacional se dará em, aproximadamente, dois meses, com 18 aulas, distribuídas em nove encontros, sendo duas aulas de cinquenta minutos em cada um deles, em uma turma de 1ª Série do Ensino Médio Regular (1ª Série A – Matutino), com, aproximadamente, quarenta alunos do turno matutino de uma escola pública localizada na cidade de Parnamirim/RN. A turma possui idade média de 15,5 anos, e esses alunos residem em bairros periféricos da cidade, caracterizados pelo baixo desenvolvimento social e econômico, que nos fornece um fator desafiador para busca da evolução da aprendizagem desses discentes. O número de aulas relativamente alto para aplicação da SD se dá pela busca de aulas mais fluidas, com ênfase na discussão integral do conteúdo e das simulações.

A referida escola chama-se Escola Estadual Professor Eliah Maia do Rêgo (EEPEMR), localizada no bairro Boa Esperança e é a instituição de lotação do cargo efetivo de Professor de Física do autor desta dissertação, o qual também é professor regular da turma selecionada. A instituição funciona nos três turnos (manhã, tarde e noite) e atende alunos do Ensino Médio regular e do Ensino de Jovens e Adultos (EJA), além de oferecer exames supletivos por meio da Comissão Permanente de Exames Supletivos.

Consideramos o tempo destinado à aplicação do produto educacional suficiente para vencer todas as etapas da sequência didática escolhida, pois a sua aplicação é baseada nas UEPS de Moreira e precisa de um número de aulas expressivo, apesar de o Produto Educacional, o qual está presente nos Apêndices deste trabalho, trazer, além de uma proposta com um número igual ao mencionado aqui, uma maneira reduzida de se aplicar o Produto Educacional que atenda a professores que desejam essa finalidade.

Como já explicado na Introdução deste trabalho, para satisfazer aos objetivos da sequência didática construída para aplicação do produto educacional, o conteúdo a ser trabalhado em sala de aula durante o processo foi delimitado em apenas dois capítulos do livro

digital, pois ele está estruturado muito detalhadamente e sua aplicação na íntegra demandaria um tempo muito maior, quiçá todo o ano letivo, o que foge do propósito do mestrado.

Na Tab. (7) a seguir, constam, de forma objetiva e bem resumida, as principais informações sobre a aplicação do produto educacional.

Tabela 7 - Informações relacionadas à aplicação do produto educacional

INFORMAÇÕES SOBRE A APLICAÇÃO DO PRODUTO	
Nome da escola	Esc. Est. Prof. Eliah Maia do Rêgo
Nível de Ensino	Ensino Médio
Tipo da escola	Pública
Turma de aplicação do produto	1ª Série
Turno	Matutino
Quantidade de alunos da turma	40 (aproximadamente)
Quantidade de aulas	18
Duração da aula	50 min
Quantidade de encontros	9
Duração do encontro	1 h e 40 min
Duração total de aplicação	2 meses (aprox.)
Período do ano letivo	1º semestre letivo de 2024

Fonte: Elaborada pelos autores.

6.2.2 Informações sobre a proposta de aplicação da sequência didática

Seguindo os princípios e os objetivos das UEPS e sua proposta para a criação de uma sequência didática, fundamentada na Teoria de Aprendizagem Significativa de Ausubel, o planejamento das ações, que ocorrerão em cada encontro, para garantir que a aplicação do produto educacional ocorra de forma bem satisfatória, atingindo, assim, os objetivos da sequência didática, serão feitos de forma que:

- No primeiro encontro, serão exibidos, além da apresentação da SD, dois vídeos do *YouTube*, com títulos “O Que É Energia” e “Energia | Nerdologia”, dos canais “Ciência Todo Dia” e “Nerdologia”, respectivamente; relacionados aos conceitos de energia, seus tipos e as descobertas da Antiguidade que serviram para a evolução da tecnologia em diversas áreas, além da aplicação de um pré-teste, que consistirá em um questionário individual com perguntas introdutórias para fazer um diagnóstico da turma referente aos

conhecimento prévios relacionados aos conteúdos e métodos escolhidos e definidos que serão trabalhados durante o processo de aplicação do produto educacional. Nesta aula, também será indicado um vídeo, do canal "DOCUMENTARIOS HISTÓRICOS", sobre a evolução do conceito de energia relacionadas às descobertas da Antiguidade.

- No segundo, será exposta uma situação-problema relacionada a energia e, principalmente, a energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento, para fazer com que os estudantes reflitam sobre aspectos do seu cotidiano que estejam relacionados com a temática da situação introdutória. Nesse encontro, será realizado um segundo pré-teste, sendo as perguntas, agora, com um nível intermediário.
- No terceiro, será apresentado o *Algodoo* como ferramenta de criação de simulações de fenômenos físicos como possibilidade de potencialização do ensino-aprendizagem, bem como o livro eletrônico que será utilizado para aplicação da sequência didática. Nas duas aulas referentes a esse encontro, os alunos terão a possibilidade de conhecer as principais funcionalidades do *software* e de como criar algumas animações sobre temas diversos, principalmente sobre os conteúdos escolhidos para a aplicação da SD.
- Em seguida, no quarto e no quinto encontros, serão dadas aulas expositivas no quadro negro e em apresentação de *slides* relacionadas aos conteúdos de energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento, tendo o produto educacional como ferramenta teórica para planejamento dessas aulas. Nesses encontros, os quais serão compostos por quatro aulas de cinquenta minutos cada, também serão feitos exercícios de fixação dos conteúdos, buscando trabalhar a coletividade dos alunos na resolução das questões propostas, tanto do livro didático como de materiais extras.
- No sexto e no sétimo encontros, serão trabalhados, no Lab. Inf., a aplicação do conteúdo no *Algodoo*, que também terá o livro digital material didático. Os alunos terão a oportunidade de colocar, de forma coletiva, em prática os conhecimentos que aprenderam relacionados ao manuseio do programa, como também a aplicabilidade do conteúdo aprendido na prática de simulações virtuais disponibilizada gratuitamente pelo *software*. Na ausência de uma possibilidade de uso do Lab. Inf., será disponibilizado um manual de construção de uma simulação no aplicativo para que o aluno consiga fazer esse trabalho em casa e apresente durante essas aulas.
- Após vencida toda a parte teórica e prática do conteúdo, o oitavo encontro será reservado para coletar indícios de aprendizagem dos alunos por meio da aplicação de um pós-teste, realizado por meio de um questionário individual com perguntas de níveis

mais avançados em relação às dos pré-testes sobre as energias cinéticas de rotação e rolamento e sua aplicabilidade no meio social.

- Por fim, no nono e último encontro, as duas aulas serão utilizadas para o professor dar um *feedback* sobre a aplicação do pós-teste do encontro anterior, corrigindo o questionário e buscando fazer com que o aluno perceba sua evolução de aprendizagem, principalmente no que tange a sua capacidade de captar significados, compreender, explicar e de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema, características essas presentes nas UEPS de Moreira (2011). Aqui, os alunos também terão a oportunidade de se autoavaliar, darem as suas opiniões sobre a sequência didática aplicada e a utilização de simulações virtuais com o *Algodoo* durante as aulas de Física, além de sugestões de melhoria por meio de um questionário específico e individual.

A seguir, encontra-se, de forma prática e resumida, uma tabela que sintetiza todas as informações da sequência didática que será utilizada, dividindo toda a aplicação do produto educacional nos encontros, aulas e seus objetivos. É importante relembrar que as cada encontro é composto por duas aulas de cinquenta minutos cada.

Tabela 8 - Informações sobre a aplicação da sequência didática

INFORMAÇÕES SOBRE A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA (continua)			
Encontro	Aula	Atividade	Objetivo
1	1	Apresentação da SD, do conteúdo e exibição e diálogos sobre os vídeos	Apresentar ao aluno a SD a ser trabalhada, além do conteúdo definido, e exibir vídeos para introduzir um conceito amplo sobre a temática a ser estudada durante a aplicação da SD
	2	Aplicação do pré-teste	Aplicar um questionário individual sobre energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento a nível introdutório com o intuito de coletar informações sobre os conhecimentos prévios dos alunos
2	3	Apresentação da situação-problema	Manifestar uma situação-problema sobre a energia cinética de uma roda de um carro e identificar a opinião dos alunos sobre o tema da aula
	4	Aplicação de pré-teste	Submeter a turma a um novo pré-teste individual por meio de um questionário a nível intermediário para analisar se houve uma melhor percepção sobre os conteúdos abordados
3	5	Apresentação do *ebook* e do *software* *Algodoo*	Expor o livro digital na íntegra que será utilizado na SD e realizar introdução ao uso do *Algodoo*
	6		

Tabela 8 - Informações sobre a aplicação da sequência didática

INFORMAÇÕES SOBRE A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA (conclusão)			
Encontro	Aula	Atividade	Objetivo
4	7	Aulas expositivas do conteúdo	Apresentar o conteúdo de forma clara e organizada na sala de aula e/ou, com exemplos práticos, utilizando recursos como o *ebook*, o quadro negro e a sala de vídeo
	8		
5	9		
	10		
6	11	Aulas práticas do *Algodoo*	Trabalhar simulações práticas e coletivas sobre o conteúdo estudado no *Algodoo*, usando o laboratório de informática e/ou o projetor de imagens para reforçar o conteúdo estudado, buscando novos significados quanto às situações-problemas
	12		
7	13		
	14		
8	15	Aplicação do pós-teste	Aplicar um questionário individual sobre energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento a nível mais elevado com o intuito de coletar indícios de aprendizagem dos alunos
	16		
9	17	Realização de um *feedback* do pós-teste	Retomar o pós-teste, corrigindo-o e buscando fazer com que o aluno perceba sua evolução de aprendizagem, principalmente no que tange a sua capacidade de captar significados, compreender, explicar e de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema, características essas presentes nas UEPS de Moreira (2011)
	18	Aplicação do questionário de autoavaliação e pesquisa final de opinião	Verificar, por meio de questionários individuais específicos, como o aluno se autoavalia em relação ao seu aprendizado e o que ele achou da SD utilizada

Fonte: Elaborada pelos autores.

Para que a aplicação do produto educacional atinja um número expressivo de alunos e servir, além do uso de outros recursos didáticos, como fator motivante para participação nas etapas da sequência didática, será atribuída uma pontuação bimestral parcial considerável atrelada à frequência, a participação nas aulas, ao preenchimento dos questionários físicos de conhecimentos e de opinião por parte dos discentes.

Para registro da aplicação da sequência didática, os elementos avaliativos e os recursos fotográficos utilizados buscarão preservar o anonimato dos alunos. Costa (2019, p. 2), em relação a importância de manter preservada a identidade dos alunos, fala que

> De um modo geral, é indispensável ao professor conhecer a identidade dos alunos, bem como suas determinantes sociais e econômicas. Mas em casos nos quais os tabus sociais, as crenças religiosas ou os preconceitos inibem a relação de confiança, a não identificação do aluno se faz necessária para a efetivação do processo ensino-aprendizagem. Neste sentido, um processo educativo e/ou comunicativo não implica em um professor conhecer apenas a identidade do seu aluno, mas sim em uma relação de confiança que se estabelece.

Nesse sentido, os recursos de imagens utilizados para registro das atividades envolvendo os discentes levará em conta a sua não identificação.

Em relação à adequação da aplicação da SD com os passos da construção de uma UEPS, a tabela a seguir faz uma compatibilidade entre esses fatores.

Tabela 9 - Comparativo da aplicação da SD com a UEPS de Moreira

COMPARATIVO DA APLICAÇÃO DA SD COM A UEPS DE MOREIRA				
PASSOS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA		**PASSOS DA UMA UEPS**		
Encontro	Aula			
1	1	1	-	-
	2	2	-	-
2	3	3	7	-
	4	2		
3	5	4	7	-
	6			
4	7	4	5	7
	8			
5	9			
	10			
6	11	5	6	7
	12			
7	13			
	14			
8	15	-	7	8
	16			
9	17	-	7	8
	18			

Fonte: Elaborada pelos autores.

Os oito passos de uma UEPS de Moreira (2011), os quais a Tab. (9) acima se refere e a SD aqui proposta está baseada, são:

- 1 – Definição do tópico específico a ser abordado e sua relação com a disciplina.
- 2 – Criar situações-problemas por meio de discussões, questionários, entre outros para coletar informações sobre os conhecimentos prévios do aluno.
- 3 – Propor situações-problemas, em nível introdutório, para organizar os conhecimentos prévios dos alunos.
- 4 – Apresentar o conteúdo a ser ensinado, com foco na participação coletiva dos alunos.
- 5 – Retornar os aspectos gerais do conteúdo ensinado, que, dessa vez, precisa ser com um maior nível de complexidade, podendo ser usado recursos computacionais.
- 6 – De forma integradora, retomar novamente o conteúdo e propor novos desafios, podendo fazer uso de programas computacionais.
- 7 – Durante toda a aplicação da SD, o aluno deve ser avaliado de forma contínua, levando em consideração seu desempenho individual e coletivo nas tarefas propostas.
- 8 – Verificar se a SD foi exitosa, por meio de avaliação do desempenho dos alunos que busque fornecer evidências de aprendizagem significativa (captação de significados, compreensão, capacidade de explicar, de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema).

Finalizada a metodologia de aplicação a qual se pretende aplicar o produto educacional em sala de aula, traremos, a seguir, os resultados e as discussões referentes a experiência dessa tarefa. Vale lembrar que no Produto Educacional, o qual está inserido nos Apêndices desta Dissertação, constam propostas didáticas genéricas para que o professor consiga usar de forma simplificada os recursos do trabalho em questão.

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, apresentaremos, além do processo de construção e análise do livro digital, o balanço do levantamento dos dados que se deram durante a sequência didática utilizada para aplicação do produto educacional. Para uma melhor organização e análise dos dados coletados, iremos, em um primeiro momento, fazer apenas uma descrição fiel dos fatos ocorridos em cada encontro, para, em seguida, responder aos objetivos da pesquisa, discutindo os dados apurados desde o início da construção do *ebook* até a finalização da sua aplicação.

A análise dos dados foi feita a partir das observações das atividades realizadas pelos alunos e do engajamento da turma durante a aplicação da SD. No caso da observação do empenho dos discentes, foi levado em consideração a sua assiduidade nas aulas e a realização das atividades passadas, bem como a pontualidade com que elas foram efetuadas. Todas as anotações referentes a esse estudo foram feitas por meio de caderno de registro do professor.

A Tab. (10) a seguir mostra as atividades e as observações que foram realizadas durante o desenvolvimento da SD, que, como planejado, ocorreu em nove encontros, com uma hora e quarenta minutos cada, o que equivale a duas aulas de cinquenta minutos. Os encontros aconteceram uma vez por semana, do final do mês de maio ao início do mês de agosto, na turma de 1ª Série "A", do turno matutino, da EEPEMR, em Parnamirim/RN. Esse período correspondeu ao segundo bimestre letivo de 2024, com paralização das aulas durante quinze dias devido ao recesso junino.

Tabela 10 - Atividades e registros analisados

ENCONTRO	ATIVIDADE/REGISTRO
1 ao 9	Assiduidade dos alunos
1 ao 9	Participação nas aulas
1	Pré-Teste I
2	Situação-Problema
2	Pré-Teste II
4 ao 6	Realização dos exercícios das aulas teóricas e práticas
7	Apresentação de seminário do Laboratório Virtual no *Algodoo*
8	Pós-Teste
9	Autoavaliação e Pesquisa Final de Opinião

Fonte: Elaborada pelos autores.

Assim, as atividades e os registros acima foram analisados com enfoque qualitativo, apesar da importância do caráter quantitativo para o rigor da pesquisa científica, pois esses dados, quando bem tabulados e organizados, evoluem além dos limites da descrição e avançam para a explicação (Vygotski, 1991).

7.1 A CONSTRUÇÃO DO EBOOK

No capítulo 5, o qual foi destinado à apresentação do livro digital, sua estrutura, seus objetivos e a uma breve introdução ao *Algodoo*, já se encontram as informações necessárias para se conhecer o *ebook* produzido para justificar os anseios desta pesquisa. Aqui, vamos apenas descrever as etapas da sua construção, para depois analisarmos, em outro tópico, se ele atendeu aos objetivos desta pesquisa.

Pensando em construir um material que potencialize o Ensino de Física, decidimos por escrever um *ebook* que tratasse da Dinâmica Rotacional mediada pelo uso do *Algodoo*, por ser um conteúdo muito importante para o ensino básico, mas praticamente não se vê nos livros didáticos desse nível de ensino.

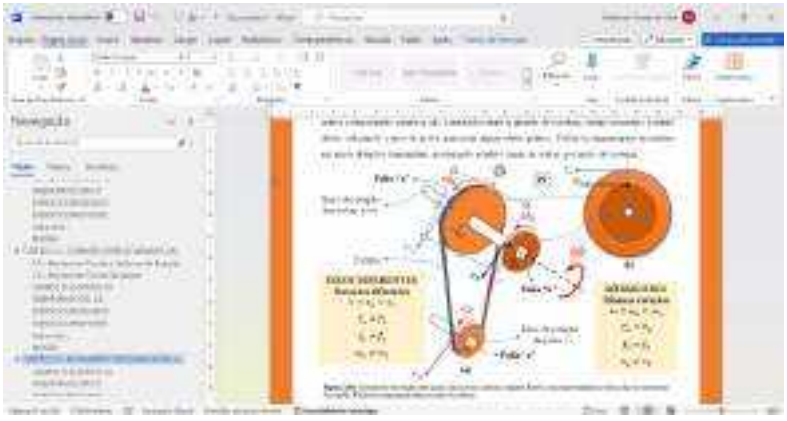
Primeiro, foi feito uma pesquisa bibliográfica sobre obras que tratassem do conteúdo escolhido, principalmente a nível de graduação, pois os livros didáticos do Ensino Médio, quando tratam desse assunto, o aborda de maneira extremamente superficial. Dentre muitas obras, o principal livro usado como base na estruturação do *ebook* foi o Fundamentos de Física - Mecânica - 10ª Edição (Halliday; Resnick; Walker, 2016), onde o conteúdo se encontra nos seus capítulos 10 e 11.

Em seguida, antes do início da escrita do livro, foi necessário verificar quais partes dos assuntos poderiam ser trabalhados no *software*, para avaliar possíveis adaptações mais condizentes. Depois de muito treino, foi possível utilizar o programa para todas as partes do conteúdo, o que foi algo bastante animador.

Por falta de domínio de, talvez, ferramentas mais adequadas e específicas para a escrita de um *ebook*, optamos por escrevê-lo no programa *Word*, que pertence ao conjunto de aplicativos da *Microsoft Office*.

Todo o texto do livro digital; seu modelo de design gráfico (*template)*; suas figuras, com exceção apenas das relacionadas às simulações no *Algodoo*, pois foram feitas, pelos autores do produto educacional, capturas de tela das demonstrações práticas dos conteúdos dos capítulos no *software*; suas tabelas; suas equações; além de quaisquer outros instrumentos contidos nesse projeto foram feitos pelos seus próprios autores, alicerçados nas bibliografias já citadas antes.

Figura 51 - Ebook no *Word*



Fonte: Captura de tela do Produto Educacional aberto no programa *Word*.

De início, o livro foi escrito também em dois capítulos, mas decidimos dividi-los em mais partes para deixá-lo mais bem estruturado. Todas as figuras, textos, equações e tabelas foram, como já falado, de autoria própria, utilizando-se das próprias ferramentas do *Word*.

Durante o processo de sua escrita e estruturação, foram sendo inseridas novas funcionalidades no *ebook*, para se adaptar com as suas características e deixá-lo mais interativo, como o uso de marcadores, de *hiperlinks* e de QR *Codes* para acesso a vídeos autorais do *YouTube*, contendo tutoriais de como fazer as simulações de cada capítulo do livro digital, por exemplo.

Figura 52 - Vídeo de simulação no *Algodoo*



Fonte: YouTube, captura de tela da página na *internet*.

Em linhas gerais, o produto educacional foi escrito em cinco meses, de julho a dezembro de 2023, é dividido, além de elementos pré-textuais e pós-textuais, em doze capítulos, que abordam desde os conceitos básicos de rotação até a conservação do momento angular e possui 184 páginas. Ele encontra-se, na íntegra, nos apêndices deste trabalho e, como qualquer outra obra, está sempre sujeito a correções e melhorias.

7.2 DESCRIÇÃO DOS ENCONTROS

Aqui, nesta seção, estão descritas todas as atividades desenvolvidas durante o progresso da SD, a qual foi desenvolvida de acordo com as UEPS de Moreira (2011), sob a luz da TAS de Ausubel. É importante mencionar que nas aulas que se fez uso do projetor de imagens, os alunos ficaram posicionados atrás desse equipamento. Por esse motivo, algumas imagens não os capturaram.

7.2.1 Encontro 1 - Apresentação da SD, do *Ebook* e Aplicação do Pré-Teste I

Ocorrido na segunda-feira do dia 20/05/2024, o primeiro encontro contou com trinta e quatro (34) presentes, dos quarenta e um (41) alunos matriculados. Inicialmente, nos dez (10) primeiros minutos, foi explanado, pelo professor, como se daria o percurso didático-pedagógico do segundo bimestre. Nessa ocasião, foi esclarecido para eles que o professor era estudante do MNPEF e que se encontrava na etapa de aplicação do seu produto educacional.

Dito isso, os trinta (30) minutos seguintes foram dedicados à apresentação, em *slides*, da SD a ser desenvolvida durante o bimestre, bem como uma breve amostra do *ebook "Algodoo e a Dinâmica Rotacional"*, o qual representa o produto educacional mencionado anteriormente.

Figura 53 - Apresentação da SD e do Produto Educacional



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Nos próximos quarenta (30) minutos, foi apresentado aos discentes os conteúdos definidos, que, nesse caso, foram as energias cinéticas de rotação e rolamento, e que iriam ser estudados durante o bimestre, além da exibição de dois vídeos do *YouTube*, com títulos "O Que É Energia" e "Energia | Nerdologia", dos canais "Ciência Todo Dia" e "Nerdologia", respectivamente; relacionados aos conceitos de energia, seus tipos e como se manifestam na natureza, com a intenção de introduzir um conceito amplo sobre a temática a ser estudada durante a aplicação da SD.

Figura 54 - Exibição dos vídeos sobre Energia



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Finalizando o primeiro encontro, os trinta minutos (30) restantes foram reservados para aplicação do primeiro Pré-Teste, o qual versou sobre conhecimentos básicos e introdutórios do conteúdo específico a ser trabalhado no bimestre, como conceitos sobre as grandezas do movimento circular, energia, tipos de energia e de *softwares* computacionais voltados ao ensino.

Essa atividade foi realizada por meio da aplicação individual de um questionário contendo vinte (20) perguntas básicas, cuja intenção foi de fazer um levantamento sobre os conhecimentos prévios dos alunos, de modo que seja possível fazer uma análise dos entraves que o conteúdo pode trazer durante a sua exploração.

Figura 55 - Aplicação do Pré-Teste I



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

A Tab. (11) abaixo sintetiza as informações relatadas até aqui referentes aos acontecimentos ocorridos no primeiro encontro da aplicação do produto educacional.

Tabela 11 - Descrição das atividades do 1º encontro

ATIVIDADE	DURAÇÃO
Diálogo sobre o percurso didático pedagógico do bimestre	10 min
Apresentação da SD e do Produto	30 min
Exibição dos vídeos e diálogo sobre energia	30 min
Aplicação do Pré-Teste I	30 min

Fonte: Elaborada pelos autores.

7.2.2 Encontro 2 - Exposição de Situação-Problema e Aplicação do Pré-Teste II

As duas aulas do segundo encontro foram ministradas na segunda-feira, 27/05/2024, com a presença de trinta e dois (32) alunos.

Inicialmente, nos cinco (5) primeiros minutos, houve uma pequena discussão sobre os resultados do primeiro questionário, principalmente em relação ao grande número de questões que não foram respondidas.

Em seguida, nos sessenta e cinco (65) minutos seguintes, foi exposta uma situação-problema envolvendo o movimento de um carro, principalmente em relação aos conceitos que envolvem o movimento rotacional dos seus pneus. Antes, durante e depois dessa atividade, foram discutidos os conceitos que envolvem o movimento linear do carro, do movimento de rolamento do seu pneu e de possíveis causas e soluções para resolver a situação.

Figura 56 - Situação-Problema do Encontro 2



Fonte: Elaborada pelos autores.

Por fim, foram reservados os trinta (30) últimos minutos para a aplicação do Pré-Teste II, que, dessa vez, contou com vinte (20) questões de níveis um pouco maiores em relação ao questionário do encontro anterior.

Figura 57 - Aplicação do Pré-Teste II



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

A seguir, na Tab. (12) estão, de maneira resumida, como se deu a distribuição do tempo e das atividades realizadas no segundo encontro da aplicação do produto educacional.

Tabela 12 - Descrição das atividades do 2º encontro

ATIVIDADE	DURAÇÃO
Discussão sobre as respostas do Pré-Teste I	5 min
Atividade relacionada à Situação-Problema	65 min
Aplicação do Pré-Teste II	30 min

Fonte: Elaborada pelos autores.

7.2.3 Encontro 3 - Introdução ao *Algodoo*

A quinta e a sexta aulas, as quais corresponderam ao terceiro encontro da SD, deram-se na segunda-feira, 03/06/2024, e estiveram presentes trinta e cinco (35) alunos. A princípio, estava planejado, de acordo com os procedimentos metodológicos deste trabalho, utilizar o laboratório de informática para que os alunos tivessem a oportunidade de iniciar o seu processo de aprendizagem com o uso das ferramentas do *Algodoo*. No entanto, esse espaço, na data da aula, estava inativo, sendo necessária à sua adaptação.

Então, as aulas aconteceram na sala de vídeo, onde os cinco (5) primeiros minutos foram destinados a uma rápida discussão dos resultados do encontro anterior, tanto da situação-problema quanto do questionário aplicado.

Logo após, nos próximos vinte (20) minutos, foi apresentado o *ebook* na sua íntegra, para que os alunos tivessem conhecimento de toda a sua estrutura e sua interatividade.

Figura 58 - Apresentação do *ebook* na íntegra



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Em seguida, nos próximos cinquenta e cinco (55) minutos, para minimizar os impactos negativos causados pela falta de infraestrutura da EEPEMR em relação ao ambiente de informática, foi apresentado, pelo professor, todas as funcionalidades do *Algodoo*, desde o seu *download* até a criação de simulações simples, principalmente em relação aos que iriam ser trabalhados nos conteúdos da presente proposta didática.

Figura 59 - Apresentação do *Algodoo*



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Por fim, nos vinte minutos finais do encontro, como planejado com antecedência, imaginando uma possível falta de um adequado ambiente adequado para que os alunos pudessem construir simulações virtuais nos computadores do Lab. Info. da escola e apresentar em forma de seminário no sétimo encontro, foi disponibilizado para os estudantes um manual de laboratório virtual, que consta todas as etapas da construção de uma simulação no *Algodoo* referente à energia cinética de rotação de um disco homogêneo.

Resumidamente, na Tab. (13) a seguir, encontra-se a divisão do tempo gasto nas tarefas do encontro.

Tabela 13 - Descrição das atividades do 3º encontro

ATIVIDADE	**DURAÇÃO**
Discussão sobre s situação-problema e o Pré-Teste II	5 min
Apresentação da íntegra do *ebook*	20 min
Apresentação das funcionalidades e ferramentas do *Algodoo*	55 min
Orientações sobre o trabalho de Laboratório Virtual	20 min

Fonte: Elaborada pelos autores.

7.2.4 Encontro 4 - Aula Expositiva - Energia Cinética de Rotação

Depois da coleta e análise de dados referentes aos conhecimentos prévios dos alunos, bem como as discussões introdutórias relacionadas ao tópico a ser ensino durante a aplicação da SD, podemos iniciar as aulas expositivas do conteúdo de modo que possamos atacar os principais problemas encontrados (Ausubel, 2003).

As primeiras aulas expositivas dos conteúdos a serem ensinados se deram no dia 10/06/2024, com 33 alunos presentes. Inicialmente, nos vinte primeiros (20) minutos, foi feita uma revisão dos conceitos básicos de movimento circular uniforme. Em seguida, nos próximos vinte e cinco (25) minutos, foram abordados os conceitos e as definições de momento de inércia, centro de massa e teorema dos eixos paralelos.

Nos vinte (20) minutos seguintes, foram expostas as ideias e as explanações referentes à energia cinética de rotação.

Figura 60 - Aula expositiva de Energia Cinética de Rotação



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Por fim, para reforçar o conteúdo estudado, os trinta e cinco (35) minutos restantes foram utilizados para realização de exercícios, principalmente com o uso do *Algodoo*.

As aulas expositivas referentes ao quarto encontro ocorreram na sala de vídeo, onde foi possível fazer uso do projetor de imagens, para uso da apresentação dos slides de aula e do *software*, e do quadro negro, para resolução dos exercícios.

Figura 61 - Usando o *Algodoo* na aula de Energia Cinética de Rotação



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Na Tab. (14) a seguir, constam como se deu a divisão do tempo durante os cem minutos referentes ao quarto encontro.

Tabela 14 - Descrição das atividades do 4º encontro

ATIVIDADE	DURAÇÃO
Revisão de MCU	20 min
Aula de centro de massa, momento de inércia e teorema dos eixos paralelos	25 min
Aula de energia cinética de rotação	20 min
Resolução de exercícios no quadro negro e no *Algodoo*	35 min

Fonte: Elaborada pelos autores.

7.2.5 Encontro 5 - Aula Expositiva – Energia Cinética de Rolamento

Continuando as aulas expositivas do conteúdo, o sexto encontro ocorreu no dia 08/07/2024, na primeira segunda-feira após o recesso junino, com a presença, desta vez, de 37 alunos.

A primeira aula desse encontro iniciou-se com a retomada dos principais conceitos da aula anterior sobre energia cinética de rotação, com dez (10) minutos de duração. Em seguida, nos próximos quarenta (40) minutos, foram trabalhados, em apresentação de slides e no quadro negro, uma breve revisão do movimento de translação e a sua energia cinética associada, além

da energia cinética de rolamento como a composição das duas energias cinéticas já trabalhadas durante o presente encontro.

Figura 62 - Aula expositiva de Energia Cinética de Rolamento



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Ao final, para reforçar o conteúdo estudado, os cinquenta (50) últimos minutos foram usados para realização de questões envolvendo a temática das aulas, fazendo uso, em especial, do *Algodoo*.

Figura 63 - Usando o *Algodoo* na aula de Energia Cinética de Rolamento



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Assim como no encontro anterior, as aulas do quinto encontro também se deram na sala de vídeo, com a utilização dos mesmos recursos materiais e pedagógicos.

A seguir, na Tab. (15), estão resumidas as etapas e os respectivo tempos utilizados em cada atividade trabalhada nas aulas deste encontro.

Tabela 15 - Descrição das atividades do 5º encontro

ATIVIDADE	DURAÇÃO
Revisão de Energia Cinética de Rotação	10 min
Aula de Energia Cinética de Rolamento	40 min
Resolução de exercícios no quadro negro e no *Algodoo*	50 min

Fonte: Elaborada pelos autores.

7.2.6 Encontro 6 - Seminários do Laboratório Digital no *Algodoo* I

Programado para o início das apresentações em grupo dos trabalhos relacionados à construção do laboratório Digital no *Algodoo*, que consistiu na criação de um laboratório virtual de simulações no aplicativo, mediado por um manual, que está presente nos apêndices deste trabalho, o sexto encontro se deu no dia 15/07/2024 e contou com a presença de trinta e oito (38) alunos.

Formados, previamente, seis (6) grupos na turma, sendo quatro (4) formados por seis (6) alunos e dois (2) por sete (7); primeiramente, nos dez (10) minutos iniciais, foram estabelecidas a ordem das apresentações e as orientações finais de como cada um deles deveria proceder durante a sua apresentação, que, apesar de ter sido um trabalho em grupo, cada aluno precisaria apresentar uma simulação individualmente.

Logo após, nos oitenta e cinco (85) minutos seguintes, três (3) grupos fizeram as suas apresentações, ficando os outros três para o encontro seguinte.

Figura 64 - Apresentação individual de aluno no encontro 6



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Por fim, nos cinco (5) minutos restantes, foram debatidas algumas impressões no que concerne aos resultados das simulações expostas durante as aulas.

Sintetizando o cronograma desse encontro, a seguir, na Tab. (16), estão descritas as atividades desenvolvidas durante as aulas.

Tabela 16 - Descrição das atividades do 6º encontro

ATIVIDADE	DURAÇÃO
Organização das apresentações	10 min
Apresentações dos trabalhos	85 min
Discussões finais	5 min

Fonte: Elaborada pelos autores.

7.2.7 Encontro 7 - Seminários do Laboratório Digital no *Algodoo* II

Seguindo as apresentações dos seminários das simulações no *Algodoo*, o sétimo encontro ocorreu no dia 22/07/2024, estando presente, desta vez, trinta e seis (36) alunos e destinou-se a concluir os trabalhos iniciados no encontro anterior, ou seja, dos três (3) grupos restantes.

Nos cinco (5) primeiros minutos, foi, rapidamente, estabelecida a ordem das apresentações dos grupos. Nos oitenta e cinco (85) minutos seguintes, os grupos fizeram as suas apresentações, sendo, mais uma vez, cada aluno apresentando uma simulação diferente do seu colega de grupo.

Figura 65 - Apresentação individual de aluno no encontro 7



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

No final das aulas, nos dez (10) minutos restantes, foram debatidas, assim como no encontro anterior, algumas impressões relacionadas ao desempenho dos alunos durante as apresentações dos trabalhos.

A Tab. (17) a seguir, traz o resumo das atividades desenvolvidas durante o encontro.

Tabela 17 - Descrição das atividades do 7º encontro

ATIVIDADE	DURAÇÃO
Organização das apresentações	5 min
Apresentações dos trabalhos	85 min
Discussões finais	10 min

Fonte: Elaborada pelos autores.

7.2.8 Encontro 8 - Aplicação do Pós-Teste

Com a presença de trinta e oito (38) estudantes, o oitavo encontro ocorreu na sala de aula regular da turma no dia 29/07/2024 e as duas aulas (100 min) foram reservadas para aplicação da avaliação bimestral, a qual representa o Pós-Teste da SD em questão.

Figura 66 - Aplicação do Pós-Teste



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Mantendo o padrão da descrição dos encontros anteriores, a Tab. (18) mostra o resumo do relato deste tópico.

Tabela 18 - Descrição das atividades do 8º encontro

ATIVIDADE	DURAÇÃO
Aplicação do Pós-Teste	100 min

Fonte: Elaborada pelos autores.

7.2.9 Encontro 9 - *Feedback* do Pós-Teste e Aplicação do Questionário Final

Mais uma vez, com a presença de trinta e oito (38) alunos, o nono e último encontro da aplicação da SD deu-se também na sala de aula regular no dia do fechamento do segundo bimestre, de acordo com o calendário letivo do Estado do RN 2024, ou seja, no dia 05/08/2024.

Iniciando as aulas desse encontro, nos cinco (5) primeiros minutos; foi feita uma breve discussão a respeito dos resultados da atividade avaliativa do encontro anterior, para, em seguida, nos próximos cinquenta e cinco (55) minutos, ser prestada a correção e o debate das questões desse Pós-Teste.

Figura 67 - *Feedback* do Pós-Teste



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Por fim, para terminar a aplicação do produto educacional, foi aplicado, nos quarenta (40) minutos restantes, um questionário de autoavaliação e pesquisa final de opinião que visou medir a qualidade dos trabalhos que foram apresentados durante todos os nove encontros.

Figura 68 - Aplicação do Questionário Final



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Figura 69 - Aplicação do Questionário Final



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

A Tab. (19) a seguir mostra a síntese do que ocorreu nas duas aulas do encontro em questão.

Tabela 19 - Descrição das atividades do 9º encontro

ATIVIDADE	DURAÇÃO
Discussão inicial sobre o Pós-Teste	5 min
Feedback (correção) do Pós-Teste	55 min
Questionário de Autoavaliação e Pesquisa Final de Opinião	40 min

Fonte: Elaborada pelos autores.

7.3 ANÁLISE DO EBOOK

Com a finalização do produto educacional e do percurso metodológico a ser seguido para a sua aplicabilidade, ele foi submetido à aprovação para poder se dar início a aplicação em sala de aula em um processo de Qualificação de Produto Educacional, que ocorreu no dia 04/04/2024, às 14h, na sala 04, da Diretoria Acadêmica de Ciências (DIAC) do Campus Natal-Central (CNAT) do IFRN.

Figura 70 - Qualificação do Produto Educacional



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

A banca examinadora de qualificação foi composta pelo prof. Dr. Antonio Marques dos Santos e pela profa. Dra. Régia Pereira da Silva, além do prof. Dr. Melquisedec Lourenço da Silva, o qual também é autor do produto e orientador deste trabalho. Ao final da apresentação e das considerações da banca, o produto foi aprovado para aplicação, sendo sugerido apenas uma pequena modificação na formatação de duas das suas figuras, atendendo, assim, ao objetivo de criar um material didático gratuito e interativo para o uso de professores e alunos e que seja capaz de potencializar o ensino de Física através de um programa computacional de fácil acesso, pois o uso de recursos computacionais corresponde a uma nova forma de ensinar, por meio da tentativa de solucionar problemas cotidianos por meio de habilidades que os alunos já possuem em um mundo tão tecnológico (Minatto; Giacomazzo, 2023).

Durante o desenvolvimento da SD, evidenciou-se que o uso do *Algodoo* possibilitou a criação de atividades práticas e desafiadoras, que alinharam o conhecimento teórico do

conteúdo com as simulações criadas no aplicativo, tornando a turma mais envolvida nas atividades realizadas durante todo o processo de aprendizado. Araújo *et al.* (2021) ressalta que o uso de programas computacionais na educação é uma ferramenta de grande importância no ensino, pois possibilita um maior dinamismo em sala de aula e melhora o poder de investigação de todos os envolvidos no processo.

Ademais, o livro digital foi apresentado e entregue para a coordenação pedagógica e para os professores da EEPEMR, buscando não apenas compartilhar o *ebook*, mas também disseminar o uso de *softwares* computacionais na comunidade escolar, em especial o *Algodoo*, pois o uso desse tipo material é fundamental para auxiliar os usuários na escolha de ferramentas corretas e relevantes para seu aprendizado (Moretto; Dametto, 2018).

7.4 ANÁLISES DOS ENCONTROS

Como anunciado antes, iniciaremos, agora, de acordo com a abordagem da pesquisa qualitativa e sob a luz da Teoria da Aprendizagem Significativa, em especial os passos da construção de uma UEPS, as discussões acerca dos dados e observações que se deram durante os encontros para a aplicação do produto educacional e o consequente desenvolvimento da sequência didática utilizada.

Para os itens dos questionários que exigiram dos alunos respostas discursivas, iremos analisá-los segundo a visão de Gibbs (2009, p. 9), quando afirma que a análise da pesquisa qualitativa "se abstém de estabelecer um conceito bem definido daquilo que se estuda e de formular hipóteses no início para depois testá-las. Em vez disso, os conceitos (ou as hipóteses, se forem usadas) são desenvolvidos e refinados no processo de pesquisa".

Além disso, para melhor representar o tratamento de dados da nossa pesquisa, principalmente os que se referem aos questionários utilizados, usaremos gráficos que tornem as informações mais claras e se tornem mais simples de se entender (Oliveira; Capelli; Claudia; Sampaio, 2022). A Fig. (71) e a Fig. (72) a seguir mostram os modelos de gráficos que iremos utilizar na nossa análise de informações.

Para a verificação dos conhecimentos pré-existentes dos alunos, utilizaremos o modelo representado na Fig. (71), contendo apenas quatro (4) questões e com a quantidade de dez (alunos) para cada parâmetro, onde o significado das legendas dos resultados estão representas a seguir.

- **DOMÍNIO:** o aluno demonstra que domina o conceito da questão, respondendo-a

corretamente com precisão e clareza.

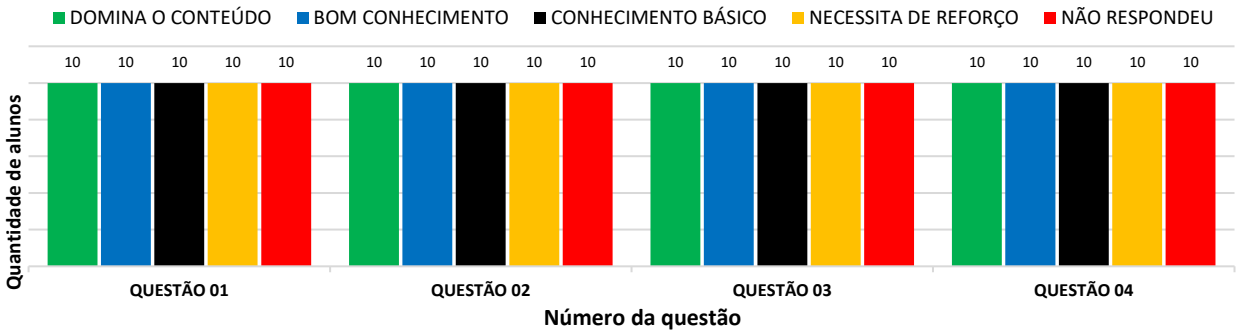
- **BOM CONHECIMENTO:** o aluno possui bom conhecimento do conceito da questão, respondendo-a de maneira satisfatória e apontando apenas dúvidas pontuais.

- **CONHECIMENTO BÁSICO:** o aluno possui um conhecimento básico do conceito da questão, respondendo-a parcialmente e apresentando várias dúvidas.

- **NECESSITA DE REFORÇO:** o aluno não demonstra conhecimento algum sobre o conceito exigido na questão, respondendo-a de maneira totalmente desconexa com o solicitado.

- **NÃO RESPONDEU:** o aluno não respondeu à questão.

Figura 71 - Modelo de Gráfico de Resultados de Pré-Teste



Fonte: Elaborada pelos autores.

Em relação à examinação dos indícios de aprendizagem por meio do Pós-Teste, faremos uso do modelo de gráfico da Fig. (72), nos mesmos moldes do gráfico da Fig. (71), mas com os parâmetros ajustados para os resultados de aprendizagem, conforme descrição abaixo.

- **EXCELENTE:** o aluno demonstra uma excelente compreensão dos conceitos teóricos, respondendo com clareza a questão proposta, além de ser preciso na sua argumentação. Em se tratando de questões envolvendo cálculos, o aluno também demonstra domínio dos procedimentos matemáticos e habilidades na resolução de problemas.

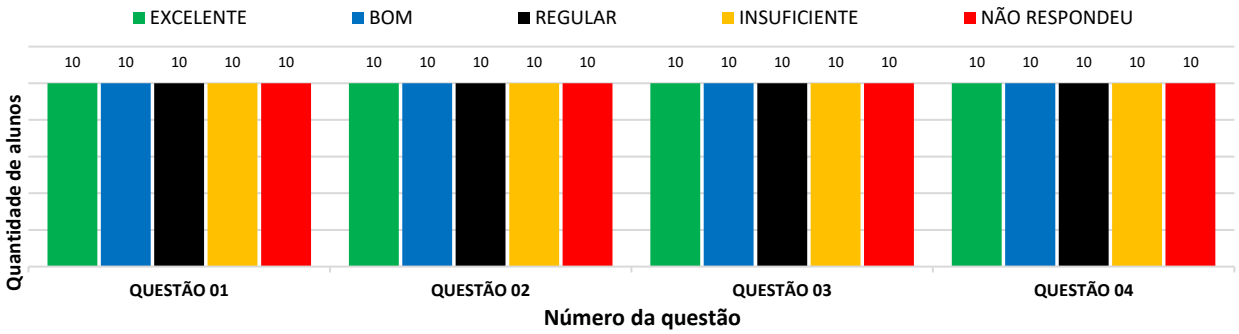
- **BOM:** o aluno demonstra boa compreensão dos conceitos teóricos, respondendo com clareza a questão proposta, apesar de apresentar alguma falta de precisão nas argumentações. Em relação aos cálculos, o aluno demonstra relativo domínio na resolução de problemas.

- **REGULAR:** o aluno demonstra uma compreensão básica dos conceitos teóricos, não sendo muito claro ao responder à questão proposta e apresenta muitas dificuldades ao apresentar seus argumentos para justificar a sua resposta. Além disso, o aluno sente dificuldade em resolver problema envolvendo cálculo.

- **INSUFICIENTE:** o aluno demonstra uma compreensão insuficiente dos conceitos teóricos, apresentando argumentos inadequados para justificar a sua resposta. Quando há cálculos, o aluno também não demonstra habilidades mínimas de resolver a questão proposta.

- **NÃO RESPONDEU:** o aluno não respondeu à questão.

Figura 72 - Modelo de Gráfico de Resultados de Pós-Teste



Fonte: Elaborada pelos autores.

Por fim, em relação ao questionário de autoavaliação e pesquisa final de opinião, ao desempenho dos alunos durante as aulas e à apresentação dos seminários do laboratório virtual no *Algodoo*; assim como a evolução no tempo da assiduidade dos alunos; os resultados e as análises serão feitos com fazendo uso de gráficos nos mesmos moldes dos representados acima, para simplificar a compreensão desses parâmetros.

7.4.1 Análise e Discussões do Encontro 1

Ocorrido no dia 20/05/2024, o primeiro encontro contou com a presença de 82,93% dos alunos (34 dos 41 matriculados), o que representa um número de presentes, digamos, satisfatório, conforme as normas educacionais vigentes que busca diminuir a evasão escolar e manter o aluno na escola, principalmente na idade certa (Brasil, 2023).

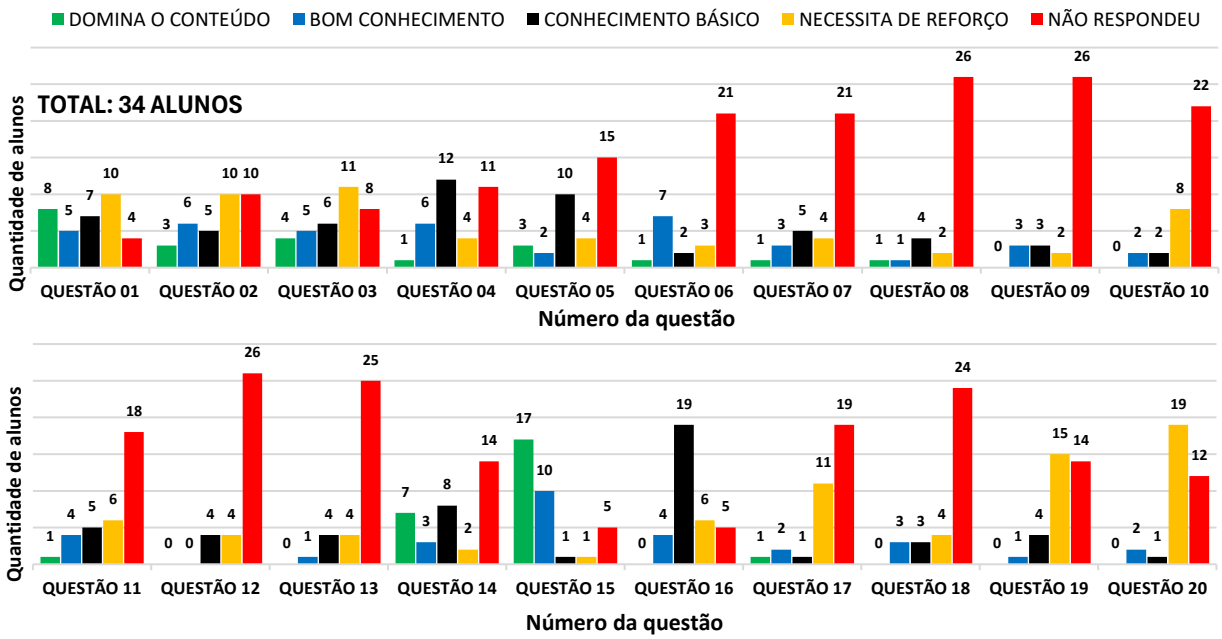
As apresentações da SD e do livro digital, a definição do conteúdo programático, a exibição dos vídeos e a aplicação do Pré-Teste I, que ocorreram nas aulas deste encontro estão

alinhados com os passos um (1) e dois (2) da construção de uma UEPS de Moreira (2012), pois definir o tópico específico a ser abordado e a sua relação com a disciplina e criar situações-problemas por meio de discussões, questionários, entre outros, para coletar informações sobre os conhecimentos prévios do aluno (Moreira, 2011) estão relacionados a esses passos, respectivamente.

Em relação aos resultados do Pré-Teste I, precisamos fazer uma análise qualitativa das respostas dos alunos, pois, além de possuir caráter mais generalizado, nos permite avaliar melhor perguntas que exigiam respostas discursivas dos discentes.

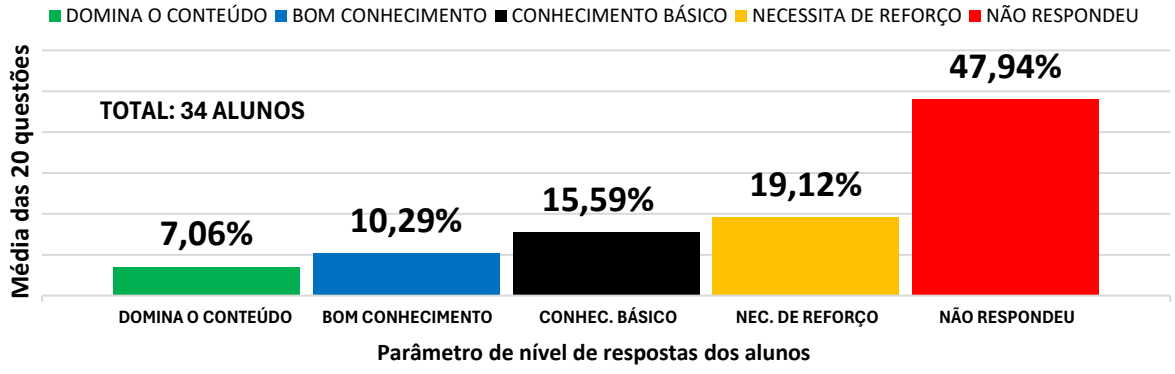
As figuras (73) e (74) a seguir apresentam os parâmetros de respostas das vinte (20) questões referentes ao Pré-Teste I realizado neste encontro, sendo a Fig. (73) referente às respostas de cada questão e a Fig. (74), a média dos parâmetros de respostas

Figura 73 - Gráfico dos resultados do Pré-Teste I



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 74 - Gráfico da média percentual dos resultados do Pré-Teste I



Fonte: Elaborada pelos autores.

Observando os gráficos referentes aos resultados, podemos observar que os parâmetros "NECESSITA DE REFORÇO" e "NÃO RESPONDEU" dominaram os cinco critérios de análise, representando médias de 19,12% e 47,94% do total das respostas dos alunos que foram submetidos à atividade por meio do Pré-Teste I, respectivamente.

Desses dois resultados, chamou a atenção o fato de que, praticamente, metade dos alunos sequer tentou responder às perguntas, seja pelo fato de não saber ou de não possuir o letramento adequado para a argumentação devida, fato esse que também se encaixa aos que responderam de modo equivocado (PRECISA DE REFORÇO), além de, como já tratado aqui neste trabalho, a área das ciências não ser a parte do conhecimento que mais atrai a simpatia dos alunos, fazendo com que eles não possuam interesse em ao menos tentar. Nesse sentido, Schneider e Goldmeyer (2020) falam que a desenvoltura argumentativa do aluno é inerente à sua leitura, aos conhecimentos prévios que ele possui e a sua identificação com a temática.

As autoras ainda acrescentam que, nesse cenário, "pode-se ainda acrescentar que o desempenho se dá de forma gradativa e que o letramento argumentativo pode ser de grande auxílio para o desenvolvimento da arte de argumentar bem, como para apreciar novos pontos de vista que não o seu" (Schneider; Goldmeyer, p. 11).

Por outro lado, houve resoluções que apresentaram algum conhecimento sobre o que era questionado. As perguntas desse primeiro questionário envolveram conceitos básicos do movimento circular; as grandezas de rotação; tipos de energia, principalmente as de rotação e rolamento e sua aplicabilidade no dia a dia; além do uso de *softwares* computacionais educacionais, em especial o *Algodoo*. Os itens que pertencem ao primeiro questionário, que também se encontra nos Apêndices deste trabalho, estão discriminados na Tab. (20) seguir.

Tabela 20 - Perguntas do Pré-Teste I

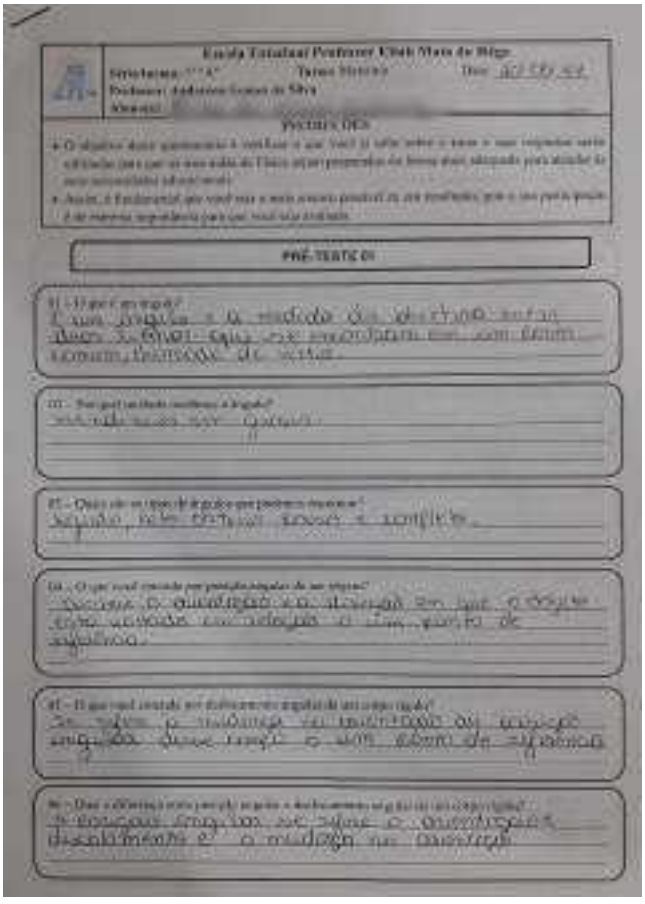
01. O que é um ângulo?	11 – O que você entende por aceleração em um movimento circular?
02. Em qual unidade medimos o ângulo?	12 – Qual a diferença entre aceleração linear e aceleração centrípeta?
03 – Quais são os tipos de ângulos que podemos encontrar?	13 – Se a "velocidade linear não muda" em um movimento uniforme, por que um corpo muda de direção em um movimento circular uniforme?
04 – O que você entende por posição angular de um objeto?	14 – O que você entende por energia?
05 – O que você entende por deslocamento angular de um corpo rígido?	15 – Cite alguns tipos de energia.
06 – Qual a diferença entre posição angular e deslocamento angular de um corpo rígido?	16 – Como a energia é usada no dia a dia?
07 – Qual a relação entre a sua velocidade angular e o seu período de rotação?	17 – O que você entende por energia cinética?
08 – Qual a relação entre a velocidade angular e a frequência de rotação?	18 – Qual a diferença entre energia cinética de translação, também chamada de linear, e energia cinética de rotação?
09 – Em um movimento circular uniforme, a velocidade angular é igual ou diferente em todos os pontos de um corpo rígido? E em relação à velocidade linear?	19 – Você conhece algum programa de computador usado para fins educacionais? Quais?
10 – Em um movimento circular uniforme, a velocidade linear é igual ou diferente em todos os pontos de um corpo rígido?	20 – Você conhece um programa de computador chamado Algodoo? Se sim, já utilizou? Para que serve?

Fonte: Elaborada pelos autores.

De acordo com os conteúdos abordados na atividade e do gráfico de resultados dos alunos, verifica-se que o melhor desempenho dos estudantes corresponde aos primeiros quatro itens. Isso se deu, claramente, porque eram questões referentes aos conceitos básicos de ângulos, que "se dão, principalmente, em conteúdos de séries anteriores [...], o que nos remete a uma reflexão no sentido de sempre estar fazendo ligações do conteúdo que está sendo estudado no momento com conteúdos anteriores" (Contessa *et al*., 2014. p. 544).

Os alunos começaram a se mostrar com maiores dificuldades a partir da quinta questão, onde começaram a ser abordados os conceitos de movimento circular e energia. Isso aconteceu, digamos, com certa previsibilidade, pois esses conteúdos são pouco explorados em séries anteriores, o que prejudica o aluno a obter novos conhecimentos a partir deles - os subsunçores - se não for criado estratégias para resolver esse problema (Moreira, 1982).

Figura 75 - Pré-Teste I de um aluno



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Assim, constatando a grande dificuldade da maioria dos alunos relacionados aos conhecimentos básicos do movimento rotacional, evidencia-se que esses conteúdos precisam ser bem trabalhados durante as aulas teóricas sobre energia cinética de rotação e energia cinética

de rolamento. A aplicação do primeiro questionário foi fundamental para analisar as lacunas de conhecimentos que os discentes possuem, de modo que foi possível pensar em uma maneira gradual de revisar esses assuntos.

Ademais, o uso do *Algodoo*, certamente, trará um maior dinamismo aos encontros, melhorando não apenas na abordagem das energias cinéticas, mas também aos tópicos que estão em defasagem no intelecto dos alunos (Moreira, 1982). E, nos dias de hoje, além de "a tecnologia está presente em diversas áreas, o uso delas em sala de aula visa estimular o aprendizado dos alunos" (Souza, *et al*., 2020, p. 46263).

7.4.2 Análise e Discussões do Encontro 2

No segundo encontro, que ocorreu no dia 27/05/2024, estiveram presentes 80% dos alunos da turma (32 dos 40 matriculados), mantendo, assim, uma boa média de alunos frequentando as aulas.

As atividades realizadas nesse encontro, que correspondem à situação-problema e ao segundo questionário trabalhados, estão alinhadas com os passos dois (2) e três (3) da criação de uma UEPS de Moreira (2011), pois criar situações-problemas por meio de discussões, questionários, entre outros para coletar informações sobre os conhecimentos prévios do aluno e propor situações-problemas, em nível introdutório, para organizar os conhecimentos prévios dos alunos são alusivos a esses passos.

Figura 76 - Aluna respondendo à situação-problema



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

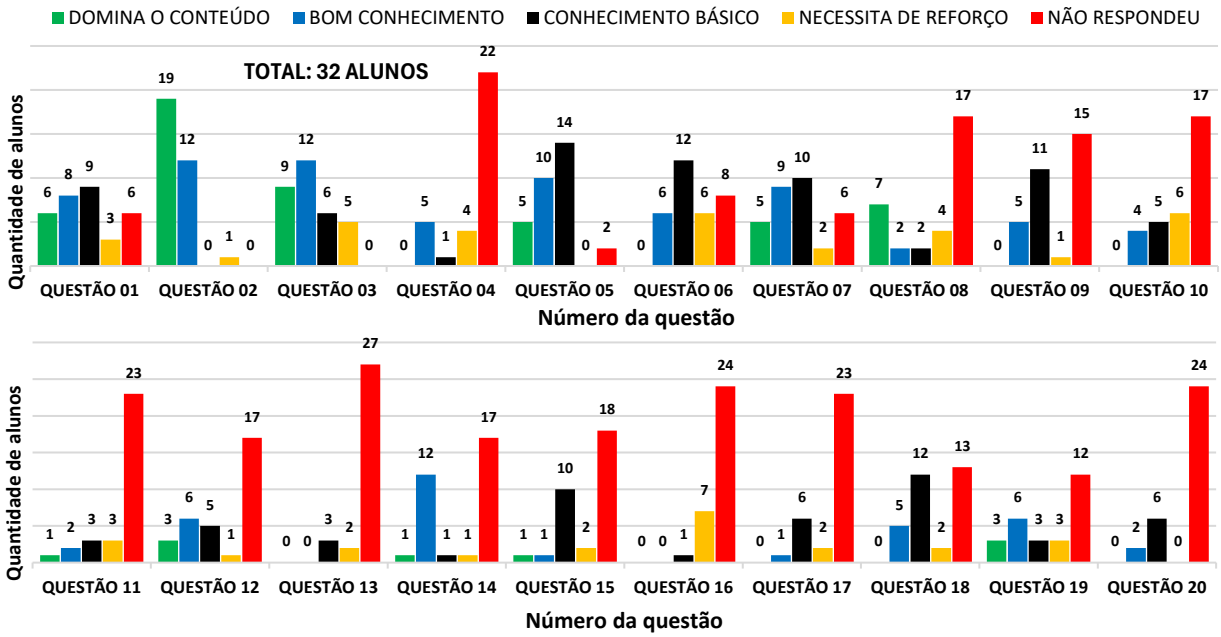
Figura 77 - Aplicação do Pré-Teste II



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

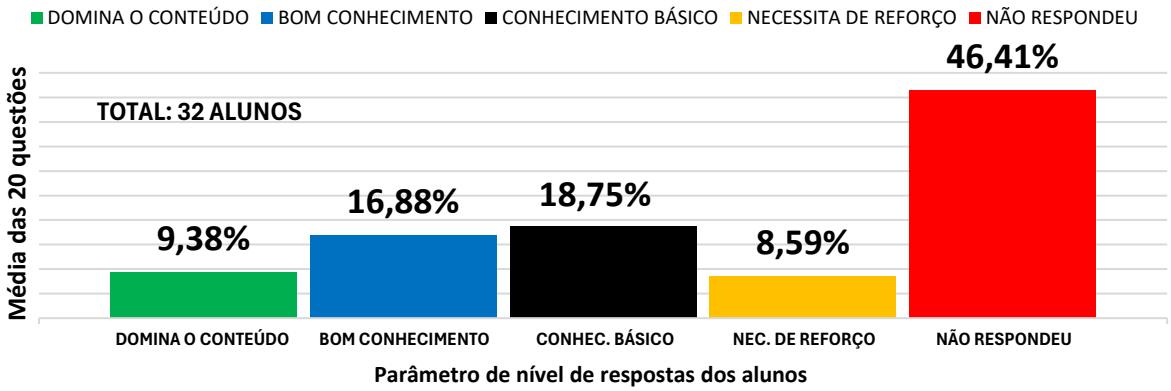
Continuando na análise qualitativa dos dados, buscando de entender melhor os dados levantados no questionário da aula anterior, a Fig. (78) e a Fig. (79) a seguir mostram o número absoluto desses parâmetros por questão do Pré-Teste II e a média dos resultados relacionados às respostas dos alunos, respectivamente.

Figura 78 - Gráfico dos resultados do Pré-Teste II



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 79 - Gráfico da média dos resultados do Pré-Teste II



Fonte: Elaborada pelos autores.

Comparando os gráficos das figuras (74) e (79) em termos percentuais, percebe-se uma ligeira melhora nas médias de todos os parâmetros avaliativos analisados. O quesito "NECESSITA DE REFORÇO", que no primeiro questionário foi de 19,12%, atingiu, no segundo questionário, 8,59%, correspondendo a uma queda de 10,53 pontos percentuais. Já no critério "NÃO RESPONDEU", que antes era de 47,94%, agora, no segundo questionário, foi de 46,41%, equivalente a uma redução de 1,53 ponto porcentual.

A Tab. (21) mostra a evolução das médias percentuais de todos os critérios analisados nos dois questionários.

Tabela 21 - Comparação dos Pré-Testes

PARÂMETROS	PRÉ-TESTE I (%)	PRÉ-TESTE II (%)	VARIAÇÃO (%)
DOMINA O CONTEÚDO	7,06	9,38	+ 2,32
BOM CONHECIMENTO	10,29	16,88	+ 6,59
CONHECIMENTO BÁSICO	15,59	18,75	+ 3,16
NECESSITA DE REFORÇO	19,12	8,59	– 10,53
NÃO RESPONDEU	47,94	46,41	– 1,53

Fonte: Elaborada pelos autores.

De acordo com os dados da Tab. (21), os parâmetros que dizem respeito se o aluno possui algum conhecimento em relação ao conteúdo abordado teve uma pequena alta em relação aos dados do primeiro questionário, enquanto os parâmetros que correspondem a falta de conhecimento do aluno em responder à questão caiu.

O provável motivo dessa variação, apesar de o segundo questionário possuir um nível mais elevado que o primeiro, deu-se por causa da ampla discussão antes da aplicação do Pré-

Teste II em sala de aula envolvendo todos os conceitos e variáveis físicas na situação-problema, onde foi dada ao aluno, de forma coletiva, inclusive, a oportunidade de discutir possíveis soluções e conceitos que envolvem o movimento de rolamento da roda de um veículo em movimento uniforme.

Nesse sentido, segundo Oliveira (2015), o levantamento de uma situação-problema favoreceu conhecer e discutir os espaços na estrutura cognitiva do aluno, fazendo com que os seus conhecimentos prévios sirvam como ponto de partida para análise da questão em discussão.

7.4.3 Análise e Discussões do Encontro 3

No dia 03/06/2024, ocorreu o terceiro encontro da SD, estando presentes 87,5% dos alunos matriculados na turma (35 de 40). As atividades realizadas nesse dia estão em consonância com o passo quatro (4) da construção de uma UEPS, pois a apresentação das ferramentas do *Algodoo*, principalmente em relação aos conceitos dos conteúdos a serem acordados durante a SD, focando na participação ativa dos alunos (Moreira, 2011), está relacionada com esse passo.

Planejado, inicialmente, para ocorrer no Lab. Info., as aulas, que ocorreram na sala de vídeo, evidenciou um grande problema que acontece na grande maioria das escolas brasileiras, principalmente no ensino público, que é a falta de estrutura dessas instituições no que diz respeito ao aparato das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) (Costa, 2021).

A ausência do laboratório de informática na EEPEMR prejudicou o andamento da aplicação da SD nesse aspecto, e a criação do manual de construção de laboratório virtual, criado para substituir uma possível falta desse ambiente de estudo, também serviu para notabilizar outra característica importante em relação ao material humano no ensino público: a qualificação desses profissionais para o uso das mais diversas tecnologias educacionais no ambiente escolar. Nesse sentido, Costa (2021, p. 78) acrescenta que

> As TICs deveriam ter espaço garantido no processo de ensino-aprendizagem, no entanto, pouco têm ganhado espaço ao longo dos anos. A tecnologia deve ser vista e usada como aliada dos professores na sua prática pedagógica. Entretanto, muitos professores desconhecem as aplicabilidades pedagógicas das TICs e, ao mesmo tempo, não demonstram interesse em desvendar as possibilidades das metodologias de ensino mediadas por tecnologia. A escola poderia ser agente da inclusão digital no país, contudo, isso não é o que está acontecendo; ao contrário, o que se tem é um quadro desenhado pela falta de infraestrutura, conteúdo digital organizado e formação de professores. Diante disto, vale ressaltar que ter os equipamentos não significa que

> eles estão sendo utilizados, e que estão sendo usados de forma correta, com planejamento e objetivos bem definidos, para que se tenha um ensino de qualidade e significativo para os aprendizes.

Assim, com foco na participação coletiva e ativa dos alunos, e com o manual de laboratório virtual como material de apoio, foi possível trabalhar as ferramentas do *Algodoo* de maneira muito satisfatória, pois o *software* possui uma *interface* muito simples e intuitiva.

7.4.4 Análise e Discussões do Encontro 4

Com a presença de 82,5% da turma (33 de 40 alunos), o quarto encontro, que ocorreu no dia 10/06/2024, tratou-se da etapa da SD relacionada às aulas expositivas sobre energia cinética de rotação. As tarefas que foram feitas nesse dia estão de acordo com os passos quatro (4) e cinco (5) da UEPS, uma vez que apresentar e retomar o conteúdo e os aspectos gerais a serem ensinados, com foco na participação coletiva dos alunos, que, dessa vez, precisaram ser com um maior nível de complexidade, podendo ser usado recursos computacionais (Moreira, 2011), estão relacionados com as atividades realizadas nessas aulas.

Percebeu-se, nessas aulas, uma participação muito ativa dos alunos em todas as atividades desenvolvidas, desde questionamentos durante a exposição oral do conteúdo, até a resolução de exercícios, principalmente os que faziam uso do simulador digital. Partindo desta observação, Moreira e Masini (1982) destacam que aprender significativamente é firmar semelhanças daquilo que já se sabe, a qual se encontra organizado na estrutura cognitiva, com os novos conhecimentos.

Somando-se a isso, Araújo *et al.* (2021, p. 5) ressaltam a importância dos simuladores no ensino quando falam que "o papel dessas ferramentas é o de auxiliar a execução de atividades que permitam ao aluno ordenar e coordenar suas ideias e interpretações sobre os fenômenos/situações práticas a partir da sua interação com a máquina computacional".

Nesse sentido, verificou-se que o alinhamento dos conceitos que os alunos já possuem, bem como os que estavam em defasagem, com os novos conteúdos, principalmente fazendo uso do *Algodoo*, criou um bom dinamismo durante as aulas, constatando-se um maior interesse dos estudantes pelo conteúdo.

7.4.5 Análise e Discussões do Encontro 5

Dando continuidade às aulas expositivas do conteúdo programático da SD, o quinto

encontro ocorreu na segunda-feira, 08/07/2024, com a presença de 92,5% dos alunos da turma (37 de 40). Dessa vez, o tema geral da aula versou sobre a energia cinética de rolamento e as atividades realizadas nesse dia, assim como no encontro anterior, também estão alinhadas com os passos quatro (4) e cinco (5) da construção de uma UEPS de Moreira (2011).

Devido ao fato de esse encontro anteceder as aulas do sexto e do sétimo encontros, os quais foram reservados para apresentações dos seminários sobre a construção de simulações no *Algodoo* por parte dos estudantes, quase que a totalidade dos alunos se fizeram presentes, buscando se prepararem melhor para os trabalhos do próximo encontro.

Quanto à participação e desempenho dos alunos, os mesmos resultados da análise feita no encontro anterior também cabem aqui, pois os alunos continuaram a desenvolver, de maneira bastante dinâmica e ativa, as discussões, atividades e problemas propostos referentes ao conteúdo em questão, ressaltando, mais uma vez, o quanto as ideias-âncora servem para alavancar novos conhecimentos a partir dos seus conhecimentos prévios (Ausubel, 1968).

Além disso, o prosseguimento do uso do *Algodoo*, para aplicação prática do conteúdo da aula e para resolução de exercícios relacionados à energia cinética de rolamento, mostrou-se, mais uma vez, como potencializador da aprendizagem dos discentes, pois foi possível perceber que eles se mostraram mais seguros na execução das tarefas propostas e como o uso de um recurso computacional se mostra fundamental nesse aspecto (Araújo *et al.*, 2021).

7.4.6 Análise e Discussões do Encontro 6

O sexto encontro estava programado para ocorrer no laboratório de informática da EEPEMR, onde os alunos teriam a oportunidade de utilizar os computadores para construírem simulações relacionadas aos conteúdos abordados durante as aulas expositivas da SD. Todavia, devido ao sucateamento desse ambiente, surgiu a necessidade de se criar um trabalho em forma de tutorial para que os estudantes pudessem construir simulações no *Algodoo* para se calcular a energia cinética associada ao movimento de rotação de um disco homogêneo.

Em relação a esse aspecto, é notório que a degradação das instituições públicas de ensino, principalmente no que diz respeito à sua falta de estrutura ou até mesmo à inexistência de laboratórios de informática nesses espaços, no Brasil, sempre foi uma grande barreira devido ao descaso do poder público com o sistema educacional do país, principalmente no que se refere a investimentos nessa área e à desvalorização dos seus profissionais. Segundo Freire *et al.* (2021), apesar de programas voltados para a inclusão de tecnologias nas escolas, como o Programa Nacional de Tecnologia Educacional (ProInfo), que consiste em um “programa

educacional com o objetivo de promover o uso pedagógico da informática na rede pública de educação básica" (MEC, 2024), por exemplo, a renovação desses equipamentos é praticamente inexistente, levanto, na maioria dos casos, a desativação dos laboratórios nas instituições.

Devido a esses embaraços, as aulas referentes ao início dos seminários das apresentações dos trabalhos aconteceram na sala de vídeo da escola, no dia 15/07/2024, e contaram com a presença 95% dos alunos (38 de 40). As atividades realizadas nesse encontro estão alinhadas com os passos cinco (5) e, principalmente, o seis (6) da UEPS, pois essa etapa propõe que, é importante, de forma integradora, retomar mais uma vez o conteúdo estudado e propor novos desafios, podendo fazer uso de programas computacionais (Moreira, 2011).

No tocante aos alunos faltantes, um deles apresentou, posteriormente, atestado médico justificando o motivo da sua ausência. Já o outro se refere a um aluno da turma que só frequenta, às vezes, em dia de avaliação. Isso mostra que esse alto índice percentual de presentes está relacionado com a importância da atividade avaliativa marcada, apesar de as aulas dos encontros anteriores também contarem com quase a totalidade de alunos. Para Cicuto e Torres (2020), o bom desempenho dos alunos no ambiente escolar é influenciado, principalmente, por sua assiduidade e no envolvimento com as atividades realizadas.

Apesar de os seminários serem em grupo, para manter, conforme Moreira (2012), apesar da importância da coletividade no processo de aprendizagem, cada aluno apresentou uma simulação relacionada à energia cinética de rotação para ser possível observá-lo de maneira individualizada, estabelecendo relações com aquilo que ele aprendeu. Em relação aos resultados, os discentes, em quase sua totalidade, entenderam e souberam seguir o passo a passo do manual e conseguiram, de maneira relativamente rápida, construir a sua simulação de modo satisfatório. A Fig. (80) mostra a tabela e as orientações finais trazidos pelo manual de laboratório digital para serem executados no *software*.

Figura 80 - Tabela para os dados da simulação dos seminários

Disco	$f\ (Hz)$	$m\ (kg)$	$r\ (m)$	$\omega = 2\pi f\ (rad/s)$	$I = \frac{mr^2}{2}\ (kgm^2)$	$K = \frac{I\omega^2}{2}\ (J)$
A						
B						
C						
D						

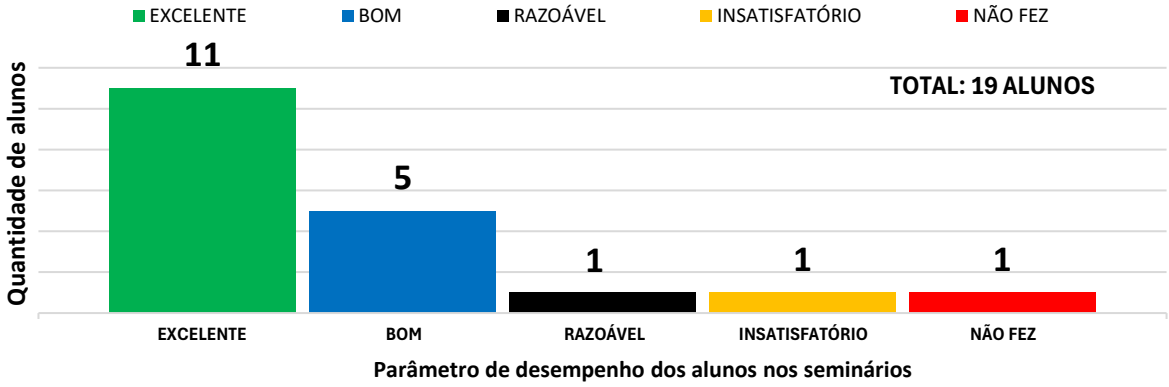
Tabela para cálculo da velocidade angular, momento de inércia e energia angular cinética dos discos homogêneos

PASSO 8: Por fim, reproduza a simulação e confira os valores das velocidades angulares, momentos de inércia e energia angular cinética de cada disco clicando com o botão direito sobre cada um deles e conferindo essas informações como mostra as figuras a seguir.

Fonte: Elaborada pelos autores, pertencente ao Manual de Laboratório Digital.

Para cumprir o tempo destinado às apresentações, que foram dois encontros, totalizando quatro (4) aulas de cinquenta (50) minutos, cada aluno fez a simulação apenas para um disco, inserindo os valores à sua escolha. A Fig. (81) a seguir mostra o gráfico com o desempenho dos alunos que fizeram as suas apresentações no encontro analisado nesta seção.

Figura 81 - Gráfico de desempenho nos seminários do encontro 6



Fonte: Elaborada pelos autores.

Pelo gráfico da última figura, observamos que dos alunos presentes no dia foram selecionados para fazerem as suas apresentações, o que correspondeu a três grupos, sendo dois deles compostos por seis componentes e o outro por sete. Em relação aos parâmetros de desempenho, seus significados estão descritos na Tab. (22) a seguir.

Tabela 22 - Parâmetro de desempenho individual dos alunos nos seminários

PARÂMETRO	SIGNIFICADO
EXCELENTE	Construiu a simulação sem ajuda e acertou os cálculos
BOM	Construiu a simulação sem ajuda e acertou parcialmente os cálculos
RAZOÁVEL	Precisou de ajuda para construir a simulação e/ou realizar os cálculos
INSATISFATÓRIO	Não conseguiu realizar a simulação
NÃO FEZ	Se recusou a apresentar o trabalho

Fonte: Elaborada pelos autores.

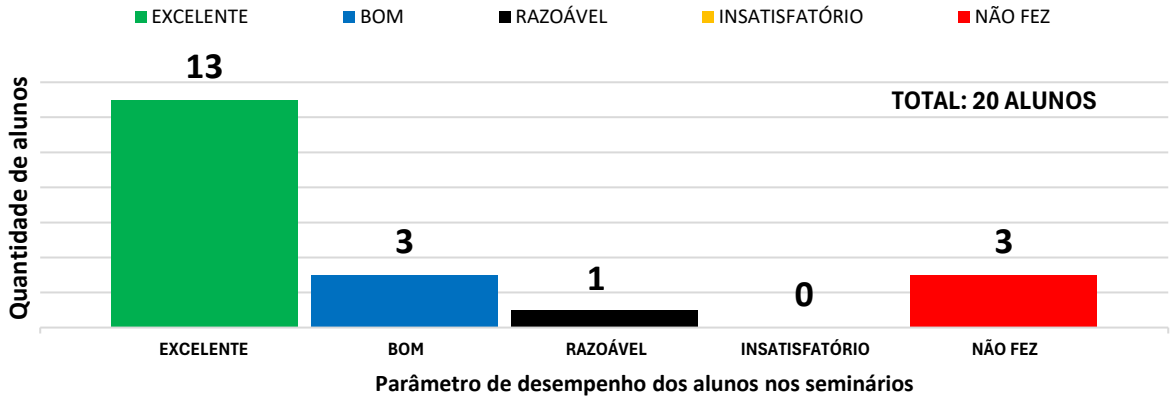
Portanto, percebe-se que, com a ajuda do Manual de Laboratório Virtual, usado para minimizar as dificuldades enfrentadas devido à falta de infraestrutura da escola, como também do empenho dos estudantes durante as aulas no desenvolvimento da sequência didática, os alunos conseguiram usar o *Algodoo*, em média, com muita precisão e obter os resultados esperados para o problema proposto, pois apenas dois alunos não realizaram satisfatoriamente a atividade.

7.4.7 Análise e Discussões do Encontro 7

Continuando as apresentações dos seminários, as aulas referentes ao sétimo encontro, pelos mesmos motivos descritos e analisados do encontro anterior relacionados aos problemas estruturais da escola, deram-se novamente na sala de vídeo e ocorreu no dia 22/07/2024, estando presentes, desta vez, 90% dos alunos (36 de 40). A pequena baixa no número de estudantes na aula se deu, muito provavelmente, pelo fato de metade dos que estiveram na no encontro anterior já tinham realizado as suas apresentações, pois, justamente, três deles foram os que estavam ausentes. Além disso, o aluno que apresentou o atestado na aula anterior se fez presente e apresentou o seu trabalho em um dos grupos que faltava fazer a sua apresentação.

Como, nesta seção, estamos tratando de um prosseguimento da análise das apresentações, vamos nos limitar apenas a tratar do desempenho dos discentes que ficaram por apresentar seus trabalhos nesse encontro e fazer uma breve comparação com a atuação dos estudantes no encontro anterior. Dito isso, a Fig. (82) seguir mostra a desenvoltura dos alunos na realização da atividade proposta.

Figura 82 - Gráfico de desempenho nos seminários do encontro 7



Fonte: Elaborada pelos autores.

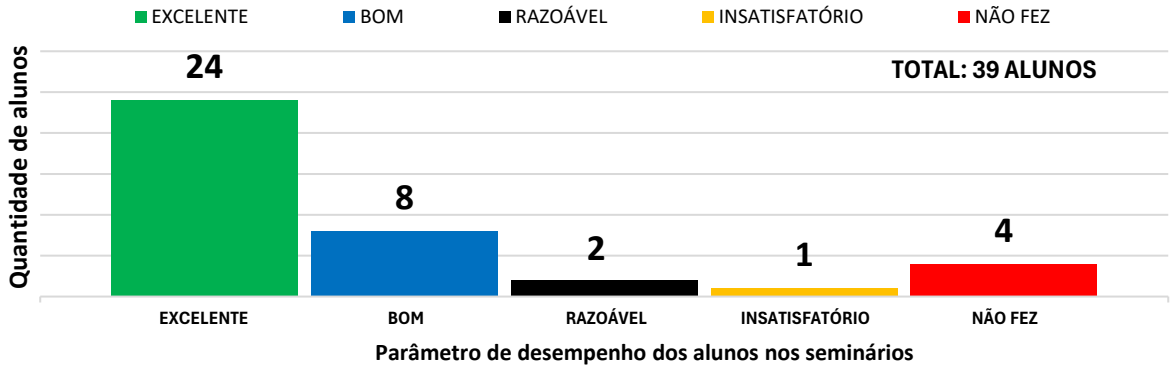
Observamos, mais uma vez, que os alunos obtiveram plena desenvoltura na execução das atividades, pois apenas três alunos não apresentaram os seus trabalhos pelo simples fato de serem extremamente tímidos. Aliás, um dos grandes fatores que prejudica a aprendizagem do aluno é justamente a timidez, que faz com que o aluno se sinta, muitas vezes, incapaz de realizar suas atividades com receio do julgamento do outro. Nesse sentido, Cunha, Schindhelm e Machado (2023, p. 2) tratam esse problema, no ambiente escolar, como algo que traz sérios prejuízos na desenvoltura do estudante quando relatam que

> Uma grande dificuldade para pessoas tímidas é falar em público, porque elas se sentem amedrontadas e sujeitas às críticas de outros e, por isso, tendem a apresentar sintomas somáticos, associados à ansiedade e a sentimentos de medo, pavor, dentre outros. Esses sintomas cognitivos costumam estar relacionados com a antecipação da avaliação negativa pelo outro em situações sociais e, diante disso, costumam apresentar comportamentos de inibição, retraimento e evitamento de situações sociais, dentre elas as apresentações em público.

No entanto, eles foram observados e avaliados não apenas em caráter coletivo ou de uma simples exposição oral, mas também nas suas atividades realizadas individualmente durante os trabalhos realizados no encontro.

Fazendo um apanhado geral, a Fig. (83) traz o gráfico com a totalidade dos rendimentos obtidos pelos alunos nos dois encontros destinados aos seminários.

Figura 83 - Gráfico geral de desempenho nos seminários dos encontros 6 e 7



Fonte: Elaborada pelos autores.

Ao todo, apenas um aluno matriculado na turma não compareceu às aulas para apresentar o seu trabalho. Esse estudante se trata do que comumente não frequenta à escola. Assim, podemos chegar à conclusão de que, além da tarefa proposta ter atingido praticamente a totalidade dos alunos, o uso de uma ferramenta computacional voltada para fins educacionais não só desperta o interesse do aluno pelo dinamismo das aulas, mas também proporciona uma melhoria significativa no seu desenvolvimento cognitivo a respeito da temática abordada (Araújo *et al*., 2021).

7.4.8 Análise e Discussões do Encontro 8

Buscando coletar indícios de aprendizagem, com o objetivo de verificar se a SD foi

exitosa, por meio de avaliação do desempenho dos discentes em forma de um Pós-Teste, que busque fornecer evidências de aprendizagem significativa (Moreira, 2011), alinhada, assim, com o passo oito (8) de uma UEPS, o oitavo encontro ocorreu no dia 29/07/2024 e contou com a ausência de apenas dois (2) alunos matriculados na turma, ou seja, 95% se fizeram presentes (38 dos 40). Um desses alunos, como já mencionado, não vem frequentando as aulas. Já o outro, faltou por problemas com o transporte escolar.

O Pós-Teste foi composto por dez (10) questões relacionadas aos conteúdos de Física trabalhados durante a aplicação da SD, sendo metade delas cobrando apenas conceitos e o restante trazendo também a exigência de cálculos. As perguntas e as expectativas de respostas dessa atividade avaliativa estão descritas a seguir:

- **QUESTÃO 01 – Explique a diferença entre energia cinética de rotação e energia cinética de translação.** *Expectativa de resposta: A energia cinética de rotação está relacionada ao movimento de rotação de um corpo, enquanto a energia cinética de translação está relacionada ao movimento de translação de um corpo. A energia cinética de rotação depende do momento de inércia de um corpo em relação ao seu eixo de giro e da sua velocidade angular, enquanto a energia cinética de translação depende da massa do corpo e da sua velocidade linear, chamada, nesse caso, de velocidade do Centro de Massa.*

- **QUESTÃO 02 – Defina momento de inércia. Qual a influência que essa grandeza possui no movimento de giro de um corpo?** *Expectativa de resposta: O momento de inércia é a propriedade que um corpo ou uma partícula possui de resistir a variação da sua velocidade angular em relação a um eixo, ou seja, ela dificulta que esse corpo ou essa partícula gire em torno desse eixo de rotação. Ele depende da massa do corpo ou da partícula, da distribuição de massa (no caso do corpo rígido) e do eixo de rotação.*

- **QUESTÃO 03 – O que significa o centro de massa de um corpo rígido?** *Expectativa de resposta: O ponto de um corpo, ou um sistema de corpos, onde se pode considerar que toda a concentração de massa se concentra sobre ele é chamado de centro de massa CM, comumente chamado de centro de gravidade.*

- **QUESTÃO 04 – Existe alguma diferença em calcular o momento de inércia de uma partícula e de um corpo rígido com distribuição de massa contínua?** *Expectativa de resposta: Sim, pois para calcular o momento de inércia de uma partícula basta apenas multiplicar sua massa pelo quadrado da sua distância para o eixo de rotação, ou seja, o*

raio da trajetória circular. Já para calcular o momento de inércia de um corpo rígido com distribuição contínua de massa em relação a um eixo, devemos levar em consideração essa distribuição de massa. Assim, corpos diferentes possuem maneiras diferentes de se calcular seu momento de inércia em relação a um eixo.

- **QUESTÃO 05 – Um disco homogêneo de metal de massa 2 kg e raio 0,5 m gira em torno de seu eixo central com velocidade angular de 10 rad/s. Sabendo que o momento de inércia de um disco homogêneo pode ser obtido usando a equação $\boldsymbol{I = \frac{MR^2}{2}}$, calcule a energia cinética de rotação do disco.** *Expectativa de resposta:* $K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\omega^2 = \frac{2\,.0{,}5^2.10^2}{4} = \frac{2\,.0{,}25\,.100}{4} = \frac{50}{4} = 12{,}5\,J.$

- **QUESTÃO 06 – Qual é a energia cinética de rotação de uma partícula contida em um corpo rígido com um momento de inércia de 0,2 kg . m² em relação ao seu eixo de rotação, quando ela gira com uma velocidade angular de 8 rad/s?** *Expectativa de resposta:* $K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\,.0{,}2\,.\ 8^2 = 0{,}5\,.0{,}2\,.64 = 6{,}4\,J.$

- **QUESTÃO 07 – Um ponto material de massa 0,2 kg gira em torno de um eixo perpendicular a ele. A distância entre o eixo de rotação e o ponto material é de 0,6 metros. Determine o momento de inércia deste ponto material em relação ao eixo de rotação.** *Expectativa de resposta:* $I = mr^2 = \ 0{,}2\,.\ 0{,}6^2 = 0{,}2\,.0{,}36 = 0{,}072\ kg.m^2.$

- **QUESTÃO 08 – O momento de inercia de um corpo rígido, de massa 5 kg, em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa, é de 0,08 kg.m². Use o teorema dos eixos paralelos ($\boldsymbol{I_P = I_{CM} + Mh^2}$) e calcule o momento de inercia em relação a um ponto P desse corpo por onde passa outro eixo de rotação, distante 0,15 metro perpendicularmente do eixo que passa pelo centro de massa?** *Expectativa de resposta:* $I_P = I_{CM} + Mh^2 = 0{,}08 + 5\,.0{,}15^2 = 0{,}08 + 5\,.0{,}0225 = 0{,}08 + 0{,}1125 = 0{,}1925\ kg.m^2.$

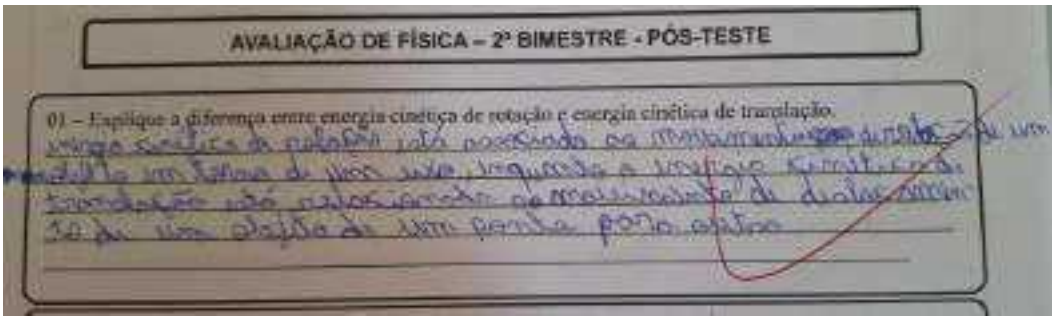
- **QUESTÃO 09 – Um veículo está em movimento retilíneo uniforme com velocidade linear escalar de 30 m/s. Suas rodas, homogêneas e idênticas, cada uma com massa $\boldsymbol{M = 12\ kg}$ e raio $\boldsymbol{R = 20\ cm = 0,2\ m}$, por consequência do movimento linear do veículo, possuem velocidade angular constante e seus momentos de inércia podem ser**

calculados por meio da equação $\left(I = \frac{1}{2}MR^2\right)$, em que M é a massa da roda e R, o seu raio. De acordo com o enunciado, determine, para uma das rodas do veículo: a) a sua velocidade do centro de massa; b) a sua velocidade angular; c) o seu momento de inércia; d) a sua energia cinética de rotação; e) a sua energia cinética de translação; f) a sua energia cinética de rolamento. *Expectativa de resposta: Letra a: A roda e o carro se movimentam em linha reta com a mesma velocidade, ou seja,* $V_{CM} = 30\ m/s$*; Letra b:* $V_{CM} = \omega R \rightarrow\ \omega = \frac{V_{CM}}{R} = \frac{30}{0{,}2} = \frac{300}{2} = 150\ rad/s$*; Letra c:* $I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}\ .12\ .0{,}2^2 = 0{,}5\ .12\ .0{,}04 = 0{,}24\ kg.m^2$*; Letra d:* $K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}.0{,}24\ .150^2 = 0{,}5\ .0{,}24\ .22500 = 2700\ J$*; Letra e:* $K = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 = \frac{1}{2}.12\ .30^2 = 0{,}5\ .12\ .900 = 5400\ J$*; Letra f:* $K = K_{rotação} + K_{translação} = 2700 + 5400 = 8100\ J$.

- **QUESTÃO 10 – Em seu dia a dia, quais objetos ou situações você observa que envolvem os conceitos de energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento? Faça uma breve descrição da sua resposta e explique como esses conceitos se aplicam na prática.** *Expectativa de resposta: Nessa questão, o aluno deve demonstrar compreensão dos conceitos de energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento, relacionando-os com exemplos concretos do cotidiano. A resposta pode incluir, entre outros: objetos que giram em torno de um eixo, como rodas, brinquedos, ventiladores... O aluno deve explicar que a energia cinética de rotação está relacionada à velocidade de rotação desses objetos e como sua massa está distribuída em um corpo. Objetos que rolam sem escorregar, como bolas, carrinhos... O aluno deve explicar que a energia cinética de rolamento é composta pela energia cinética de rotação do objeto em torno do seu eixo e pela energia cinética de translação do seu centro de massa.*

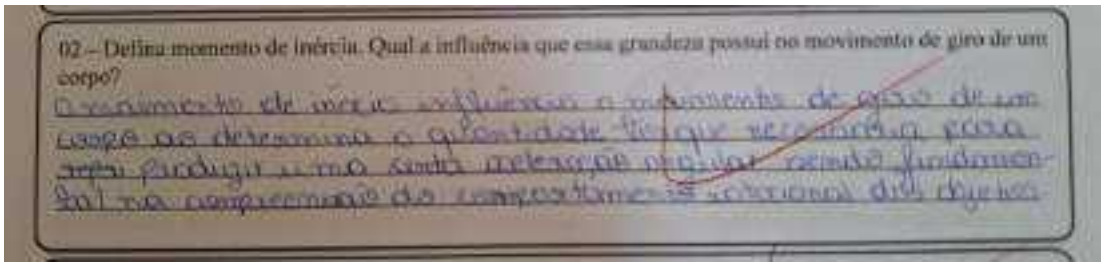
As figuras a seguir mostram algumas respostas de alunos referentes ao Pós-Teste.

Figura 84 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 01 do Pós-Teste



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Figura 85 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 02 do Pós-Teste



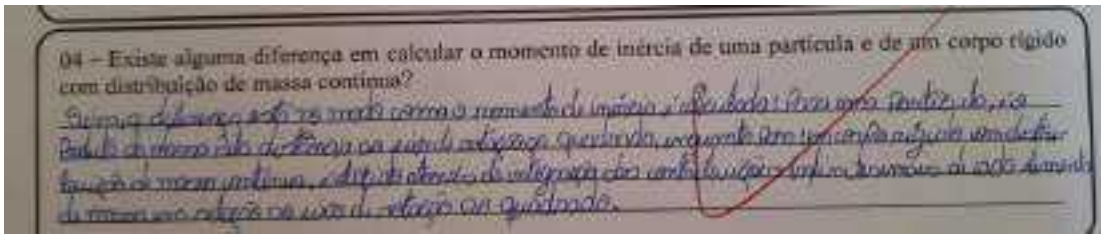
Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Figura 86 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 03 do Pós-Teste



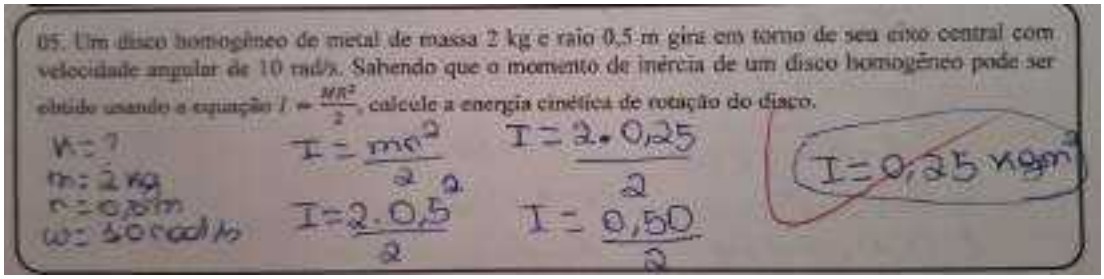
Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Figura 87 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 04 do Pós-Teste



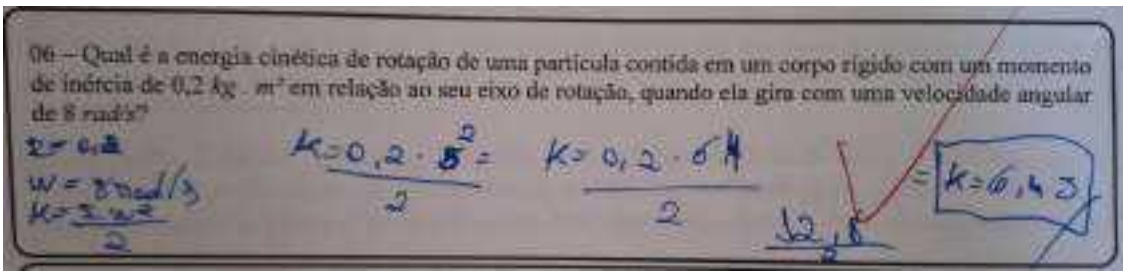
Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Figura 88 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 05 do Pós-Teste



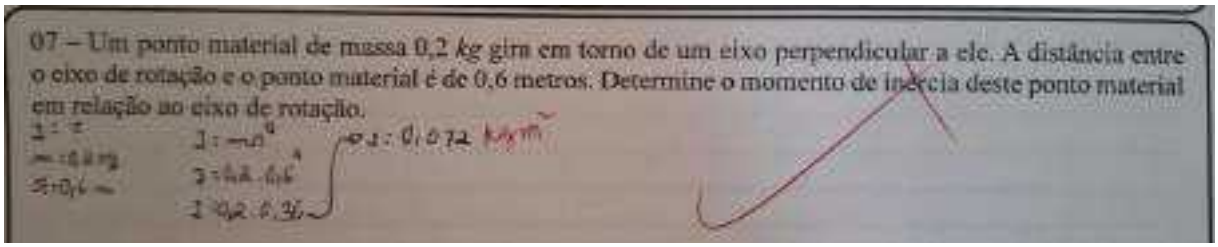
Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Figura 89 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 06 do Pós-Teste



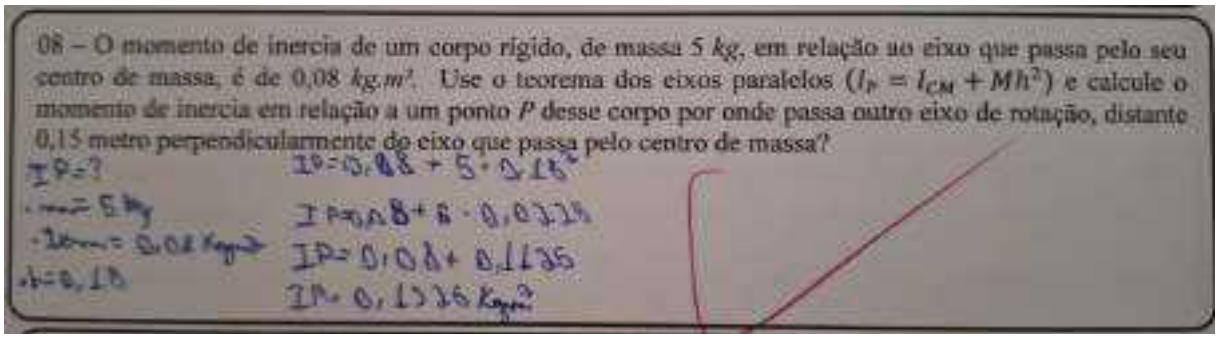
Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Figura 90 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 07 do Pós-Teste



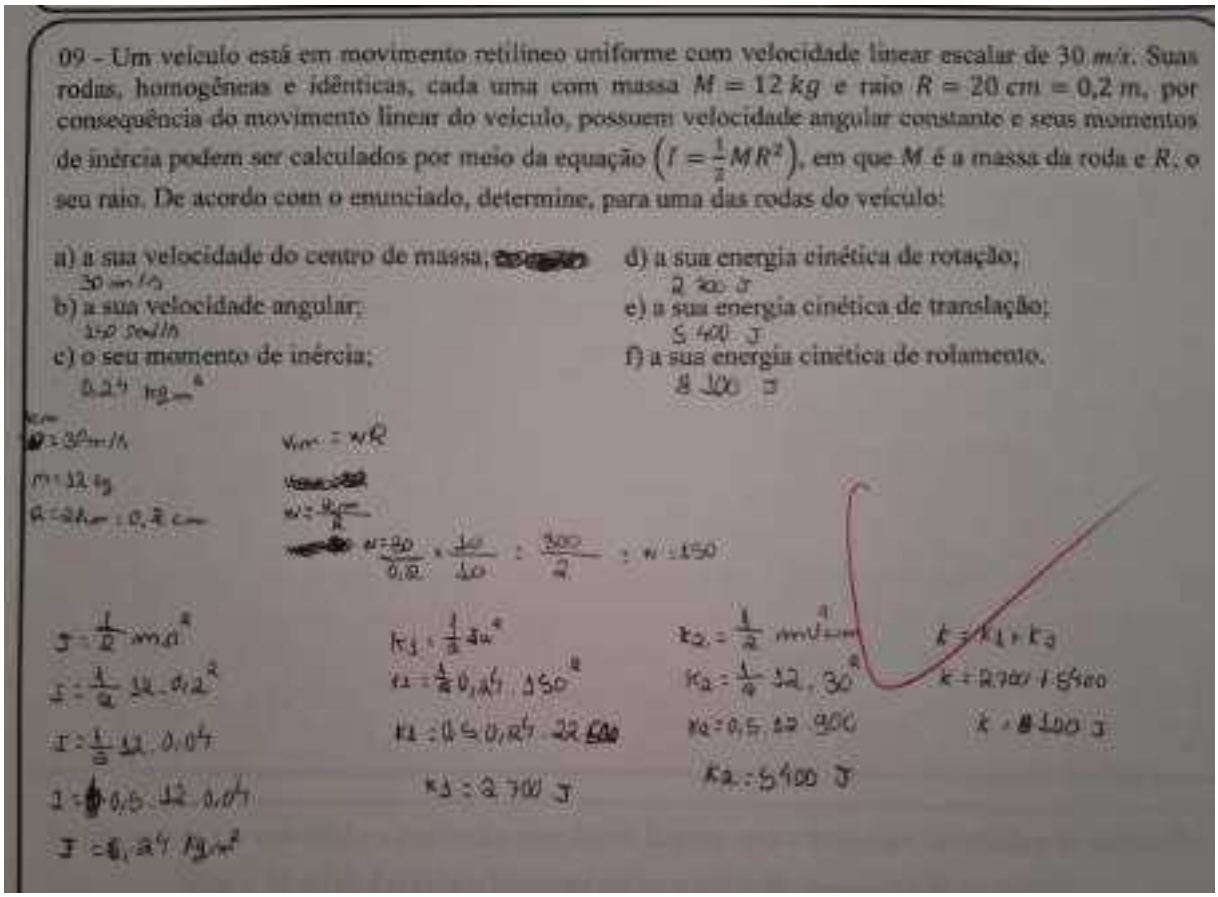
Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Figura 91 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 08 do Pós-Teste



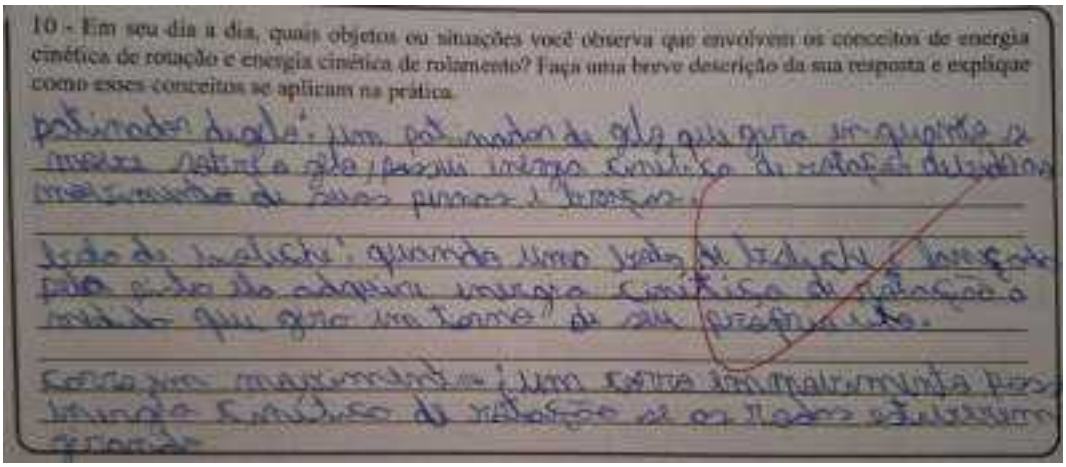
Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Figura 92 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 09 do Pós-Teste



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Figura 93 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 10 do Pós-Teste

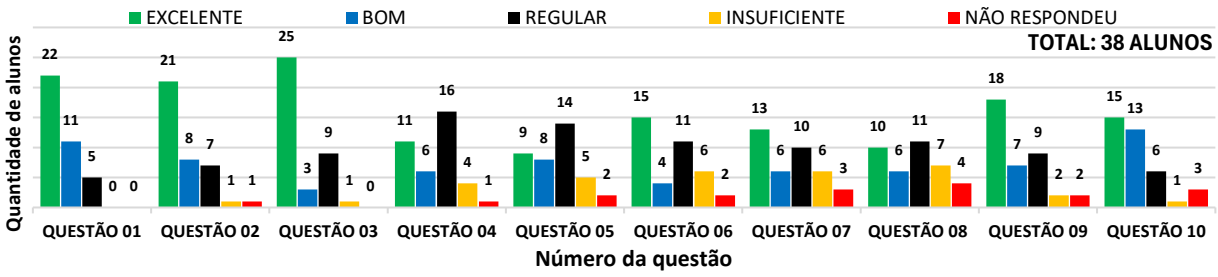


Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Pelas respostas dadas pelos alunos contidas nas figuras acima, observa-se que, de fato, houve uma boa argumentação em todas as respostas do questionário. Logicamente, que uma única resposta por questão não retrata a totalidade, mas nos traz evidências de que existiram indícios de aprendizagem significativas nos discentes no final do processo didático, uma vez que souberam tratar as situações levantadas com relevante arguição (Moreira, 2011).

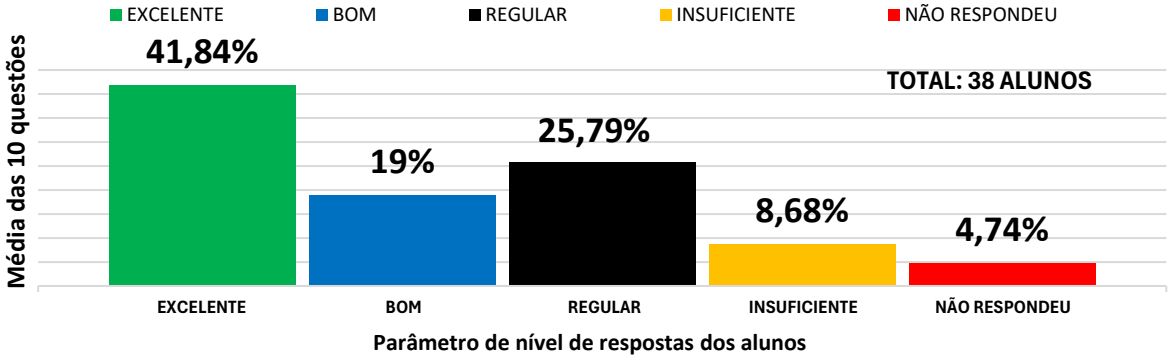
Em relação à totalidade, a Fig. (94) e a Fig. (95) mostram os parâmetros quantitativos e médias percentuais das respostas desses estudantes, respectivamente.

Figura 94 - Gráfico dos resultados do Pós-Teste



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 95 - Gráfico da média percentual dos resultados do Pós-Teste



Fonte: Elaborada pelos autores.

Diferentemente dos resultados dos Pré-Testes, os resultados, como esperado, mudaram totalmente os parâmetros. Isso se deu, obviamente, pelo fato de os alunos terem conseguido ancorar novos saberes a partir dos seus conhecimentos prévios, que, em função dos planejamentos de aula, foram bem estruturados nas suas estruturas cognitivas (Ausubel, 2003; Moreira e Masini, 1982). Além disso, Schneider e Goldmeyer (2020) reforçam que a arte de argumentar bem depende dos conhecimentos adquiridos pelos discentes de maneira gradativa durante o seu processo de aprendizagem.

A Tab. (23) a seguir mostra os dados percentuais dos resultados dos questionários referentes ao recolhimento dessas informações quanto aos conhecimentos pré-existentes dos alunos como também o que buscou coletar os seus indícios de aprendizagem, levando em consideração a equivalência de parâmetros, como o fator "DOMINA O CONTEÚDO" dos Pré-Teste equivalendo-se ao "EXCELENTE" do Pós-Teste, por exemplo.

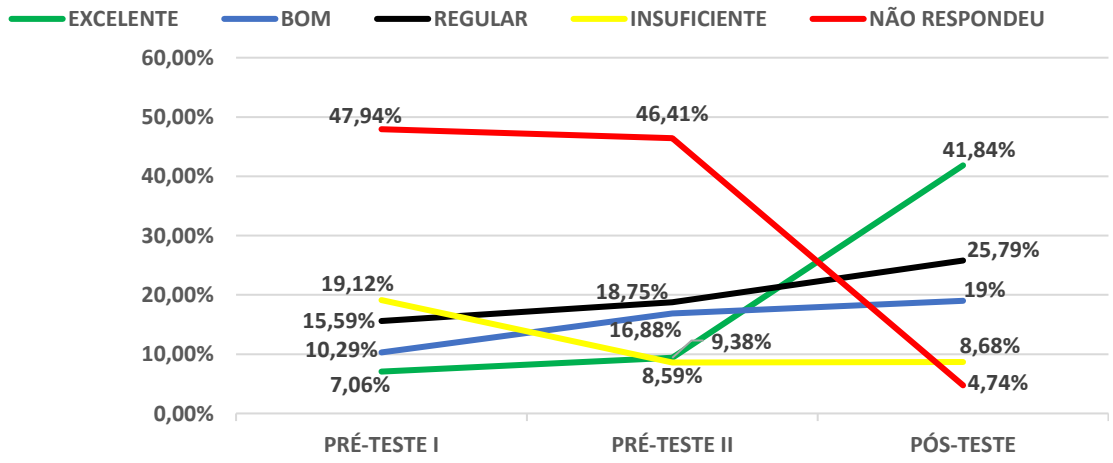
Tabela 23 - Resultados dos Pré-Testes e Pós-Teste

PARÂMETROS	PRÉ-TESTE I (%)	PRÉ-TESTE II (%)	PÓS-TESTE (%)
EXCELENTE	7,06	9,38	41,84
BOM	10,29	16,88	19
REGULAR	15,59	18,75	25,79
INSUFICIENTE	19,12	8,59	8,68
NÃO RESPONDEU	47,94	46,41	4,74

Fonte: Elaborada pelos autores.

O gráfico da Fig. (96) representa a evolução, no tempo, dos parâmetros de desempenho dos alunos referente aos questionários de conhecimento.

Figura 96 - Gráfico da evolução temporal de aprendizagem



Fonte: Elaborada pelos autores.

De acordo com os resultados, percebe-se, nitidamente, o aumento significativo do parâmetro de domínio do conteúdo e a devida queda, também acentuada, das ausências de respostas. A variação desses parâmetros era esperada devido a todas as aulas destinadas a promover o aprendizado do estudante, inclusive fazendo uso de recursos computacionais (Araújo *et al.*, 2021).

Além do mais, essa grande evolução nos parâmetros revela que houve, de fato, indícios de aprendizagem, tornando, assim, a SD exitosa, fazendo com que os alunos, inclusive, conseguissem responder os itens do Pós-Teste, em média, com boa argumentação, sabendo, inclusive, relacionar o conteúdo abordado com situações do seu cotidiano (Moreira, 2011, 2012).

7.4.9 Análise e Discussões do Encontro 9

Para concluir a aplicação do produto educacional e a devida sequência didática, que foi elaborada para essa finalidade, chegamos às discussões dos resultados do nono e último encontro. Ocorridas no dia 05/08/2024, com a presença de 95% da turma (38 dos 40 matriculados), as aulas desse encontro foram destinadas a dar um retorno aos alunos quanto aos seus desempenhos na avaliação do encontro anterior, bem como a aplicação de um novo questionário, que, dessa vez, foi destinado a promover uma autoavaliação dos discentes e uma pesquisa final de opinião para reforçar se a SD obteve o êxito que foi concluído na atividade avaliativa final.

A breve discussão antes do início da resolução do Pós-Teste nos trouxe a convicção de que uma maneira ativa que busque potencializar o aprendizado da discente melhora a sua autoestima, influenciando, incisivamente, no seu interesse pela disciplina e no seu consequente aprendizado (Horta, 2022). Isso também se confirmou durante a correção da atividade avaliativa, onde foi possível perceber os alunos comemorando os seus desempenhos na prova.

Em relação ao questionário final, este foi dividido em três partes: a primeira foi composta onze questões, que buscou saber como o estudante se autoavalia em relação aos seus conhecimentos prévios antes do início da SD, ao seu aprendizado durante o processo e as suas possíveis sugestões de melhoria. No tocante à segunda parte, o estudante pôde fazer uma avaliação das aulas, dando a sua opinião em relação à clareza das explicações e à utilização do livro digital e do *Algodoo* durante as atividades realizadas. Por fim, na terceira parte do questionário, o aluno teve a oportunidade de lhe atribuir um conceito final de autoavaliação.

Buscando a maior sinceridade dos alunos e fidelidade nas suas respostas, foi avisado,

inicialmente, que eles poderiam não se identificar. Mesmo assim, apenas nove (9) alunos optaram pela não identificação nos seus questionários. Dito isso, não se pode ter uma certeza contundente se as respostas desses estudantes puderam retratar fielmente a realidade, pois os alunos poderiam, simplesmente, querer exaltar os métodos utilizados durante os encontros, a fim de procurar ser bem avaliado pelo professor (Oliveira, Falcão, 2023). No entanto, os resultados do Pós-Teste estabeleceram que houve uma melhoria significativa no aprendizado do aluno.

Os seis primeiros itens do questionário foram compostos por questões objetivas, as quais estão discriminadas a seguir:

- **1 – Em sua opinião, quais eram seus conhecimentos prévios sobre energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento antes de iniciar a sequência didática?** ***A)*** *Não tinha nenhum conhecimento sobre esses conceitos.* ***B)*** *Tinha conhecimento superficial sobre alguns dos conceitos, mas precisava de aprofundamento.* ***C)*** *Tinha conhecimento básico sobre os conceitos e suas aplicações.* ***D)*** *Tinha bom conhecimento sobre os conceitos e suas aplicações.* ***E)*** *Tinha ótimo conhecimento sobre os conceitos e suas aplicações.*

- **2 – O que você achou do questionário inicial utilizado para verificar seus conhecimentos prévios?** ***A)*** *Não foi útil para avaliar meus conhecimentos.* ***B)*** *Foi um pouco útil, mas poderia ter sido mais abrangente.* ***C)*** *Foi útil para avaliar meus conhecimentos e identificar pontos de aprimoramento.* ***D)*** *Foi muito útil para avaliar meus conhecimentos e identificar pontos de aprimoramento.* ***E)*** *Foi extremamente útil para avaliar meus conhecimentos e identificar pontos de aprimoramento.*

- **3 – Qual foi a sua percepção sobre a clareza e a organização das aulas expositivas (quadro e slides)?** ***A)*** *As aulas foram confusas e desorganizadas.* ***B)*** *As aulas foram um pouco confusas e desorganizadas.* ***C)*** *As aulas foram claras e organizadas, mas com alguns pontos que poderiam ser melhorados.* ***D)*** *As aulas foram muito claras e organizadas.* ***E)*** *As aulas foram extremamente claras e organizadas.*

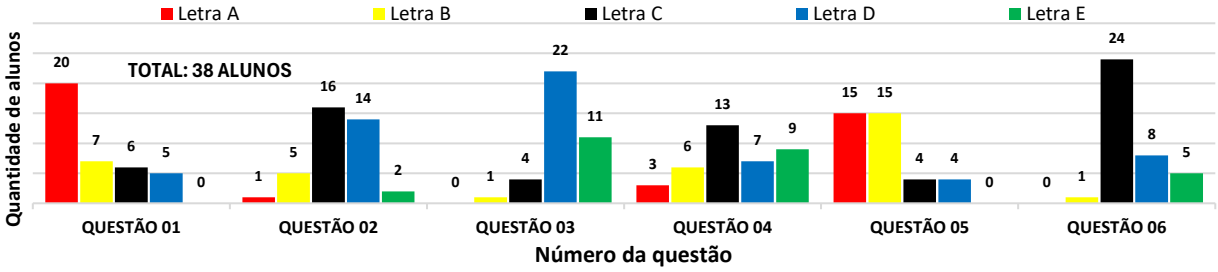
- **4 – Como você avalia a efetividade do uso do *software Algodoo* para o aprendizado dos conceitos?** ***A)*** *O uso do Algodoo não foi útil para o meu aprendizado.* ***B)*** *O uso do Algodoo foi um pouco útil, mas poderia ter sido mais explorado.* ***C)*** *O uso do Algodoo foi útil para o meu aprendizado, mas com algumas limitações.* ***D)*** *O uso do Algodoo foi muito útil para o meu aprendizado.* ***E)*** *O uso do Algodoo foi extremamente útil para o meu aprendizado.*

- **5 – Quanto você se sente confiante na aplicação dos conceitos de energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento após a sequência didática?** ***A)*** *Não me sinto confiante na aplicação dos conceitos.* ***B)*** *Me sinto um pouco confiante na aplicação dos conceitos.* ***C)*** *Me sinto confiante na aplicação dos conceitos básicos.* ***D)*** *Me sinto muito confiante na aplicação dos conceitos.* ***E)*** *Me sinto extremamente confiante na aplicação dos conceitos.*

- **6 – O que você achou da avaliação final da sequência didática?** ***A)*** *A avaliação não foi justa e não avaliou meus conhecimentos adequadamente.* ***B)*** *A avaliação foi um pouco injusta e poderia ter sido mais abrangente.* ***C)*** *A avaliação foi justa e avaliou meus conhecimentos de forma adequada.* ***D)*** *A avaliação foi muito justa e avaliou meus conhecimentos de forma abrangente.* ***E)*** *A avaliação foi extremamente justa e avaliou meus conhecimentos de forma abrangente e precisa.*

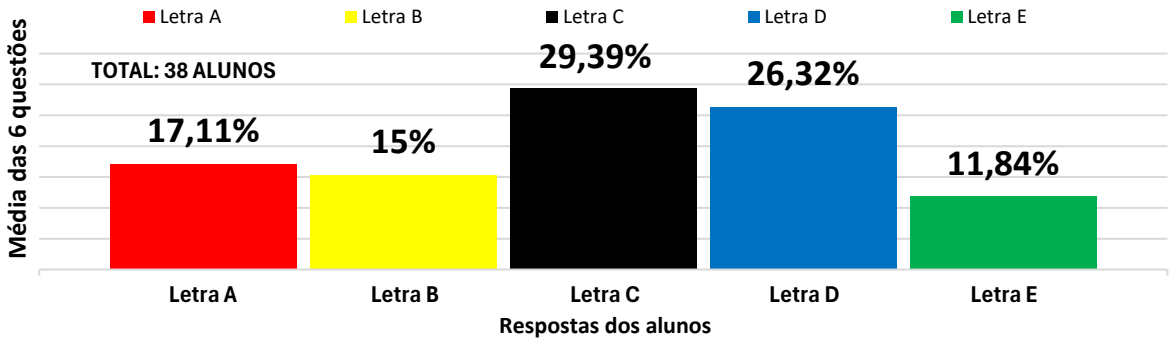
A Fig. (97) e a Fig. (98) trazem os gráficos do quantitativo de respostas dos alunos referentes a esses questionamentos e suas as médias, respectivamente.

Figura 97 - Gráfico das respostas objetivas do Questionário Final



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 98 - Gráfico da média das respostas objetivas do Questionário Final



Fonte: Elaborada pelos autores.

De acordo com os resultados, quando perguntado sobre os conhecimentos prévios dos

alunos, vinte (20) dos trinta e oito (38) alunos responderam que não possuíam conhecimento algum sobre os conceitos básicos cobrados nos testes de sondagem, o que reforça, mais uma vez, o grande número de perguntas sem respostas nos Pré-Testes. Por causa dessa ausência de conhecimento, 79% dos discentes (30 dos 38), quando perguntados do que acharam dos testes iniciais, responderam que eles foram úteis ou muito úteis para avaliar os seus conhecimentos prévios e identificar pontos de aprimoramento.

No tocante à clareza e organização das aulas expositivas, 86,8% dos estudantes (33 dos 40) ou as acharam muito claras e organizadas ou extremamente claras e organizadas, o que reflete, em teoria, que buscou-se planejá-las e executá-las de modo a trabalhar na eliminação das lacunas existentes no conhecimento prévio dos alunos (Moreira; Masini, 1982).

Já em relação ao uso do *Algodoo* como recurso potencializador de aprendizagem, a maioria concorda que o seu uso foi muito importante para o seu aprendizado, apesar de 57,9% dos estudantes (22 dos 38) reconhecerem que houve alguma limitação na sua utilização. Esse relativo desconforto em relação à utilidade do *software* se deu, muito provavelmente, por falta de um laboratório de informática ativo na EEPEMR, pois, apesar da importância de todos os esforços para se adaptar a esse problema estrutural, o uso individual de computadores em um ambiente computacional é de extrema importância para o bom andamento de um projeto como o trabalhado nesta dissertação (Costa, 2021; Freire *et. al.*, 2021).

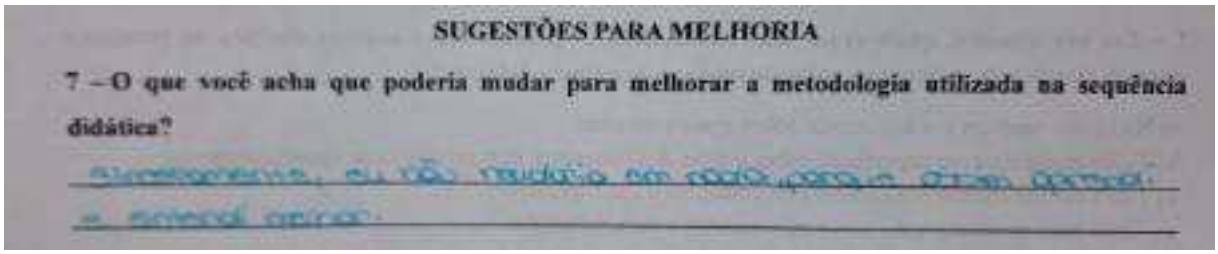
Apesar do bom desempenho na atividade avaliativa final, 79% dos alunos se dizem com pouca ou nenhuma confiança na aplicação dos conceitos sobre as energias cinéticas de rotação e rolamento. Segundo Schneider e Goldmeyer (2020), a arte de argumentar bem e se sentir seguro nesse processo é gradual e leva um certo tempo para seu aperfeiçoamento. Nesse sentido, em relação às respostas dos alunos, ainda que eles tenham se dado muito bem no Pós-Teste, a aprendizagem do conteúdo é muito recente, criando, assim, uma certa desconfiança na aplicação dos seus conceitos.

Em relação ao Pós-teste, 97,4% dos discentes (37 dos 39) disseram que a avaliação final de conhecimento foi justa, muito justa ou extremamente justa, buscando, assim, avaliar os seus conhecimentos adequadamente.

Logo, em média, as respostas positivas em relação a essas seis primeiras questões representaram 67,55%, refletindo em uma boa aceitação pelos alunos, como podemos observar na Fig. (98), a qual representa o gráfico com as médias de respostas dos estudantes referentes a essas perguntas objetivas.

Continuando as análises, as figuras a seguir trazem respostas de alunos referentes aos demais questionamentos do questionário final aplicado na turma.

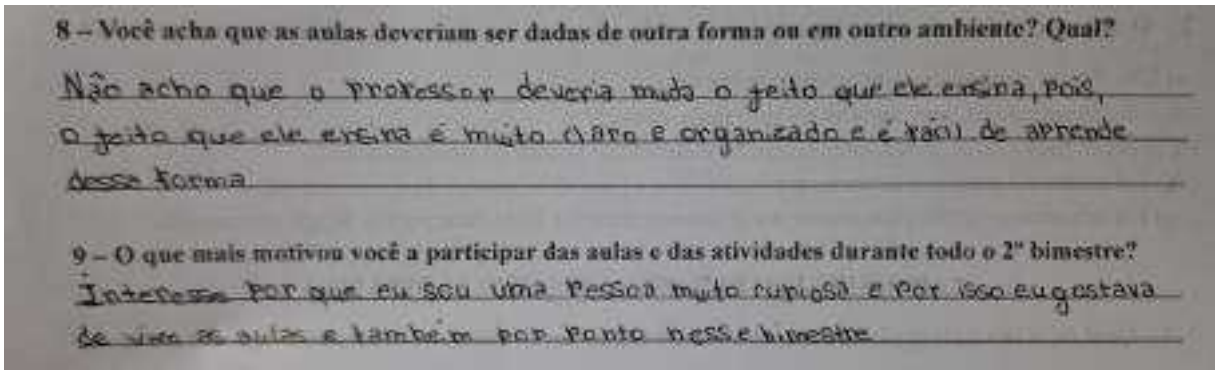
Figura 99 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 7 do Questionário Final


SUGESTÕES PARA MELHORIA

7 – O que você acha que poderia mudar para melhorar a metodologia utilizada na sequência didática?

Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Figura 100 - Resposta de aluno referente às QUESTÕES 7 e 8 do Questionário Final


8 – Você acha que as aulas deveriam ser dadas de outra forma ou em outro ambiente? Qual?

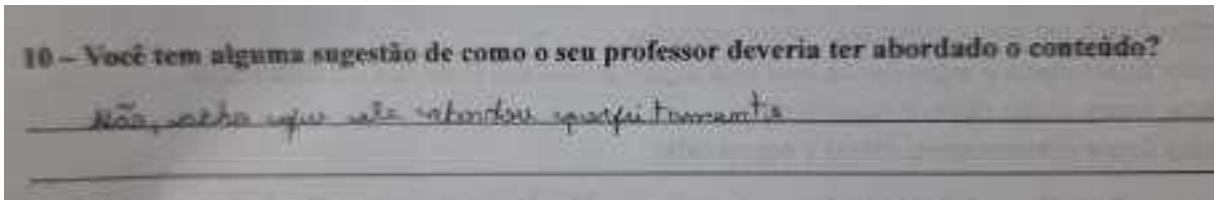
Não acho que o professor deveria mudo o jeito que ele ensina, pois, o jeito que ele ensina é muito claro e organizado e é fácil de aprende dessa forma

9 – O que mais motivou você a participar das aulas e das atividades durante todo o 2° bimestre?

Interesse por que eu sou uma pessoa muito curiosa e por isso eu gostava de vim as aulas e também por ponto nesse bimestre

Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Figura 101 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 10 do Questionário Final


10 – Você tem alguma sugestão de como o seu professor deveria ter abordado o conteúdo?

Não, acho que ele abordou perfeitamente

Fonte: Acervo pessoal dos autores.

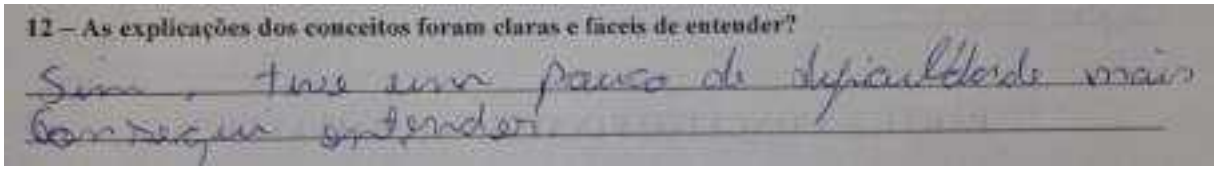
Figura 102 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 11 do Questionário Final


11 – Você tem outros comentários ou sugestões que gostaria de compartilhar?

Não, a aula dele foi boa eu só me estendi um pouco fora de praia

Fonte: Acervo pessoal dos autores.

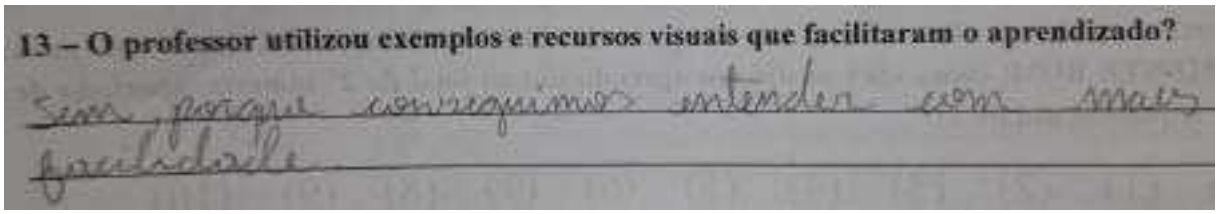
Figura 103 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 12 do Questionário Final


12 – As explicações dos conceitos foram claras e fáceis de entender?

Sim, tive um pouco de dificuldade mais consegui entender

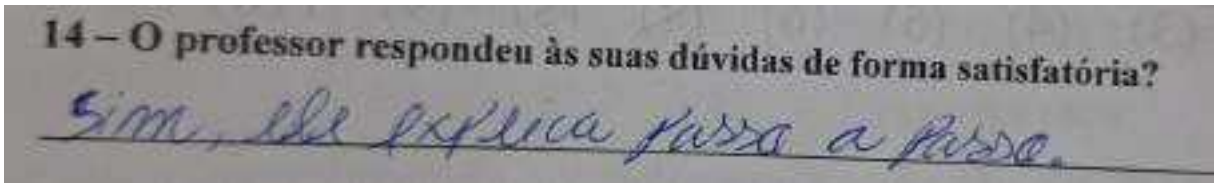
Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Figura 104 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 13 do Questionário Final



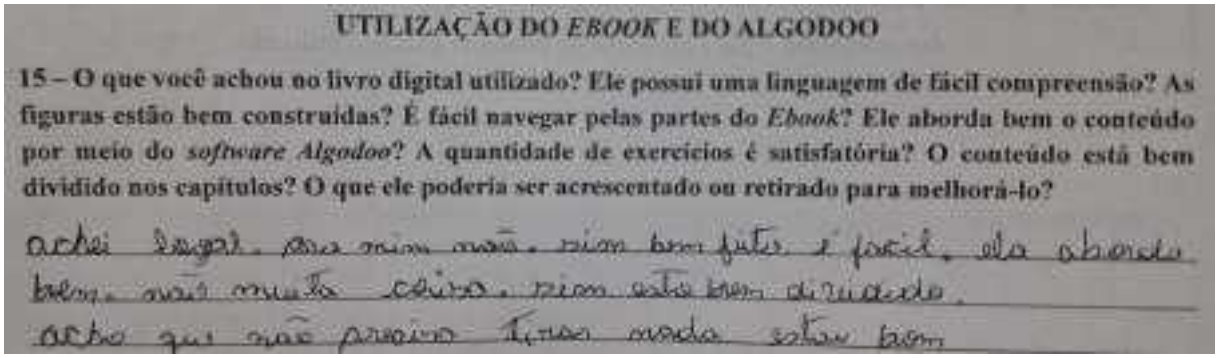
Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Figura 105 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 14 do Questionário Final



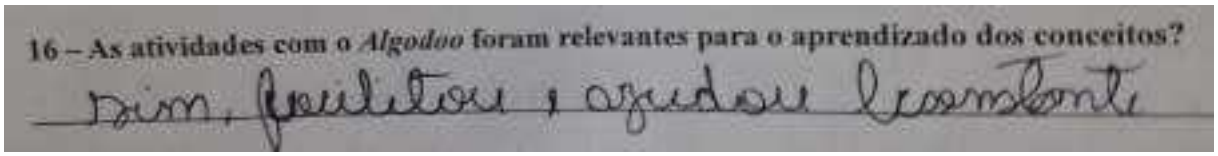
Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Figura 106 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 15 do Questionário Final



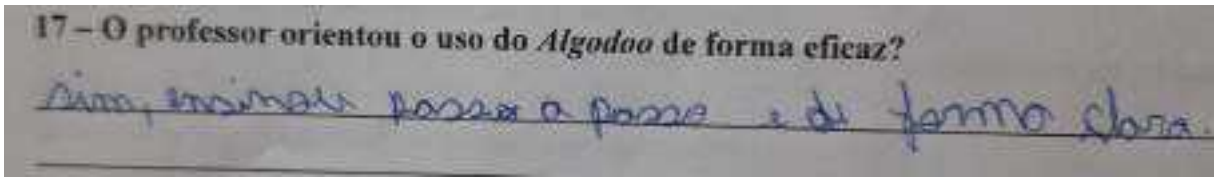
Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Figura 107 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 16 do Questionário Final



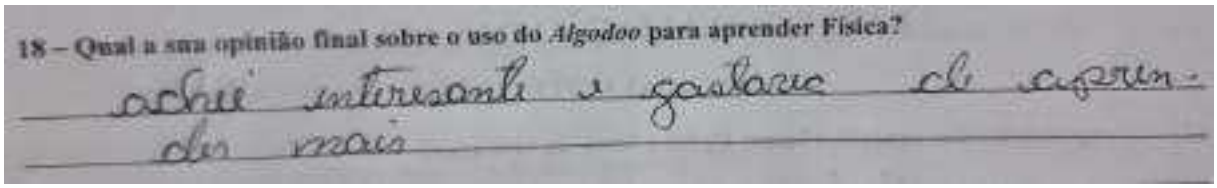
Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Figura 108 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 17 do Questionário Final



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

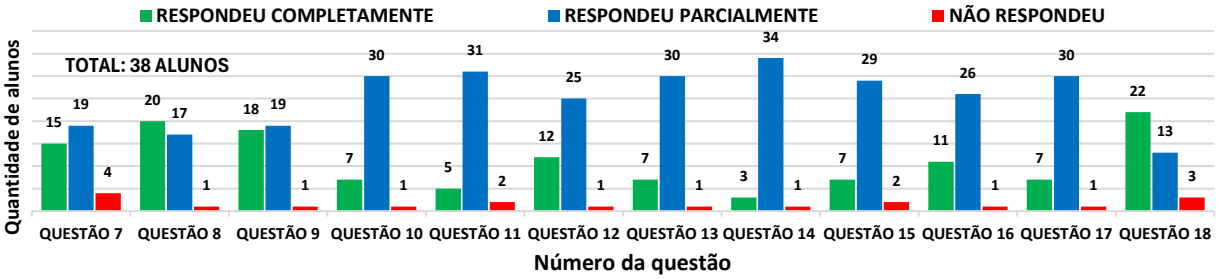
Figura 109 - Resposta de aluno referente à QUESTÃO 18 do Questionário Final



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

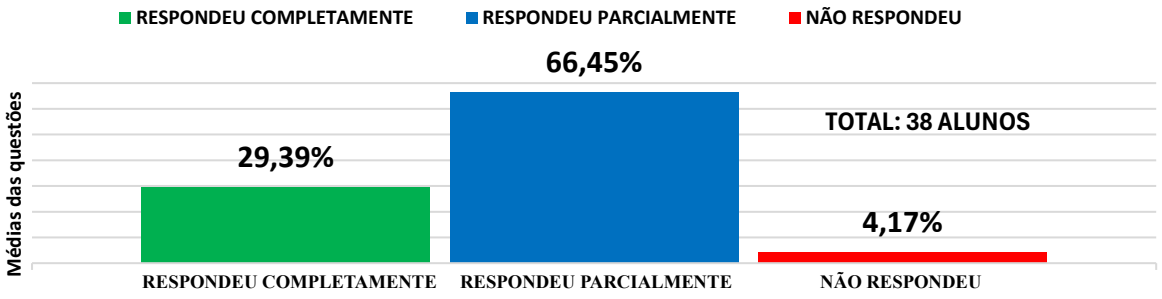
Conforme as figuras acima que fazem referência às perguntas do questionário final de opinião, as figuras (110) e (111) a seguir trazem os gráficos do quantitativo de alunos responderam ou não às perguntas e o percentual das médias desses parâmetros, respectivamente.

Figura 111 - Gráfico do quantitativo de respostas do Questionário Final



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 114 - Gráfico da média de respostas do Questionário Final



Fonte: Elaborada pelos autores.

Observa-se, de acordo com os gráficos, que mais da metade dos discentes deram apenas respostas diretas às perguntas, como “SIM”, “NÃO”, “TALVEZ”, “CONCORDO”, etc. No entanto, um terço deles argumentaram as suas respostas, trazendo um caráter mais qualitativo aos questionamentos. As respostas simples se dão, como já mencionamos várias vezes durantes as análises, pela dificuldade que os estudantes possuem na arte de argumentar, fazendo com que eles, muitas vezes, esquivem-se de um trabalho maior se decidir criar uma resposta mais bem elaborada (Schneider; Goldmeyer, 2020).

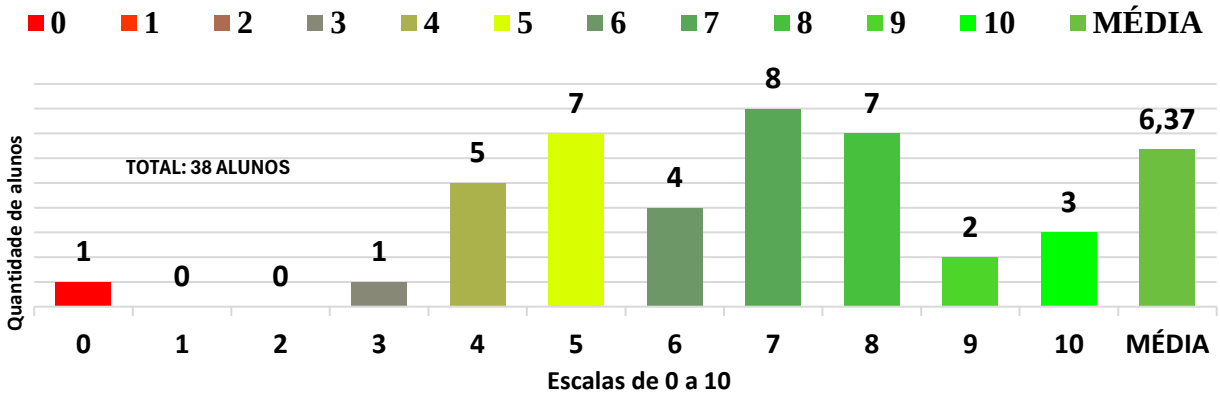
As perguntas versaram a respeito de sugestões de melhoria, da didática do professor durante as aulas, do uso do produto educacional (livro digital) como material didático durante a SD e da importância do uso do *Algodoo* como recurso pedagógico. As respostas dos alunos em relação a esses questionamentos, na grande maioria, se deram de maneira satisfatória no que diz respeito aos recursos e métodos utilizados durante a SD, nos trazendo, novamente, a certeza de que a sua aplicação foi exitosa, conforme busca as Unidades de Ensino Potencialmente Significativa de Marco Antonio Moreira (2011).

O questionário final ainda traz, no seu item dezenove, buscando tornar o estudante também como sujeito da sua aprendizagem (Boeira; Costa; Kinast, 2023), a oportunidade de ele se autoavaliar, quando lhe foi questionado:

- Em uma escala de 0 a 10, sendo 0 para EXTREMAMENTE RUIM e 10 para EXTREMAMENTE BOM, como você avalia seu aprendizado no final do 2º bimestre (período de aplicação da sequência didática)?

A Fig. (112) traz o quantitativo para cada escala de resposta, bem como a média de autoavaliação da turma referente ao seu aprendizado durante o segundo bimestre.

Figura 117 - Gráfico da nota de autoavaliação dos alunos



Fonte: Elaborada pelos autores.

No gráfico da última figura, vimos que a média da autoavaliação foi de 6,37 e, portanto, no final da aplicação da SD, o último item do questionário mostrou que, apesar da turma ter conseguido um bom desempenho na avaliação final, a qual buscou coletar e medir os indícios de aprendizagem dos alunos, eles foram cautelosos ao atribuir-lhe uma nota, pois compreenderam que a assimilação total e a aplicação dos conceitos aprendidos se dão de forma

gradual e que o conhecimento faz parte de uma evolução constante, principalmente quando se usa métodos ativos que busca a melhoria do ensino e o consequente desenvolvimento do aluno (Batista; Cunha, 2021).

7.5 A AVALIAÇÃO DO ALUNO DURANTE A APLICAÇÃO DA SD

Com o propósito de não avaliar o aluno apenas em relação ao seu desempenho nos testes e provas realizadas, e para atender ao passo número sete (7) da construção de uma UEPS, que versa sobre a necessidade de avaliar o aluno de forma contínua, formativa, durante a aplicação da SD, levando em consideração seu desempenho coletivo e individual (Moreira, 2011); a Tab. (24) a seguir lista como foi realizada a atribuição da nota do estudante no final do segundo bimestre.

Tabela 24 - Critérios de avaliação do aluno durante a SD

ATIVIDADE/REGISTRO	**NOTA (Pontos)**
Frequência	1,0
Participação individual e coletiva	3,0
Desempenho na apresentação do seminário	1,0
Realização dos questionários	1,0
Desempenho na Avaliação Final (Pós-Teste)	3,0
Autoavaliação	1,0
	Total: 10,0

Fonte: Elaborada pelos autores.

Apesar de uma nota por si só não retratar a realidade do aprendizado do aluno, medir o desempenho dos discentes tem a sua importância, pois, “importa-nos ter clareza que, no movimento real da operação com resultados da aprendizagem, o primeiro ato do professor tem sido, e necessita ser, a medida, porque é a partir dela, como ponto de partida, que se pode dar os passos seguintes da aferição da aprendizagem” (Luckesi, 1998, p. 73).

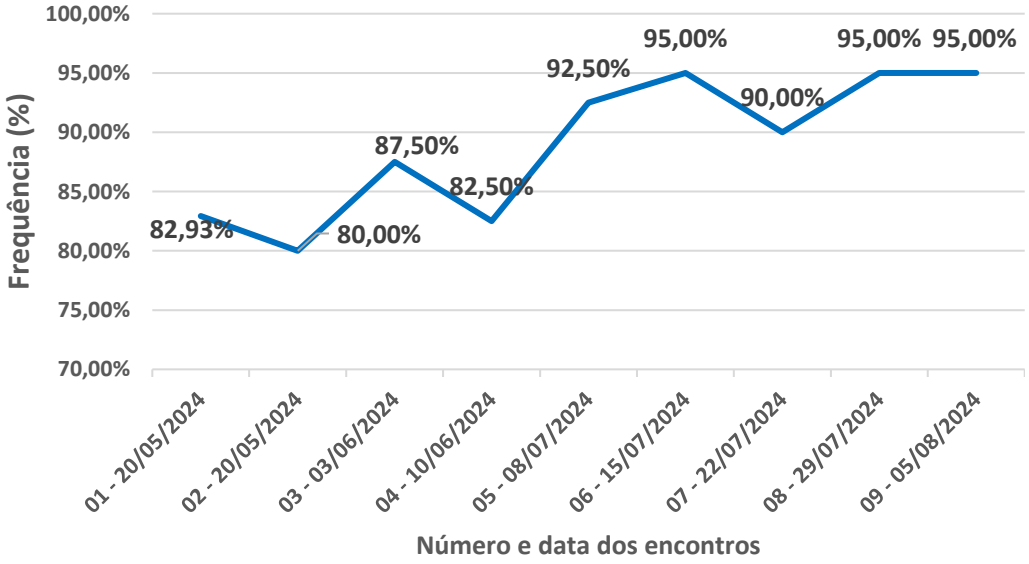
Esse tipo de avaliação, ou seja, a avaliação formativa, Segundo Luckesi (2013), não busca simplesmente verificar o aprendizado do aluno por meio da atribuição de uma nota do final do processo, ela também auxilia na execução e na melhoria dos resultados que estão sendo almejados durante todo o desenvolvimento das ações realizadas.

Nesse sentido, usou-se a atribuição de uma nota para qualificar todos os requisitos

analisados, buscando abranger a participação efetiva dos discentes durante o andamento das aulas. A atribuição de uma nota final também se fez necessária pelo fato de o sistema educacional atual ainda exigir esse critério para promoção ou reprovação dos alunos.

Em relação à análise da assiduidade dos alunos, a Fig. (113) mostra como se deu, ao longo dos encontros, os percentuais de frequência de acordo com o que já foi relatado nas descrições dos encontros.

Figura 120 - Gráfico de frequências dos alunos

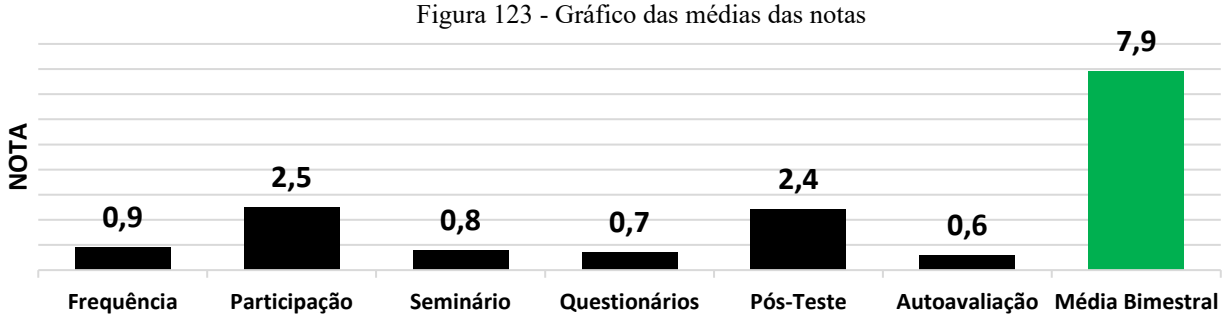


Fonte: Elaborada pelos autores.

Verifica-se, pelos dados do gráfico, que houve uma boa frequência em todos os encontros, principalmente depois do quinto. O grande número de alunos presentes foi fundamental para o bom desempenho da turma durante as atividades realizadas.

Em relação as notas finais dos estudantes, a Fig. (114) traz a média das notas de todos os segmentos listados na Tab. (24).

Figura 123 - Gráfico das médias das notas



Fonte: Elaborada pelos autores.

Como a nota final do aluno é referente a todo o seu empenho durante o desenvolvimento contínuo da SD, inclusive de autoavaliação, onde os estudantes puderam se fazer parte do processo avaliativo (Boeira; Costa; Kinast, 2023), um rendimento próximo a 80% reflete, mais uma vez, que houve êxito na construção na aplicação do produto educacional e reflete a importância de buscar o aprendizado do aluno partindo da sua sondagem diagnóstica (conhecimentos prévios), a fim de alcançar novos aprendizados.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta dissertação, vimos que a qualificação profissional docente, atualmente, é fundamental para atender aos anseios do sistema educacional, que, comumente, é voltada para a aprendizagem mecanizada do aluno, sem fazer referência ao seu contexto social, provocando, assim, o desinteresse desses estudantes, principalmente na disciplina de Física (Moreira, 2012).

Nessa perspectiva, este trabalho pretendeu construir uma proposta didática interativa para o ensino das energias cinéticas de rotação e rolamento pela necessidade de estimular o interesse dos alunos por esse componente curricular, abordando esse conteúdo com maior destaque no ensino básico com a mediação do *software* educacional *Algodoo*, a partir da elaboração um produto educacional a ser aplicado em sala de aula por meio de uma SD baseada nas UEPS de Moreira (2011) e na TAS de Ausubel (1968).

Com o objetivo de desenvolver essa SD de forma interativa e potencialmente significativa para o ensino desses tipos de energia, utilizando-se do produto educacional como material didático principal, procuramos definir e atingir quatro objetivos específicos. O primeiro foi produzir um produto educacional que abordasse as energias cinéticas de rotação e rolamento, trazendo o *Algodoo* como recurso de intensificação da aprendizagem. Verificou-se, ao longo do trabalho, que o livro digital não só foi produzido, mas também trouxe toda a dinâmica rotacional com linguagem bastante simples e interativa.

Com o produto educacional finalizado, buscou-se, como segundo objetivo específico, entender os conceitos de energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento com o uso prático do programa para promover a evolução da aprendizagem dos alunos. Durante a aplicação da SD, o recurso computacional se fez fundamental para a assimilação do conteúdo, sendo usado durante a exposição oral dos conceitos da temática específica em questão como também na apresentação de seminários, sendo grande responsável pelo bom desenho dos alunos no questionário final, que buscou coletar os indícios de aprendizagem desses estudantes.

O uso do *software*, bem como dos questionários iniciais, os quais buscaram verificar os conhecimentos preexistentes dos estudantes, fizeram-se necessários para buscar estratégias que fossem capazes de romper as lacunas existentes na estrutura cognitiva dos alunos, estimulando o interesse desses estudantes pela disciplina de Física e promovendo uma experiência de aprendizagem significativa, fazendo com que eles fossem capazes de relacionar os conceitos aprendidos durante as aulas para situações do dia a dia, como, por exemplo, o movimento da roda de um carro; o funcionamento de uma torre de energia eólica; a geração da energia

hidroelétrica; o funcionamento de equipamentos elétricos, como ventiladores, liquidificador, entre outros. Também foi possível, por meio da comparação dos Pré-Testes com o Pós-Teste, concluir que houve, de fato, essa evolução, pois os alunos, que antes não sabiam sequer falar a respeito, responderam esse tipo de questionamento de forma bastante coerente, atingindo, assim, o terceiro objetivo específico desta dissertação.

Depois de vencida todas as etapas de aplicação do produto educacional, foi possível avaliar, como quarto objetivo específico deste trabalho, a sequência didática utilizada como instrumento de construção do conhecimento. Para isso, os alunos foram avaliados de maneira coletiva e, principalmente, individualizada, com caráter formativo e recursivo (Moreira, 2012), sendo submetidos a vários critérios avaliativos, como assiduidade, dedicação; realização de seminários e testes avaliativos, inclusive de autoavaliação. Em relação às atividades realizadas durante todo o processo, o aluno realizou suas tarefas quantas vezes foram necessárias, levando em consideração os conhecimentos que ele possuía antes e durante o seu desenvolvimento de construção do conhecimento, fazendo-o aprender de forma expressiva (Moreira, 2012).

O livro digital, intitulado *"Algodoo e a Dinâmica Rotacional"*, permitiu, por meio da utilização do programa computacional, desenvolver uma UEPS, que consistiu na criação de uma SD interativa para a sua aplicação, levando em consideração os conhecimentos prévios dos alunos e uma avaliação principalmente contínua durante todo o percurso. A SD também definiu e explicou, seguindo os passos da criação dessa UEPS, a relevância da descrição dos conceitos e dos cálculos das energias cinéticas de rotação e rolamento para diferentes corpos rígidos a partir das suas propriedades geométricas, fazendo com que os alunos entendessem o conteúdo por meio de diferentes fenômenos físicos.

Apesar de existirem alguns trabalhos na literatura relacionados ao uso do *Algodoo* como recurso computacional educacional, o *ebook*, objeto de estudo, análise e aplicabilidade deste trabalho, se mostrou excepcional quando usado como material de planejamento das ações que envolveram a elaboração dos recursos pedagógicos utilizados durante as aulas da SD. Estando dividido em doze capítulos, todo o conteúdo está associado ao uso do aplicativo, trazendo exercícios, laboratórios digitais e *links* de acesso a vídeos com tutoriais para uma maior interatividade com os seus recursos, os quais foram, entre outras funcionalidades, fundamentais na produção dos testes de conhecimento; nos planos, *slides* e execução de aulas.

Enfim, um recurso que possibilita a construção de sequências de ensino, principalmente voltadas às metodologias ativas, que buscam uma aprendizagem significativa dos alunos. Nesse sentido, este trabalho servirá de fonte para que outras pessoas possam criar seus materiais

referentes a diversas temáticas da Física com o *Algodoo* como recurso digital mediador do conhecimento.

Em relação aos resultados, o número de presentes nas aulas durante os eventos de estudo e pesquisa relacionados à aplicação da SD aumentou, partindo de 82,93% no primeiro encontro, chegando a 95% no nono e último encontro, finalizando com uma média de 89%. Esses dados retratam uma melhoria no interesse dos alunos pelas aulas, desencadeando um consequente engajamento no decorrer delas.

No tocante aos questionários de sondagem de conhecimentos prévios, os pré-testes, esses serviram para colocar em xeque a falta de preparo dos alunos quando precisaram responder perguntas de forma clara e precisa, pois mais da metade deles não souberam argumentar bem ou ao menos responderam aos questionamentos. No entanto, com este problema em mão, foi possível traçar ações para minimizar esse entrave, como inserir uma revisão detalhada desses conceitos iniciais antes das aulas expositivas dos conteúdos do bimestre, por exemplo.

Quanto ao Manual de Laboratório Digital, assim como o Pós-Teste, foi possível notar a considerável evolução dos alunos, uma vez que, nos seminários de apresentação de simulações no *Algodoo*, praticamente a totalidade dos alunos conseguiram construir seus experimentos virtuais com quase nenhuma ajuda, sendo assertivos nos dados do problema e na resolução da questão proposta. Já em se tratando da avaliação bimestral, representada pelo Pós-Teste, ficou evidente que os estudantes também conseguiram estabelecer uma relação lógica e crítica entre o conteúdo estudado e a resolução de problemas alusivas às situações do cotidiano, com nota média próxima dos 8,0 pontos, de 10,0 possíveis, quase não havendo, nesse teste de conhecimento, questão sem ser respondida.

No que concerne ao questionário final de autoavaliação e pesquisa final de opinião, os alunos reconheceram a importância do uso do *Algodoo* e do livro digital como materiais potencializadores do conhecimento, capazes de estabelecer uma significativa melhoria na sua aprendizagem quanto aos conceitos de energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento, sem quase nenhuma sugestão de melhoria acentuada na aplicação da SD e nos recursos utilizados. No entanto, foram cautelosos em atribuir-lhes uma nota de zero a dez, sendo 6,37 a média das notas autoavaliativas, o que demonstra um certo reconhecimento das suas limitações cognitivas acerca do tema na sua generalidade.

Como o *Algodoo* é um programa de computador, seu uso, no contexto escolar, carece de um ambiente adequado para seu uso, como um laboratório de informática, por exemplo. Porém, encontramos desafios para trabalhar com esse recurso na EEPEMR pela falta desse

ambiente, limitando-nos a procurar meios que pudessem atender nossa perspectiva quanto ao desenvolvimento das aulas com a sua devida utilização. Para isso, foi preciso elaborar um material digital (Manual de Laboratório Virtual) para que o aluno tivesse acesso a esse recurso na prática. Quanto ao *ebook*, houve o seu compartilhamento por meio de grupo de *WhatsApp* e os estudantes tiveram seu acesso livremente nos seus *smartphones*, não trazendo maiores complicações quanto a sua acessibilidade.

Em suma, o *ebook* se mostrou um bom recurso, que possibilita a construção de sequências de ensino referentes a qualquer conteúdo da dinâmica rotacional, com atividades interativas e desafiadoras que exploram as funcionalidades do *Algodoo*, principalmente voltadas às metodologias ativas, em especial as que buscam uma aprendizagem mais rica e significativa dos alunos. Nesse sentido, este trabalho servirá de fonte para que outros professores possam criar seus materiais referentes a outras temáticas da Física com esse programa como recurso digital mediador do conhecimento, podendo disseminar a sua utilização, inclusive, em toda a comunidade escolar.

Além disso, pensando nos impactos e na aplicabilidade em outros contextos educacionais, esse produto por ser utilizado, devido a sua extensão, para criação de disciplinas eletivas na área de Ciências da Natureza e Suas Tecnologias, que são disciplinas de livre escolha do aluno, que fazem parte, atualmente, das diretrizes do Novo Ensino Médio (MEC, 2024). Ademais, além de servir como material de apoio para professores e alunos do ensino básico, pode, também, ser acessível a alunos da graduação em Física ou áreas afins, uma vez que, no seu texto, ele possui algumas partes com linguagem para estudantes desse nível que desejam saber um pouco mais do conteúdo.

Por fim, fazendo uma reflexão sobre toda a trajetória do curso de mestrado, principalmente na construção e aplicação de todo o trabalho de conclusão de curso, percebe-se que o desenvolvimento da pesquisa, que serviu para a construção e aplicação do produto educacional, bem como a consequente dissertação de mestrado, teve um papel agregador muito importante na qualificação pessoal e profissional não apenas nos autores deste trabalho, mas também em todos os envolvidos, principalmente nos alunos da 1ª Série “A” da EEPEMR. Apesar das dificuldades enfrentadas, no entanto, o engajamento dos alunos no decorrer da SD e os resultados obtidos no final da sua aplicação mostraram que uma proposta didática que busque desenvolvê-los por intermédio de uma aprendizagem potencialmente significativa estimula o interesse do professor em seguir na carreira docente, buscando sempre meios ativos e significativos de despertar no aluno a vontade de estar inserido de forma contundente no processo de ensino-aprendizagem.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, Mateus Dias *et al*. **Mal-estar docente no ensino de física:** desafios e perspectivas. Research, Society and Development, v. 9, n. 6, e106963265, 2020. ISSN 2525-3409. Disponível em: <https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/3265/3829>. Acesso em: 28 fev. 2024.

ALGODOO. **[Software]**. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <http://www.algodoo.com />. Acesso em: 12 mar. 2024.

ALGODOO. **Tradução do Algodoo**. Fórum Algodoo. Disponível em: <http://www.algodoo.com/forum/viewtopic.php?f=30&t=12229&p=86459&hilit=tradu%C3%A7%C3%A3o&sid=2ed19f082184cf645d2a3a6a7d9a9be8#p86459> . Publicado em: 29 set. 2018. Acesso em: 13 mar. 2024.

ARAÚJO, Evandro Santos *et. al*. O uso de simuladores virtuais educacionais e as possibilidades do PhET para a aprendizagem de Física no Ensino Fundamental. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática,** São Paulo, v. 12, n. 3, p. 1–25, 2021.

AUSUBEL, David Paul. **Aquisição e retenção de conhecimentos:** uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Plátano, 2003.

AUSUBEL, David Paul**. Educational psychology:** a cognitive view. Nova York: Holt, Rienehart and Winston, 1968.

BARBOSA JUNIOR, Juscelino Reis. **Construindo conceitos utilizando uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS):** o ensino da poluição atmosférica. 2022. Dissertação (Mestrado em Rede Nacional para Ensino das Ciências Ambientais) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2022.

BARBOSA, Wilton Gimenes. **Inserção de conceitos de dinâmica rotacional no ensino médio através do laboratório não estruturado mediado por videoanálise.** 2016. 100 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino de Ciências) - Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET), Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, 2016.

BASTOS, Jennifer Ester de Sousa *et al*. O uso do questionário como ferramenta metodológica: potencialidades e desafios. **Brazilian Journal of Implantology and Health Sciences,** v. 5, n. 3, p. 623-636, 2023.

BATISTA, Lara Miguel Batista Miguel; CUNHA, Virginia Mara Próspero da. O uso das metodologias ativas para melhoria nas práticas de ensino e aprendizagem. **Docent Discunt**, v. 2, n. 1, p. 60-70, 2021.

BATISTA, Michel Corci *et al*. **O software Algodoo como possibilidade para o ensino de física**. Atena Editora, 2022. Disponível em: <https://atenaeditora.com.br/catalogo/ebook/o-software-algodoo-como-possibilidade-para-o-ensino-de-fisica>. Acesso em: 19 fev. 2024.

BOEIRA, Marcelo Dall'Alba; COSTA, Luciano Andreatta Carvalho da; KINAST, Eder Julio. Autoavaliação como proposta de avaliação formativa em disciplinas de Ciências, Tecnologias, Engenharias e Matemática. **Revista de Estudos Aplicados em Educação**, v. 8, p. e20239192-e20239192, 2023.

BOGDAN, Robert C. BIKLEN, Sari Knopp. **INVESTIGAÇAO QUALITATIVA EM EDUCAÇAO: UMA INTRODUÇÃO À TEORIA E AOS MÉTODOS.** Traduzido por Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Batista. Porto, Porto Editora, LDA, 1994.

BRASIL. Lei nº 14.601, de 19 de junho de 2023. Dispõe sobre as diretrizes nacionais para o fortalecimento do Sistema de Assistência Social. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 20 jun. 2023.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.** Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 23 dez. 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 25 fev. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. CNE. **Define Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Resolução n. 2, de 30 de janeiro, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 25 fev. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. CICUTO, Camila Aparecida Tolentino; TORRES, Bayardo Baptista. Influência da frequência e participação no desempenho em um ambiente de aprendizagem centrado no aluno. **Química Nova**, v. 43, p. 239-248, 2020.

Ciência Todo Dia – Canal do YouTube. **O Que é Energia | Episódio 1.** YouTube, 10 de jun. de 2020. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=3VLPyOLC1nc&t=47s>. Acesso em: 26 fev. 2024.

CONTESSA, Nitiele Medeiros *et al.*. Dificuldades encontradas pelos alunos em resolver questões de probabilidade. In: Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul. **Anais…** Eremat, Bagé/RS, 13-16 nov. 2014, p. 539 a 545.

CORREIA, Mikael Alisson Moura. **Evolução da abordagem do uso de simuladores computacionais na educação básica brasileira para o ensino de física.** 32f. Monografia (Curso de Licenciatura de Física) – Universidade Federal de Alagoas (Ufal). Maceió, 2022.

Disponível em: < https://www.repositorio.ufal.br/handle/123456789/10618>. Acesso em: 03 abr. 2024.

COSTA, Adriano Medeiros. O anonimato como fator de pertencimento no uso de redes sociais on-line em projetos educacionais. **Prometeu**, Ano V, n. 1, ISSN 2175-0920, 1-20, 2019. Disponível em: <http://lte.ce.ufrn.br/prometeu/revistas/revista_2019/3.O-ANONIMATO.docx.pdf>. Acesso em: 11 mar. 2024.

COSTA, Vilene Dias da. Os Desafios Para A Inserção Das Tics Nas Atividades Pedagógicas Das Escolas Públicas. **Tecnologias e mídias digitais na educação: conceitos práticos e teóricos**, v. 78, 2021.

CUNHA, Mayara Marmelo da; SCHINDHELM, Virginia Georg; MACHADO, Leidiane Gomes. O silêncio que fala: impactos da timidez no processo educativo. **Revista Transmutare**, v. 8, 2023.

DOCUMENTARIOS HISTORICOS.**"Energia & tecnologia" Descobertas da Antiguidade Documentario Completo**. YouTube, 11 de abr. de 2018. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=q_oPJtmPL2E>. Acesso em: 26 fev. 2023.

FERRARO, Nicolau Gilberto; PENTEADO, Paulo Cesar M.; TORRES, Carlos Magno A.; **Física -** Vereda Digital - Volume único. 1. Ed. – São Paulo: Moderna, 2012.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido.** 17ª edição. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

FREIRE, Rômulo Roosevel Batista *et al*. A realidade dos laboratórios de informática nas escolas públicas de Maués: um estudo de caso. **Brazilian Journal of Development**, v. 7, n. 1, p. 3847-3858, 2021.

GERMANO, Eloá Dei Tós. **O software Algodoo como material potencialmente significativo para o ensino de física:** Simulações e mudanças conceituais possíveis. 88f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Tecnologia) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2015. Disponível em: <https://riut.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/2490/1/PG_PPGECT_M_Germano%2c%20Elo%c3%a1%20Dei%20T%c3%b3s_2016.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2024.

GIBBS, Grabam. **Análise de dados qualitativos.** Tradução de Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre: Artmed, 2009.

GODOY, Arilda Schmidt. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **ERA - Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63, 1995.

GOGOY, Leandro; AGNOLO, Rosana Maria Dell'; MELO, Wolney C. **Multiversos: Ciências da Natureza:** matéria, energia e a vida – 1. ed. – São Paulo: Editora FTD, 2020.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física:** Mecânica -Volume 1. 10ª ed. Tradução: Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

HORTA, Renata Furtado. **A influência da autoestima na aprendizagem.** 2022. 68 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), Uberaba, MG, 2022.

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Avaliação da aprendizagem escolar:** estudo e proposições. São Paulo: Cortez, 2013.

LUCKESI, Cipriano Carlos. Verificação ou avaliação: o que pratica a escola. **Série Idéias**, v. 8, p. 71-80, 1998.

MARTINI, Glorinha *et al.* **Conexões com a Física** – 3. ed. – São Paulo: Moderna, 2016.
ME-QR: Gerador de Código QR Gratuito. (2023, dezembro 12). ME-QR. Disponível em: <https://me-qr.com/pt>. Acesso em 12 dez. 2023.

MINATTO, Alice Cardoso; GIACOMAZZO, Graziela Fátima. PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA PERSPECTIVA DA ROBÓTICA EDUCACIONAL: PERCEPÇÃO DOS PROFESSORES. **Saberes Pedagógicos**, Criciúma, v. 7, nº 1, p. 109-135, jan./jun. 2023. – Curso de Pedagogia – UNESC.

MOREIRA, M. A. Aprendizagem significativa: uma ilusão perdida em uma cultura de ensino para a testagem. **Revista Electrónica de Investigación Educativa**, [S.l.], v. 17, n. 2, p. 1-11, 2015.

MOREIRA, Marco Antonio. **Aprendizagem Significativa**: a teoria e textos complementares. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

MOREIRA, Marco Antonio. Desafios no ensino da física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 43, suppl. 1, p. e20200451/1-8, 2021. DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0451.
Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/xpwKp5WfMJsfCRNFCxFhqLy/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 03 abr. 2024.

MOREIRA, Marco Antonio. **O que é afinal Aprendizagem significativa?** Aula Inaugural do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais, Instituto de Física, Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, MT, 23 de abril de 2010. Aceito para publicação, Qurriculum, La Laguna, Espanha, 2012.

MOREIRA, Marco Antonio. Unidades de Enseñanza Potencialmente Significativas - UEPS. **Aprendizagem Significativa em Revista**, v. 1, n. 2, p. 43-63, 2011.

MOREIRA, Marco Antonio; MASINI, Elcie F. Salzano. **Aprendizagem Significativa** – a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

MOREIRA, Marco Antonio (s.d.). **Marco Antônio Moreira**. Disponível em: <http://50anos.if.ufrj.br/Moreira.html>. Acesso em: 16 Dez. 2023.

MOREIRA, Marco Antonio (s.d.). **Unidades de Ensino Potencialmente Significativas – UEPS**. Instituto de Física – UFRGS. Disponível em: <https://www.if.ufrgs.br/~moreira/UEPSport.pdf>. Acesso em: 18 Dez. 2023.

MOREIRA, Marco Antonio. Grandes desafios para o ensino de Física na Educação Básica. **Revista do Professor de Física**, Brasília, v. 1, n. 1, 2017. Disponível em: <https://periodicos.unb.br/index.php/rpf/article/view/7074/5725>. Acesso em: 03 de abr. 2024.

MORETTO, Inara Machado; DAMETTO, Jarbas. DESAFIOS EDUCACIONAIS DA ERA DIGITAL: ADVERSIDADES E POSSIBILIDADES DO USO DA TECNOLOGIA NA PRÁTICA DOCENTE. **PERSPECTIVA**, Erechim. v. 42, n.160, p. 77-87, dezembro/2018. Disponível em: <https://www.uricer.edu.br/site/pdfs/perspectiva/160_736.pdf>. Acesso em: 23 maio. 2024.

Nerdologia – Canal do YouTube. **Energia | Nerdologia**. YouTube, 03 de dez. de 2015. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=pXtVUobPQLs>. Acesso em: 25 fev. 2024.

NOVAK, J. D.; CAÑAS, A. J. **A teoria subjacente aos mapas conceituais e como elaborá-los e usá-los**. Práxis Educativa, Ponta Grossa, v. 5, n.1, p. 9-29, jan-jun, 2010.

Novo Ensino Médio. Ministério da Educação. Disponível em: < https://www.gov.br/mec/pt-br/novo-ensino-medio>. Acesso em: 12 ago. 2024.

NUSSENZVEIG, H. Moisés. **Curso de Física Básica 1:** Mecânica. 4. Ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

OLIVEIRA, Almir Almeida de; FALCÃO, Aline Bezerra. Avaliações acerca da Palatalização Progressiva por Estudantes Universitários. **Signum: Estudos da Linguagem**, v. 26, n. 2, p. 104-117, 2023.

OLIVEIRA, Regina Célia Barbosa de; SILVA, Ingrine Shérida da; MELO, Carla Carvalho de. Implicações do uso de situação-problema no ensino básico para compreensão de fenômenos associados à chuva ácida. **Revista Ciências & Ideias ISSN: 2176-1477**, p. 108-122, 2020.

OLIVEIRA, Rodrigo dos Santos; CAPELLI, Claudia; SAMPAIO, Jonice de Oliveira. **Gráficos em Linguagem Simples:** Orientações para criar gráficos mais fáceis de entender. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2022.

Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 2000.

PEZZIN, Diego de Oliveira. **O estudo da óptica da visão por meio do ensino híbrido e sua conexão com o efeito fotoelétrico**. 246f. Dissertação de Mestrado (Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física) – Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes). Cariacica/ES, 2022. Disponível em: <https://repositorio.ifes.edu.br/bitstream/handle/123456789/2092/Disserta%c3%a7%c3%a3o_Ensino_%c3%93ptica_Vis%c3%a3o.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 15 fev. 2024.

Programa Nacional de Tecnologia Educacional (ProInfo). Ministério da Educação. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/proinfo>. Acesso em: 10 ago. 2024.

RAMALHO, Francisco Júnior; FERRARO; Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo Antônio de Toledo. **Os Fundamentos da Física:** Mecânica, Volume 1. São Paulo: Moderna, 2015.

RODRIGUES, T. D. F. F.; OLIVEIRA, G. S.; SANTOS, J. A. As pesquisas qualitativas e quantitativas na educação. **Revista PRISMA**, Rio de Janeiro, vol. 2, n. 1, p. 154-174, 2021. Disponível em: <https://revistaprisma.emnuvens.com.br/prisma/article/view/49>. Acesso em: 05 abr. 2024.

SCHNEIDER, Andreia Caroline; GOLDMEYER, Marguit Carmen. Letramento Argumentativo: a arte de argumentar. **Revista Acadêmica Licencia&acturas**, v. 8, n. 2, p. 7-12, 2020.

SCHWERZ, Roseli Constantino; FONTES, Adriana da Silva; COSSICH NETO, Mauricio. ALGODOO: ALGUMAS POSSIBILIDADES DE UTILIZAÇÃO NO ENSINO DE FÍSICA. *In*: ANAIS DO ENCONTRO INTERNACIONAL DE PRODUÇÃO CIENTÍFICA, 2017,. **Anais eletrônicos**... Campinas, Galoá, 2017. Disponível em: <https://proceedings.science/epcc/trabalhos/algodoo-algumas-possibilidades-de-utilizacao-no-ensino-de-fisica?lang=pt-br> Acesso em: 16 fev. 2024.

SILVA, Anderson Gomes da; SILVA, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

SILVA, Fabiano Freire da. **Simulação computacional com o software Algodoo:** refração luminosa. 68f. Dissertação de Mestrado (Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN). Natal, 2018. Disponível em: <https://www2.ifrn.edu.br/mnpef/_dissertacoes/Dissertacao_Fabiano_Freire.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2024.

SILVA, Fabiano Freire da; SILVA, Melquisedec Lourenço da. **Simulação computacional com o software Algodoo:** refração luminosa. 39f. Natal, 2018. Disponível em:

<https://www2.ifrn.edu.br/mnpef/_produtos/Produto_Fabiano.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2024.

SILVA, Sergio Damasceno da; SILVA, Melquisedec Lourenço da. **Simulação computacional com o software Algodoo:** MOVIMENTOS HARMÔNICOS. 81f. Natal, 2018. Disponível em: < https://www2.ifrn.edu.br/mnpef/_produtos/Produto_Sergio.pdf >. Acesso em: 19 fev. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 28 nov. 2023.

SOUSA, A. S.; OLIVEIRA, S. O.; ALVES, L H. A pesquisa bibliográfica: princípios e fundamentos. **Cadernos da Fucamp**, v.20, n.43, p.64-83, 2021. Disponível em: <https://revistas.fucamp.edu.br/index.php/cadernos/article/view/2336>. Acesso em: 03 abr. 2024.

SOUSA, Valéria Castelo Branco de. **A INTEGRAÇÃO ENTRE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS E SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS PARA O ENSINO DA FÍSICA:** Levantamento de Teses e Dissertações Nacionais no período de 2009 a 2019. 33f. Monografia (Curso de Especialização em Ensino de Física) – Universidade Federal do Amapá (UNIFAP). Macapá, 2021. Disponível em: <http://repositorio.unifap.br/bitstream/123456789/899/1/TCCE_IntegracaoAtividadesExperimentais.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2024.

SOUZA, Isaac Teixeira de *et al*. Gamificação como estratégia de dinamização de disciplina técnica do curso de Redes de Computadores do Ensino Médio Integrado. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 7, p. 46263-46280, 2020.

VYGOTSKY, Lev Semionovitch. **A FORMAÇÃO SOCIAL DA MENTE.** São Paulo: Martins Fontes, 1991.

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. Sears & Zemansky - **Física I:** Mecânica - Volume 1. 12ª ed. Tradução de Sonia Midori Yamamoto. São Paulo: Pearson Universidades, 2008.

ZABALA, A. **A Prática Educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A – PLANOS DE AULA

PLANO DE AULA 01

Instituição de ensino: *Escola Estadual Professor Eliah Maia do Rêgo*

Professor: *Anderson Gomes da Silva* | **Data:** *20/05/2024* | **Duração:** *02 aulas (100 min)*

Área do conhecimento: *Ciências da Natureza e Suas Tecnologias* | **Disciplina:** *Física*

Turma: *1ª Série "A" – Ensino Médio - Matutino*

Temática: *O que é Energia?* – Nestas aulas, serão exibidos, além da apresentação da SD, dois vídeos do YouTube, com títulos "O Que É Energia" e *"Energia | Nerdologia"*, dos canais "Ciência Todo Dia" e "Nerdologia", respectivamente; relacionados aos conceitos de energia, seus tipos e as descobertas da Antiguidade que serviram para a evolução da tecnologia em diversas áreas, além da aplicação de um pré-teste, que consistirá em um questionário individual com perguntas introdutórias para fazer um diagnóstico da turma referente aos conhecimento prévios relacionados aos conteúdos e métodos escolhidos e definidos que serão trabalhados durante o segundo bimestre.

Objetivos da Aprendizagem*: 1)* Apresentar ao aluno a SD a ser trabalhada, além do conteúdo definido, e exibir vídeos para introduzir um conceito amplo sobre a temática a ser estudada durante o segundo bimestre. *2)* Aplicar um questionário individual sobre energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento a nível introdutório com o intuito de coletar informações sobre os conhecimentos prévios dos alunos.

Conteúdo Programático*: 1)* Conceitos básicos de energia: definição, tipos e transformações. *2)* Importância e princípios da energia rotacional. *3)* Energia e Movimento Rotacionais: exemplos e aplicações. *4)* Análise de movimento rotacional em situações do cotidiano, como parques de diversões e usinas eólicas, por exemplo. *5)* Uso de softwares computacionais no Ensino de Física.

Metodologia: A aula se inicia com a demonstração do livro digital que será utilizado como material didático durante o bimestre, como também da sequência didática que será trabalhada. A seguir, será haverá uma apresentação interativa sobre o que é energia e alguns tipos de como ela pode se mostrar, através visualização e discussão de vídeos educativos. Logo após, será aplicado um questionário individual que visará coletar conhecimentos prévios dos alunos referentes aos conteúdos que serão estudados durante o bimestre.

Cronograma: Aula 1 - Apresentação da SD, do *Ebook* e visualização de vídeos sobre energia (50 minutos). Aula 2 - Aplicação do 1º pré-teste (50 minutos).

Materiais utilizados: Computador com acesso à internet; projetor de tela para exibição dos vídeos; questionário físico.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante as discussões em grupo e na análise dos resultados dos testes individuais aplicados.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 25 fev. 2024.

Ciência Todo Dia. **O Que é Energia | Episódio 1.** YouTube, 10 de jun. de 2020. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=3VLPyOLC1nc&t=47s>. Acesso em: 26 fev. 2024.

Nerdologia – Canal do YouTube. **Energia | Nerdologia**. YouTube, 03 de dez. de 2015. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=pXtVUobPQLs>. Acesso em: 25 fev. 2024.

PLANO DE AULA 02

Instituição de ensino: *Escola Estadual Professor Eliah Maia do Rêgo*

Professor: *Anderson Gomes da Silva* | **Data:** *27/05/2024* | **Duração:** *02 aulas (100 min)*

Área do conhecimento: *Ciências da Natureza e Suas Tecnologias* | **Disciplina:** *Física*

Turma: *1ª Série "A" – Ensino Médio - Matutino*

Temática: Apresentação de situação-problema. Nesta aula será exposta uma situação-problema relacionada a energia e, principalmente, a energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento, para fazer com que os estudantes reflitam sobre aspectos do seu cotidiano que estejam relacionados com a temática da situação introdutória. Nesse encontro, será realizado um segundo pré-teste, sendo as perguntas, agora, com um nível intermediário.

Objetivos da Aprendizagem*: 1)* Manifestar uma situação-problema sobre a energia cinética de uma roda de um carro e identificar a opinião dos alunos sobre o tema da aula. *2)* Submeter a turma a um novo pré-teste individual por meio de um questionário a nível intermediário para analisar se houve uma melhor percepção sobre os conteúdos abordados.

Conteúdo Programático*: 1)* Importância e princípios da energia rotacional. *2)* Energia e Movimento Rotacionais: exemplos e aplicações. *3)* Análise de movimento rotacional de uma roda de um carro.

Metodologia: A aula se inicia com uma situação-problema sobre a energia cinética contida em uma roda de um carro em movimento. A sala será dividida em grupo de alunos para debater a temática e verificar suas opiniões sobre o assunto. No final do debate, a turma será submetida a um novo pré-teste individual por meio de um questionário para verificar se os alunos conseguiram aflorar uma melhor percepção em relação ao conteúdo.

Cronograma: Aula 1 – Apresentação e discussão da situação-problema (50 min). Aula 2 – Aplicação do segundo pré-teste (50 minutos).

Materiais utilizados: Computador com acesso à internet; projetor de tela; quadro negro e questionário físico.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante as discussões em grupo e na análise dos resultados dos testes individuais aplicados.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. **[Software]**. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 03

Instituição de ensino: *Escola Estadual Professor Eliah Maia do Rêgo*

Professor: *Anderson Gomes da Silva* | **Data:** *03/06/2024* | **Duração:** *02 aulas (100 min)*

Área do conhecimento: *Ciências da Natureza e Suas Tecnologias* | **Disciplina:** *Física*

Turma: *1ª Série "A" – Ensino Médio - Matutino*

Temática: O *Algodoo* e o Livro digital "*Algodoo e a Dinâmica Rotacional*". Neste encontro serão apresentados o *softwate* Algodoo e suas funcionalidades, bem como o livro digital "*Algodoo e a Dinâmica Rotacional*" na integra.

Objetivos da Aprendizagem*: 1)* Expor o livro digital na íntegra que será utilizado na SD. *2)* Realizar introdução ao uso do *Algodoo*.

Conteúdo Programático*: 1)* Apresentar, na íntegra, o livro digital "*Algodoo e a Dinâmica Rotacional*". *2)* Introdução ao *Algodoo*.

Metodologia: A aula se inicia com a demonstração, na íntegra, do livro digital a ser utilizado durante o 2º bimestre. Depois, será introduzido o uso do *Algodoo*, com demonstrações das suas ferramentas, aplicabilidades e construções das primeiras simulações.

Cronograma: Apresentação do ebook na íntegra e sua interatividade (25 min – ½ aula); Introdução ao *Algodoo* (75 min – 1,5 aula).

Materiais utilizados: Computador com acesso à internet com o *Algodoo* instalado; projetor de tela; quadro negro.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante a aula. Também será passado para o aluno uma atividade em grupo de Laboratório digital, o qual eles terão que construir simulações sobre Energia Cinética de rotação de diferentes discos para apresentarem no "ENCONTRO 07", que tratará sobre aulas práticas com o *software*.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. **[Software]**. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 04

Instituição de ensino: *Escola Estadual Professor Eliah Maia do Rêgo*

Professor: *Anderson Gomes da Silva* | **Data:** *10/06/2024* | **Duração:** *02 aulas (100 min)*

Área do conhecimento: *Ciências da Natureza e Suas Tecnologias* | **Disciplina:** *Física*

Turma: *1ª Série "A" – Ensino Médio - Matutino*

Temática: Revisão dos conceitos básicos do Movimento Circular Uniforme e o estudo da Energia Cinética de Rotação. Neste encontro, será introduzido o ensino do conteúdo de Física a ser estudado durante a aplicação da SD.

Objetivos da Aprendizagem*: 1)* Apresentar o conteúdo de forma clara e organizada na sala de aula e/ou, com exemplos práticos, utilizando recursos como o *ebook*, o quadro negro e a sala de vídeo.

Conteúdo Programático*: 1)* Conceitos básicos do MCU. *2)* Momento de Inércia. *3)* Teorema dos Eixos Paralelos. *4)* Centro de Massa. *5)* Energia Cinética de Rotação.

Metodologia: A aula se inicia com a revisão dos principais conceitos do MCU. Em seguida, serão introduzidos os conceitos de Momento de Inércia e Centro de Massa, para, depois, ser estudada a Energia Cinética de Rotação. No final, serão trabalhados, em grupo, exercícios sobre o conteúdo estudado.

Cronograma: Aula 1: Exposição do conteúdo programático (50 min); Aula 2: Continuação do conteúdo programático e trabalho, em grupo, da resolução de exercícios propostos sobre o conteúdo (50 min).

Materiais utilizados: Computador; projetor de tela; quadro negro.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante a aula.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. **[Software]**. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 05

Instituição de ensino: *Escola Estadual Professor Eliah Maia do Rêgo*

Professor: *Anderson Gomes da Silva* | **Data:** *08/07/2024* | **Duração:** *02 aulas (100 min)*

Área do conhecimento: *Ciências da Natureza e Suas Tecnologias* | **Disciplina:** *Física*

Turma: *1ª Série "A" – Ensino Médio - Matutino*

Temática: Energia Cinética de Rolamento como a composição das energias cinéticas de Rotação e Translação. Neste encontro, será dada a continuidade do ensino do conteúdo de Física que está sendo estudado na aplicação da SD.

Objetivos da Aprendizagem*: 1)* Apresentar o conteúdo de forma clara e organizada na sala de aula e/ou, com exemplos práticos, utilizando recursos como o *ebook*, o quadro negro e a sala de vídeo.

Conteúdo Programático*: 1)* Conceitos básicos de Movimento de Translação e Movimento de Rotação. *2)* Energia Cinética de Rolamento.

Metodologia: A aula se inicia com uma breve revisão dos principais conceitos do Movimento Linear e do Movimento Rotacional. Em seguida, será introduzido o conceito de Energia Cinética de Rolamento. No final, serão trabalhados exercícios, em grupo, para fixação do conteúdo.

Cronograma: Aula 1: Exposição do conteúdo programático (50 min); Aula 2: Continuação do conteúdo programático e trabalho, em grupo, da resolução de exercícios propostos sobre o conteúdo com apoio do Algodoo (50 min).

Materiais utilizados: Computador; projetor de tela; quadro negro.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante a aula.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. **[Software]**. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 06

Instituição de ensino: *Escola Estadual Professor Eliah Maia do Rêgo*

Professor: *Anderson Gomes da Silva* | **Data:** *15/07/2024* | **Duração:** *02 aulas (100 min)*

Área do conhecimento: *Ciências da Natureza e Suas Tecnologias* | **Disciplina:** *Física*

Turma: *1ª Série "A" – Ensino Médio - Matutino*

Temática: Apresentação de seminário usando o *Algodoo* – Simulando a Energia Cinética de Rotação. Os alunos apresentarão o trabalho passado no "ENCONTRO 03".

Objetivos da Aprendizagem*: 1)* Verificar a aprendizagem do conteúdo Energia Cinética de Rotação com o uso do *Algodoo*.

Conteúdo Programático*: 1)* Energia Cinética de Rotação. *2)* Laboratório virtual de Física.

Metodologia: As duas aulas serão reservadas para apresentação dos trabalhos em grupos sobre energia cinética de rotação com o uso do *Algodoo*.

Cronograma: Aulas 1 e 2: Apresentação de seminários (100 min).

Materiais utilizados: Computador com o *Algodoo* instalado; projetor de tela; quadro negro.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante a aula.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. **[Software]**. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 07

Instituição de ensino: *Escola Estadual Professor Eliah Maia do Rêgo*

Professor: *Anderson Gomes da Silva* | **Data:** *22/07/2024* | **Duração:** *02 aulas (100 min)*

Área do conhecimento: *Ciências da Natureza e Suas Tecnologias* | **Disciplina:** *Física*

Turma: *1ª Série "A" – Ensino Médio - Matutino*

Temática: Apresentação de seminário usando o *Algodoo* – Simulando a Energia Cinética de Rotação. Os alunos continuarão as apresentações dos trabalhos do encontro 06.

Objetivo da Aprendizagem*: 1)* Verificar a aprendizagem do conteúdo Energia Cinética de Rotação com o uso do *Algodoo*.

Conteúdo Programático*: 1)* Energia Cinética de Rotação. *2)* Laboratório virtual de Física.

Metodologia: As duas aulas serão reservadas para continuação das apresentações dos trabalhos em grupos sobre energia cinética de rotação com o uso do *Algodoo*.

Cronograma: Aulas 1 e 2: Apresentação de seminários (100 min).

Materiais utilizados: Computador com o *Algodoo* instalado; projetor de tela.

Avaliação: A avaliação será baseada no desempenho dos alunos durante as apresentações dos seminários.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. **[Software]**. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 08

Instituição de ensino: *Escola Estadual Professor Eliah Maia do Rêgo*

Professor: *Anderson Gomes da Silva* | **Data:** *29/07/2024* | **Duração:** *02 aulas (100 min)*

Área do conhecimento: *Ciências da Natureza e Suas Tecnologias* | **Disciplina:** *Física*

Turma: *1ª Série "A" – Ensino Médio - Matutino*

Temática: Avaliação do 2º bimestre – Aplicação do pós-teste.

Objetivo da Aprendizagem*: 1)* Coletar e verificar indícios de aprendizagem dos conteúdos Energia Cinética de Rotação e Energia Cinética de Rolamento.

Conteúdo Programático*: 1)* Energia Cinética de Rotação. *2)* Energia Cinética de Rolamento.

Metodologia: As duas aulas serão reservadas para aplicação do pós-teste, que consiste na avaliação bimestral do 2º bimestre de acordo com o calendário escolar.

Cronograma: Aulas 1 e 2: Aplicação do pós-teste (avaliação) (100 min).

Materiais utilizados: Questionário físico.

Avaliação: A avaliação será baseada no desempenho dos alunos na resolução da avaliação.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. **[Software]**. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 09

Instituição de ensino: *Escola Estadual Professor Eliah Maia do Rêgo*

Professor: *Anderson Gomes da Silva* | **Data:** *05/08/2024* | **Duração:** *02 aulas (100 min)*

Área do conhecimento: *Ciências da Natureza e Suas Tecnologias* | **Disciplina:** *Física*

Turma: *1ª Série "A" – Ensino Médio - Matutino*

Temática: *Feedback* do pós-teste, autoavaliação e pesquisa final de opinião. Neste encontro, o pós-teste será resolvido e debatido com os alunos e será aplicado um questionário de autoavaliação e de pesquisa final de opinião para os alunos.

Objetivos da Aprendizagem*: 1)* Retomar o pós-teste, corrigindo-o e buscando fazer com que o aluno perceba sua evolução de aprendizagem, principalmente no que tange a sua capacidade de captar significados, compreender, explicar e de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema, características essas presentes nas UEPS de Moreira (2011). *2)* Verificar, por meio de questionários individuais específicos, como o aluno se autoavalia em relação ao seu aprendizado e o que ele achou da SD utilizada

Conteúdo Programático*: 1)* Importância e princípios da energia rotacional. *2)* Energia e Movimento Rotacionais: exemplos e aplicações. *3)* Análise de movimento rotacional de uma roda de um carro.

Metodologia: A aula se inicia com a resolução da avaliação bimestral para debate das questões com os alunos, verificação das últimas dúvidas dos alunos e aprimoramento dos conceitos estudados. Em seguida, será aplicado um questionário individual para que os alunos possam se autoavaliar e emitir suas opiniões quanto à metodologia utilizada durante o bimestre e aplicação da sequência didática.

Cronograma: Aula 1 – *Feedback* do pós-teste (50 min). Aula 2 – Aplicação do questionário individual de autoavaliação e pesquisa final de opinião (50 minutos).

Materiais utilizados: Quadro negro.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante as discussões em grupo e na análise dos resultados dos questionários individuais aplicados.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. **[Software]**. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

APÊNDICE B – *SLIDES* DE AULA

FÍSICA

COMO FUNCIONA O MOVIMENTO DA RODA DE UM CARRO?

Turma: 1ª Série "A" - Matutino
Professor: Anderson Gomes da Silva

27 de maio de 2024

1

SITUAÇÃO-PROBLEMA: O CARRO EM MOVIMENTO



Em um dia ensolarado, o professor Eliah está dirigindo o seu carro em uma estrada reta e plana. O motor do seu carro está em perfeito estado e o professor Eliah está muito ansioso para chegar a seu destino. Subitamente, o motor deixa de funcionar e o carro, aos poucos, começa a perder velocidade até parar.

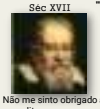
Então, o professor Eliah se pergunta: "Por que o motor do meu carro parou de funcionar? Como isso afeta o movimento do meu veículo? E por que o giro das rodas é tão importante para fazer meu carro andar?"

Nessa situação, você, aluno, deve responder às perguntas do prof. Eliah e explicá-lo o que ele deve fazer para resolver esse problema.

2

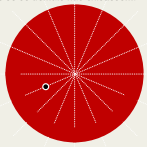
PRINCÍPIO DA INDEPENDÊNCIA DOS MOVIMENTOS

Sec XVII



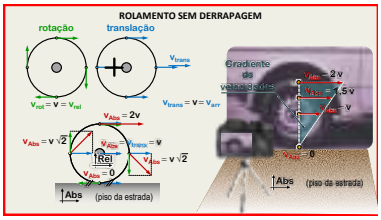
Não me sinto obrigado a acreditar que o mesmo Deus que nos dotou de sentidos, razão e intelecto, pretenda que não os utilizemos.

"Quando um móvel realiza um movimento composto, cada um dos movimentos componentes acontece como se os demais não existissem."



3

ROLAMENTO SEM DERRAPAGEM



4

COMPOSIÇÃO DOS MOVIMENTOS DE ROTAÇÃO E TRANSLAÇÃO DE UMA RODA



(a) Rolagem pura (b) Translação pura (c) Rolamento

5

SITUAÇÃO-PROBLEMA: O CARRO EM MOVIMENTO

1. Movimento Circular e Rotação:
   - Quando o motor está funcionando, ele gira o eixo do volante (ou virabrequim) em movimento circular. Esse movimento é transmitido às rodas do carro por meio do sistema de transmissão.
   - O motor apagou, mas as rodas ainda estão girando devido à inércia. No entanto, a energia cinética de rotação do motor não está sendo fornecida, e o carro começa a desacelerar.

6

SITUAÇÃO-PROBLEMA: O CARRO EM MOVIMENTO

2. Energia Cinética Linear e Rolamento:
   - A energia cinética linear está associada ao movimento de translação do carro. Quando o motor está ligado, ele fornece energia para as rodas, permitindo que o carro se mova.
   - Quando o motor apaga, a energia cinética linear diminui gradualmente. O carro continua a se mover devido à inércia, mas a resistência do atrito com o solo e o ar faz com que ele perca velocidade.

7

SITUAÇÃO-PROBLEMA: O CARRO EM MOVIMENTO

3. Por que o Giro das Rodas Faz o Carro Andar?
   - As rodas do carro são essenciais para o movimento. Quando o motor está funcionando, ele transfere energia para as rodas por meio do sistema de transmissão.
   - O giro das rodas cria atrito com o solo, impulsionando o carro para a frente. Isso ocorre porque a superfície da estrada exerce uma força de atrito nas rodas, permitindo que o carro se mova.
   - Quando o motor apaga, a energia cinética de rotação não é mais fornecida, mas o atrito com o solo continua a agir, permitindo que o carro role por um tempo antes de parar completamente.

8

Capítulo 4 **Energia Cinética de Rotação**

Turma: 1ª Série "A" - Matutino
Professor: Anderson Gomes da Silva

03 de junho de 2024

9

ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO DE UMA PARTÍCULA

A **energia cinética de rotação** descreve objetos em rotação, sendo uma extensão da energia cinética linear que lida com movimentos de translação.

Esse tipo de energia depende da forma e de como a massa de um corpo é distribuída em um movimento circular.

Para apenas uma partícula, temos uma massa pontual m associada e com energia cinética:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

$v = \omega r$ → $mr^2 = I$

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \ (joule - J)$$

K → Energia Cinética de Rotação da partícula.

I → Momento de Inércia da partícula.

ω → Velocidade Angular da partícula.

10

ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO

Para um corpo rígido, podemos usar:

$$K_T = \frac{1}{2}I_T\omega^2 \ (joule - J)$$

K_T → Energia Cinética de Rotação do corpo rígido.

I_T → Momento de Inércia da partícula.

ω → Velocidade Angular da partícula.

Corpo	Momento de Inércia (kg . m2)
Esfera maciça em relação a um diâmetro	$I = \frac{2}{5}Mr^2$
Disco em relação ao seu eixo central	$I = \frac{1}{2}Mr^2$
Anel fino em relação ao eixo central	$I = Mr^2$

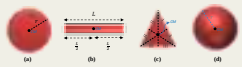
- Quanto maior próximo os átomos que compõe o corpo rígido estão do eixo de rotação, maior a facilidade de fazê-lo girar.



11

CENTRO DE MASSA

O ponto de um corpo, ou um sistema de corpos, onde se pode considerar que toda a concentração de massa se concentra sobre ele é chamado de centro de massa CM, comumente chamado de centro de gravidade.



O centro geométrico de objetos não homogêneos pode não ser o mesmo do seu CM devido às suas características irregulares., dificultando a sua análise para cálculos envolvendo essa distribuição de massa.

12

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS – ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

4.01 – Qual é a energia cinética de rotação de uma partícula, de um corpo rígido, com um momento de inércia de 0,1 $kg \cdot m^2$ em relação ao seu eixo de rotação e uma velocidade angular de 5 rad/s?

4.02 – O momento de inercia de um corpo rígido, de massa 2 *kg*, em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa, é de 0,02 $kg.m^2$. Qual o momento de inercia em relação a um ponto *P* desse corpo por onde passa outro eixo de rotação, distante 0,1 metros perpendicularmente do eixo que passa pelo centro de massa?

4.03 – Um ponto material com uma massa de 0,5 *kg* está em rotação ao redor de um eixo perpendicular a ele. A distância entre o eixo e o ponto material é de 0,2 metros. Determine o momento de inércia desse ponto material em relação ao eixo de rotação.

13

EXERCÍCIOS PROPOSTOS – ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

4.01 – Qual é a energia cinética de rotação de uma partícula contida em um corpo rígido com um momento de inércia de 0,15 kgm^2 em relação ao seu eixo de rotação, quando ela gira com uma velocidade angular de 7 rad/s?

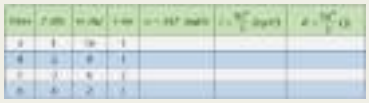
4.02 – O momento de inércia de um corpo rígido, com uma massa de 3 *kg*, em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa, é de 0,015 kgm^2. Qual é o momento de inércia em relação a um ponto Q desse corpo, por onde passa outro eixo de rotação, que está a uma distância de 0,2 metros perpendicularmente ao eixo que passa pelo seu centro de massa?

4.03 – Um ponto material de massa 1 *kg* gira em torno de um eixo perpendicular a ele. A distância entre o eixo de rotação e o ponto material é de 0,5 metros. Determine o momento de inércia deste ponto material em relação ao eixo de rotação.

14

USANDO O ALGODOO – ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

USAR O MANUAL DE LABORATÓRIO VIRTUAL



15



Capítulo 8 **Energia Cinética de Rolamento**

Turma: 1ª Série "A" - Matutino

Professor: Anderson Gomes da Silva

15 de julho de 2024

16

ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO

A **energia cinética de rolamento** de um corpo corresponde à soma das suas energias cinéticas de rotação e de translação.



$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$ $K = \frac{1}{2}MV_{CM}^2$ $K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}MV_{CM}^2(I)$

K → Energia Cinética de Rolamento do corpo rígido.

I_{CM} → Momento de Inércia que passa pelo Centro de Massa do corpo rígido.

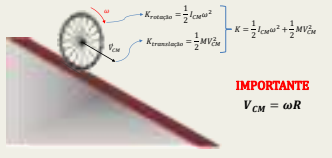
ω → Velocidade Angular do corpo rígido.

M → Massa do corpo rígido.

V_{CM} → Velocidade do Centro de Massa do corpo rígido.

17

ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO



IMPORTANTE

$V_{CM} = \omega R$

18

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS - ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO

8.01 – Um veículo está em movimento retilíneo uniforme com velocidade linear escalar de 20 m/s. Suas rodas, homogêneas e idênticas, cada uma com massa $M = 10\ kg$ e raio $R = 25\ cm$, por consequência do movimento linear do veículo, possuem velocidade angular constante e seus momentos de inércia podem ser calculados por meio da equação $\left(I = \frac{1}{2}MR^2\right)$, em que M é a massa da roda e R, o seu raio.

De acordo com o enunciado, determine, para uma das rodas do veículo:

a) a sua velocidade do centro de massa;

b) a sua velocidade angular;

c) o seu momento de inércia;

d) a sua energia cinética de rotação;

e) a sua energia cinética de translação;

f) a sua energia cinética de rolamento.

19

EXERCÍCIOS PROPOSTOS - ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO

8.01 – Um carro está em movimento retilíneo uniforme com velocidade linear escalar de 15 m/s. Suas rodas, homogêneas e idênticas, cada uma com massa $M = 8\ kg$ e raio $R = 20\ cm$, por consequência do movimento linear do veículo, possuem velocidade angular constante. De acordo com o enunciado, determine, para uma das rodas do veículo:

Use $\left(I = \frac{1}{2}MR^2\right)$ para calcular o momento de inércia da roda.

a) a sua velocidade do centro de massa;

b) a sua velocidade angular;

c) o seu momento de inércia;

d) a sua energia cinética de rotação;

e) a sua energia cinética de translação;

f) a sua energia cinética de rolamento.

20

USANDO O ALGODOO- ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO



21

USANDO O ALGODOO- ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO



22

APÊNDICE C – TESTES DE CONHECIMENTO

Escola Estadual Professor Eliah Maia do Rêgo

Série/turma: 1ª "A" **Turno:** Matutino Data: ____/____/_____

Professor: Anderson Gomes da Silva

Aluno(a): _____

INSTRUÇÕES

- O objetivo deste questionário é verificar o que você já sabe sobre o tema e suas respostas serão utilizadas para que as suas aulas de Física sejam preparadas da forma mais adequada para atender às suas necessidades educacionais.
- Assim, é fundamental que você seja o mais sincero possível na sua resolução, pois a sua participação é de extrema importância para que você seja avaliado.

PRÉ-TESTE 01

01 – O que é um ângulo?

_____

_____

_____

02 – Em qual unidade medimos o ângulo?

_____

_____

_____

03 – Quais são os tipos de ângulos que podemos encontrar?

_____

_____

04 – O que você entende por posição angular de um objeto?

_____

_____

_____

_____

05 – O que você entende por deslocamento angular de um corpo rígido?

_____

_____

_____

06 – Qual a diferença entre posição angular e deslocamento angular de um corpo rígido?

_____

_____

_____

07 – Qual a relação entre a sua velocidade angular e o seu período de rotação?

08 – Qual a relação entre a velocidade angular e a frequência de rotação?

09 – Em um movimento circular uniforme, a velocidade angular é igual ou diferente em todos os pontos de um corpo rígido? E em relação à velocidade linear?

10 – Em um movimento circular uniforme, a velocidade linear é igual ou diferente em todos os pontos de um corpo rígido?

11 – O que você entende por aceleração em um movimento circular?

12 – Qual a diferença entre aceleração linear e aceleração centrípeta?

13 – Se a "velocidade linear não muda" em um movimento uniforme, por que um corpo muda de direção em um movimento circular uniforme?

14 – O que você entende por energia?

15 – Cite alguns tipos de energia.

16 – Como a energia é usada no dia a dia?

17 – O que você entende por energia cinética?

18 – Qual a diferença entre energia cinética de translação, também chamada de linear, e energia cinética de rotação?

19 – Você conhece algum programa de computador usado para fins educacionais? Quais?

20 – Você conhece um programa de computador chamado Algodoo? Se sim, já utilizou? Para que serve?

Muito obrigado por você ter respondido todo o questionário da maneira mais completa e sincera possível! Certamente, o modo como serão abordados os conteúdos referentes aos temas contidos neste questionário serão mais relevantes para o seu aprendizado!

Escola Estadual Professor Eliah Maia do Rêgo

Série/turma: 1ª "A" **Turno:** Matutino Data: ____/____/_____

Professor: Anderson Gomes da Silva

Aluno(a): _____

INSTRUÇÕES

- O objetivo deste questionário é verificar o que você já sabe sobre o tema após uma breve discussão e suas respostas serão utilizadas para que as suas aulas de Física sejam preparadas da forma mais adequada para atender às suas necessidades educacionais.
- Assim, é fundamental que você seja o mais sincero possível na sua resolução, pois a sua participação é de extrema importância para que você seja avaliado.

PRÉ-TESTE 02

01 – Qual a diferença entre o movimento circular e o movimento retilíneo de um objeto?

_____

_____

_____

02 – Cite 5 exemplos de objetos que podem realizar um movimento circular no seu dia a dia.

_____

_____

_____

03 – Ao girar uma bola de basquete em sua mão, existe um ponto nela que parece não se mover. Você saberia dizer qual é?

_____

04 – Explique qual a relação entre a velocidade angular e a frequência de um corpo em movimento circular?

_____

_____

_____

05 – Cite 3 exemplos de objetos que possuem energia cinética no seu dia a dia.

_____

_____

_____

06 – Explique o conceito de trabalho.

_____

_____

_____

07 – Cite 3 exemplos de situações em que o trabalho é realizado.

_____

_____

_____

08 – Qual a relação entre trabalho e energia cinética?

_____

_____

_____

09 – Cite 3 exemplos de situações em que a energia cinética de um corpo é aumentada.

_____

_____

_____

10 – Cite 3 exemplos de situações em que a energia cinética de um corpo é diminuída.

_____

_____

_____

11 – Qual a relação entre a energia cinética de rotação e o funcionamento de um carrinho de brinquedo?

_____

_____

_____

12 – Explique como a energia cinética de rotação é importante para o movimento de uma bicicleta.

_____

_____

_____

13 – Qual a relação entre a energia cinética de rotação e a força centrífuga em um brinquedo giratório?

_____

_____

_____

14 – Cite 3 situações do dia a dia em que a energia cinética de rotação e/ou a energia cinética de translação são importantes.

_____

_____

_____

15 – Imagine que você está empurrando um carrinho de brinquedo em linha reta. Em qual situação o carrinho terá mais energia cinética: quando as rodas estão girando ou quando as rodas estão travadas? Por quê?

_____

_____

_____

16 – Imagine um disco girando em torno de um eixo. Se você aumentar o raio do disco sem alterar sua massa ou velocidade de rotação, o que acontecerá com sua energia cinética de rotação?

_____

_____

_____

17 – Explique como a energia cinética de rotação pode ser usada para gerar energia elétrica.

_____

_____

_____

18 – Cite 3 exemplos de máquinas que funcionam utilizando a energia cinética de rotação.

_____

_____

_____

19 – Cite 3 exemplos de atividades físicas que envolvem a energia cinética de rotação.

_____

_____

_____

20 – Qual a importância de entendermos os conceitos de movimento circular, rotação e energia para nosso dia a dia?

_____

_____

_____

Muito obrigado por você ter respondido todo o questionário da maneira mais completa e sincera possível! Certamente, o modo como serão abordados os conteúdos referentes aos temas contidos neste questionário serão mais relevantes para o seu aprendizado!

Escola Estadual Professor Eliah Maia do Rêgo

Série/turma: 1ª "A" **Turno:** Matutino Data: ____/____/_____

Professor: Anderson Gomes da Silva

Aluno(a): _____

INSTRUÇÕES

- O objetivo deste questionário é verificar os indícios de aprendizagem em relação ao conteúdo estudado (**ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO** e **ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO**).
- Assim, é fundamental que você resolva às questões da forma mais completa possível, pois a sua participação é de extrema importância para que você seja avaliado.

AVALIAÇÃO DE FÍSICA – 2º BIMESTRE - PÓS-TESTE

01 – Explique a diferença entre energia cinética de rotação e energia cinética de translação.

_____

_____

_____

_____

_____

02 – Defina momento de inércia. Qual a influência que essa grandeza possui no movimento de giro de um corpo?

_____

_____

_____

_____

03 – O que significa o centro de massa de um corpo rígido.

_____

_____

04 – Existe alguma diferença em calcular o momento de inércia de uma partícula e de um corpo rígido com distribuição de massa contínua?

_____

_____

_____

_____

05. Um disco homogêneo de metal de massa 2 kg e raio 0,5 m gira em torno de seu eixo central com velocidade angular de 10 rad/s. Sabendo que o momento de inércia de um disco homogêneo pode ser obtido usando a equação $I = \frac{MR^2}{2}$, calcule a energia cinética de rotação do disco.

06 – Qual é a energia cinética de rotação de uma partícula contida em um corpo rígido com um momento de inércia de 0,2 $kg \cdot m^2$ em relação ao seu eixo de rotação, quando ela gira com uma velocidade angular de 8 *rad/s*?

07 – Um ponto material de massa 0,2 *kg* gira em torno de um eixo perpendicular a ele. A distância entre o eixo de rotação e o ponto material é de 0,6 metros. Determine o momento de inércia deste ponto material em relação ao eixo de rotação.

08 – O momento de inercia de um corpo rígido, de massa 5 *kg*, em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa, é de 0,08 $kg.m^2$. Use o teorema dos eixos paralelos ($I_P = I_{CM} + Mh^2$) e calcule o momento de inercia em relação a um ponto *P* desse corpo por onde passa outro eixo de rotação, distante 0,15 metro perpendicularmente do eixo que passa pelo centro de massa?

09 - Um veículo está em movimento retilíneo uniforme com velocidade linear escalar de 30 *m/s*. Suas rodas, homogêneas e idênticas, cada uma com massa $M = 12\ kg$ e raio $R = 20\ cm = 0{,}2\ m$, por consequência do movimento linear do veículo, possuem velocidade angular constante e seus momentos de inércia podem ser calculados por meio da equação $\left(I = \frac{1}{2}MR^2\right)$, em que M é a massa da roda e R, o seu raio. De acordo com o enunciado, determine, para uma das rodas do veículo:

a) a sua velocidade do centro de massa;

b) a sua velocidade angular;

c) o seu momento de inércia;

d) a sua energia cinética de rotação;

e) a sua energia cinética de translação;

f) a sua energia cinética de rolamento.

10 - Em seu dia a dia, quais objetos ou situações você observa que envolvem os conceitos de energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento? Faça uma breve descrição da sua resposta e explique como esses conceitos se aplicam na prática.

RASCUNHO PARA CÁLCULOS

Parabéns por ter concluído a avaliação com êxito! Espero que o conteúdo estudado e as interações com o Algodoo durante o bimestre tenha o ajudado responder às questões!

Escola Estadual Professor Eliah Maia do Rêgo

Série/turma: 1ª "A" **Turno:** Matutino Data: ____/____/_____

Professor: Anderson Gomes da Silva

Aluno(a): _____

INSTRUÇÕES

- O objetivo deste questionário é fazer um levantamento dos resultados da aplicação da sequência didática utilizada no 2º bimestre por meio da autoavaliação do seu aprendizado e da sua opinião acerca de todo o processo de estudo, principalmente referente ao uso do Algodoo. Portanto, seja o mais sincero possível nas suas respostas.

AUTOAVALIAÇÃO E PESQUISA FINAL DE OPINIÃO

PARTE 1 - AUTOAVALIAÇÃO

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

1 – Em sua opinião, quais eram seus conhecimentos prévios sobre energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento antes de iniciar a sequência didática?

a) Não tinha nenhum conhecimento sobre esses conceitos.
b) Tinha conhecimento superficial sobre alguns dos conceitos, mas precisava de aprofundamento.
c) Tinha conhecimento básico sobre os conceitos e suas aplicações.
d) Tinha bom conhecimento sobre os conceitos e suas aplicações.
e) Tinha ótimo conhecimento sobre os conceitos e suas aplicações.

2 – O que você achou do questionário inicial utilizado para verificar seus conhecimentos prévios?

a) Não foi útil para avaliar meus conhecimentos.
b) Foi um pouco útil, mas poderia ter sido mais abrangente.
c) Foi útil para avaliar meus conhecimentos e identificar pontos de aprimoramento.
d) Foi muito útil para avaliar meus conhecimentos e identificar pontos de aprimoramento.
e) Foi extremamente útil para avaliar meus conhecimentos e identificar pontos de aprimoramento.

APRENDIZADO DURANTE A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

3 – Qual foi a sua percepção sobre a clareza e a organização das aulas expositivas (quadro e *slides*)?

a) As aulas foram confusas e desorganizadas.
b) As aulas foram um pouco confusas e desorganizadas.
c) As aulas foram claras e organizadas, mas com alguns pontos que poderiam ser melhorados.
d) As aulas foram muito claras e organizadas.
e) As aulas foram extremamente claras e organizadas.

4 – Como você avalia a efetividade do uso do *software Algodoo* para o aprendizado dos conceitos?

a) O uso do Algodoo não foi útil para o meu aprendizado.
b) O uso do Algodoo foi um pouco útil, mas poderia ter sido mais explorado.
c) O uso do Algodoo foi útil para o meu aprendizado, mas com algumas limitações.
d) O uso do Algodoo foi muito útil para o meu aprendizado.
e) O uso do Algodoo foi extremamente útil para o meu aprendizado.

5 – Quanto você se sente confiante na aplicação dos conceitos de energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento após a sequência didática?

a) Não me sinto confiante na aplicação dos conceitos.
b) Me sinto um pouco confiante na aplicação dos conceitos.
c) Me sinto confiante na aplicação dos conceitos básicos.
d) Me sinto muito confiante na aplicação dos conceitos.
e) Me sinto extremamente confiante na aplicação dos conceitos.

6 – O que você achou da avaliação final da sequência didática?

a) A avaliação não foi justa e não avaliou meus conhecimentos adequadamente.
b) A avaliação foi um pouco injusta e poderia ter sido mais abrangente.
c) A avaliação foi justa e avaliou meus conhecimentos de forma adequada.
d) A avaliação foi muito justa e avaliou meus conhecimentos de forma abrangente.
e) A avaliação foi extremamente justa e avaliou meus conhecimentos de forma abrangente e precisa.

SUGESTÕES PARA MELHORIA

7 – O que você acha que poderia mudar para melhorar a metodologia utilizada na sequência didática?

_____

_____

_____

8 – Você acha que as aulas deveriam ser dadas de outra forma ou em outro ambiente? Qual?

_____

_____

_____

9 – O que mais motivou você a participar das aulas e das atividades durante todo o 2º bimestre?

_____

_____

_____

10 – Você tem alguma sugestão de como o seu professor deveria ter abordado o conteúdo?

_____

_____

_____

11 – Você tem outros comentários ou sugestões que gostaria de compartilhar?

_____

_____

_____

PARTE 2: AVALIAÇÃO DAS AULAS

CLAREZA DAS EXPLICAÇÕES

12 – As explicações dos conceitos foram claras e fáceis de entender?

13 – O professor utilizou exemplos e recursos visuais que facilitaram o aprendizado?

14 – O professor respondeu às suas dúvidas de forma satisfatória?

UTILIZAÇÃO DO *EBOOK* E DO ALGODOO

15 – O que você achou no livro digital utilizado? Ele possui uma linguagem de fácil compreensão? As figuras estão bem construídas? É fácil navegar pelas partes do *Ebook*? Ele aborda bem o conteúdo por meio do *software Algodoo*? A quantidade de exercícios é satisfatória? O conteúdo está bem dividido nos capítulos? O que ele poderia ser acrescentado ou retirado para melhorá-lo?

16 – As atividades com o *Algodoo* foram relevantes para o aprendizado dos conceitos?

17 – O professor orientou o uso do *Algodoo* de forma eficaz?

18 – Qual a sua opinião final sobre o uso do *Algodoo* para aprender Física?

PARTE 3: CONCEITO FINAL DE AUTOAVALIAÇÃO

19 – Em uma escala de 0 a 10, sendo 0 para EXTREMAMENTE RUIM e 10 para EXTREMAMENTE BOM, como você avalia seu aprendizado no final do 2º bimestre (período de aplicação da sequência didática)?

(0) (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10)

Obrigado pela sua participação! As suas respostas servirão para aprimorar futuras abordagens dos conteúdos e para melhoria do material didático utilizado.

APÊNDICE D – MANUAL DE LABORATÓRIO DIGITAL

Escola Estadual Professor Eliah Maia do Rêgo

Série/turma: 1ª "A" **Turno:** Matutino Data: ____/____/_____

Professor: Anderson Gomes da Silva

Aluno(a): _____

Aluno(a): _____

Aluno(a): _____

Aluno(a): _____

Aluno(a): _____

INSTRUÇÕES

- Para esta atividade, vocês, alunos, para facilitar a sua execução, precisarão fazê-la em um computador ou notebook com sistema operacional *Windows*.
- Sigam os passos a seguir para a criação de uma simulação de quatro discos rígidos homogêneos em movimento de rotação para cálculo das suas energias cinéticas de rotação.
- Você precisará fazer o download do programa e, se preferir, da sua extensão de tradução para o português. Para isso, use o navegador de *internet* da sua preferência. Em caso de problemas de acesso, sugerimos o navegador **MOZILA FIREFOX**.

LABORATÓRIO DIGITAL NO ALGODOO

PASSO 1: Primeiro, você deve acessar o site de *download* do programa clicando no *link* a seguir ou digitando-o no seu navegador de *internet*:

http://www.algodoo.com/download/

Depois disso, clique no ícone de *download* grátis no final da página para baixar o *Algodoo***,** como ilustrado na figura abaixo:



Fonte: Página oficial de download do Algodoo - *http://www.algodoo.com/download/*.

Execute o arquivo (**Algodoo_2_1_0-Win32.exe**) que você acabou de baixar para instalar o programa no seu computador.

Se preferir, você também pode baixar e instalar a extensão que permite traduzir o idioma do *software* para português por meio do *link* abaixo:

http://www.algodoo.com/forum/viewtopic.php?f=30&t=12229&p=86459&hilit=tradu%C3%A7%C3%A3o&sid=2ed19f082184cf645d2a3a6a7d9a9be8#p86459

Veja o tutorial de como instalar a tradução em português acessando o *link* a seguir:

https://www.youtube.com/watch?v=3DErSjJkjeI

A imagem abaixo ilustra a página inicial do Algodoo já com a tradução em português:



Fonte: Captura de tela do Algodoo.

PASSO 2: Com a tela inicial do Algodoo aberta, clique em **"Novo cenário"**, como mostra a imagem abaixo:



Fonte: Captura de tela do Algodoo.

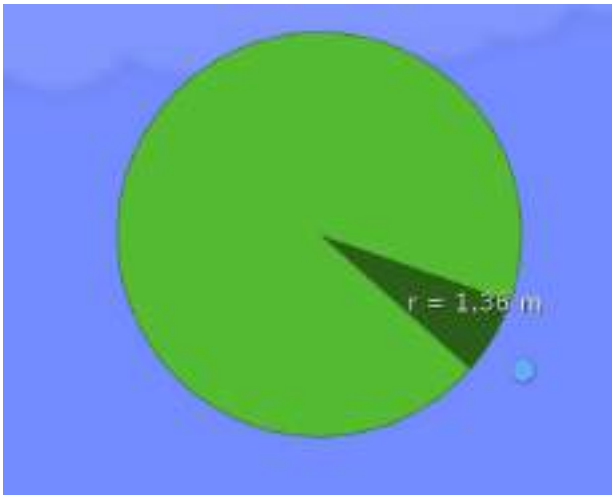
Dentre os cenários disponíveis, escolha o que mais lhe agradar:



Fonte: Captura de tela do Algodoo.

PASSO 3: Com o novo cenário aberto, escolha a “Ferramenta Círculo” e crie quatro círculos perfeitos de tamanhos diferentes, como ilustram as imagens a seguir (não esqueça de anotar os tamanhos dos raios dos círculos que você acabou de criar):

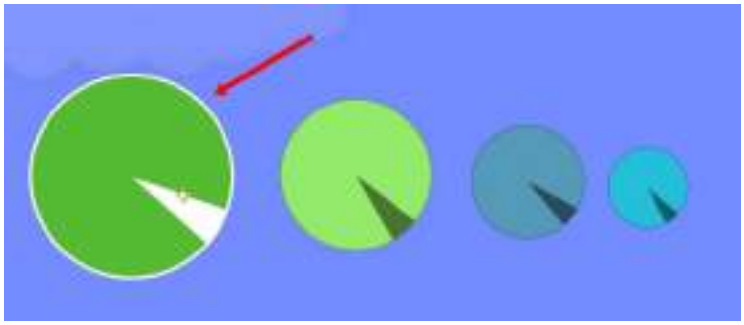




Fonte: Capturas de telas do Algodoo.

PASSO 3: Agora, você poderá atribuir um valor de massa para cada um dos discos que você acabou de criar. Para isso, clique no disco desejado e atribua a sua massa, conforme as imagens a seguir:

Faça isso para cada um dos discos, escolhendo sempre valores de massas diferentes. Não altere os demais valores.





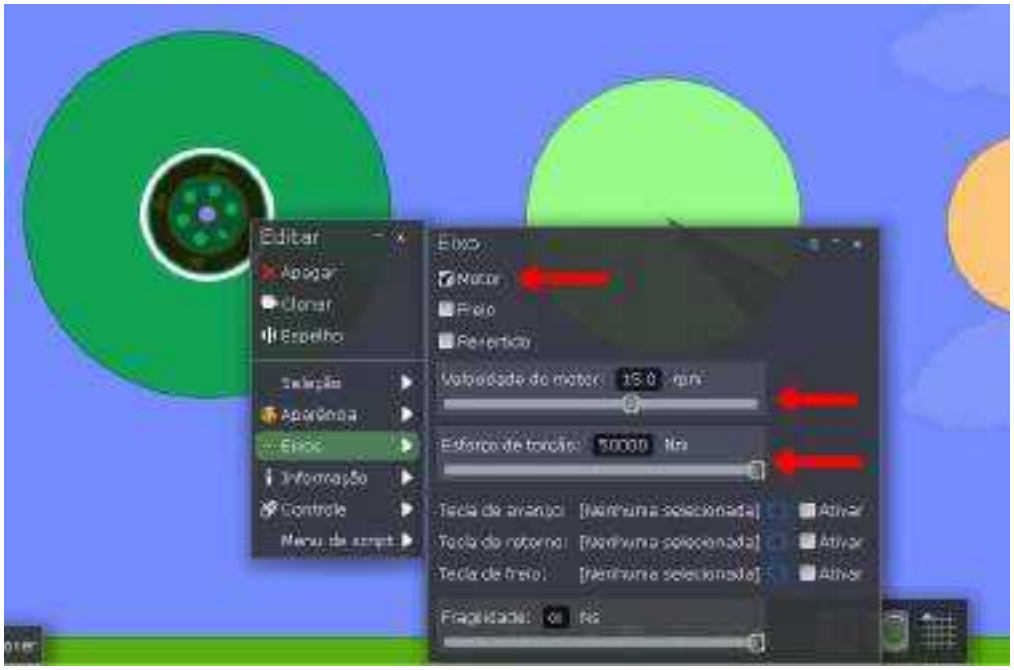
Fonte: Capturas de telas do Algodoo.

PASSO 4: Depois de atribuir as massas dos quatro discos, adicione um eixo no centro de cada um deles. Para isso, clique com o botão direito do *mouse* sobre o disco e siga os passos a seguir:



Fonte: Captura de tela do Algodoo.

PASSO 5: Com os eixos adicionados, clique com o botão direito do *mouse* sobre cada um dos eixos, ative a opção **"Motor"** e atribua um valor diferente para a frequência de giro de cada disco. Esse valor é fundamental para determinar as suas velocidades angulares. A unidade de frequência no programa está em rpm (rotações por minuto), sendo que 60 rpm equivalem a 1 *Hz*, ou seja, 60 rotações em um minuto é o mesmo que uma rotação em um segundo. Não esqueça de anotar os valores das frequências de cada disco.

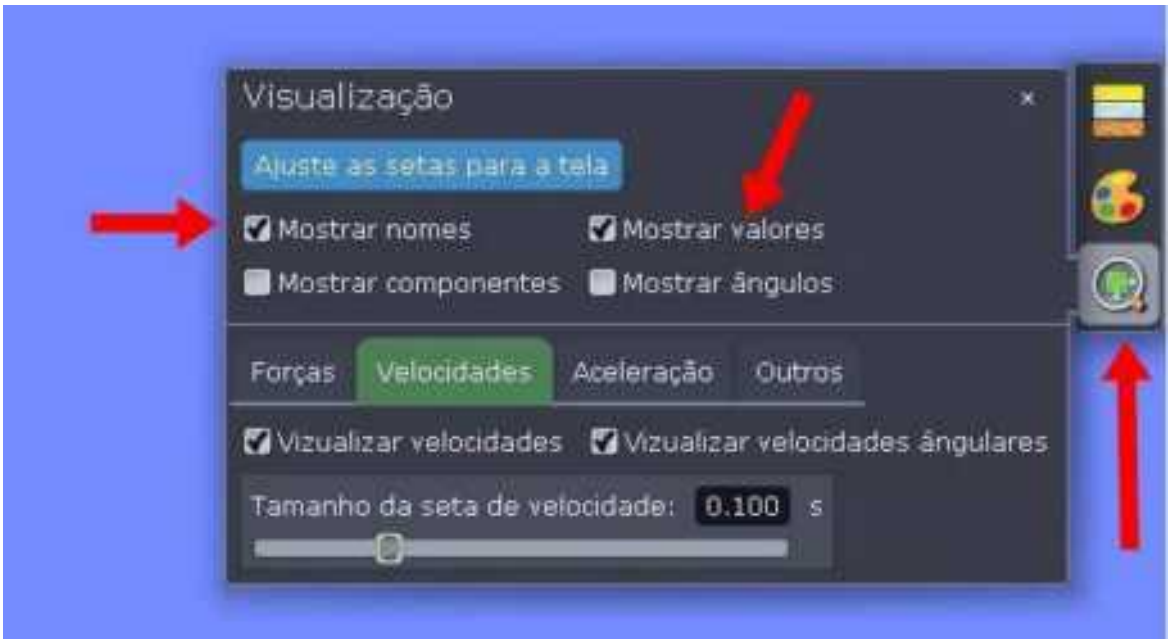


SUGESTÃO: Atribua o valor máximo para o "Esforço de torção" para o disco atingir a velocidade de giro de maneira mais eficiente.

A opção "Revertido" faz com que o disco gire em sentido oposto.

Fonte: Captura de tela do Algodoo.

PASSO 6: Clique no ícone "Visualização" e selecione as caixas de nomes e valores das velocidades angulares, de acordo com a figura a seguir.



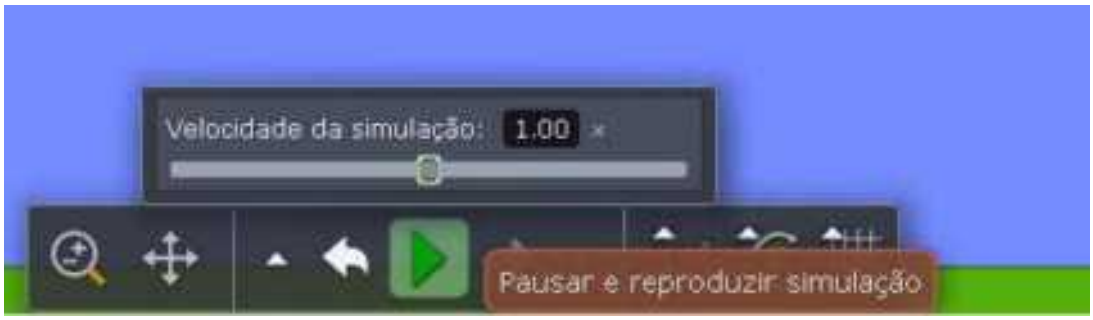
Fonte: Captura de tela do Algodoo.

PASSO 7: Agora, preencha a tabela a seguir com os valores que você atribuiu para cada disco e, em seguida, calcule, além das velocidades angulares e os momentos de inércia, as suas energias cinéticas de rotação:

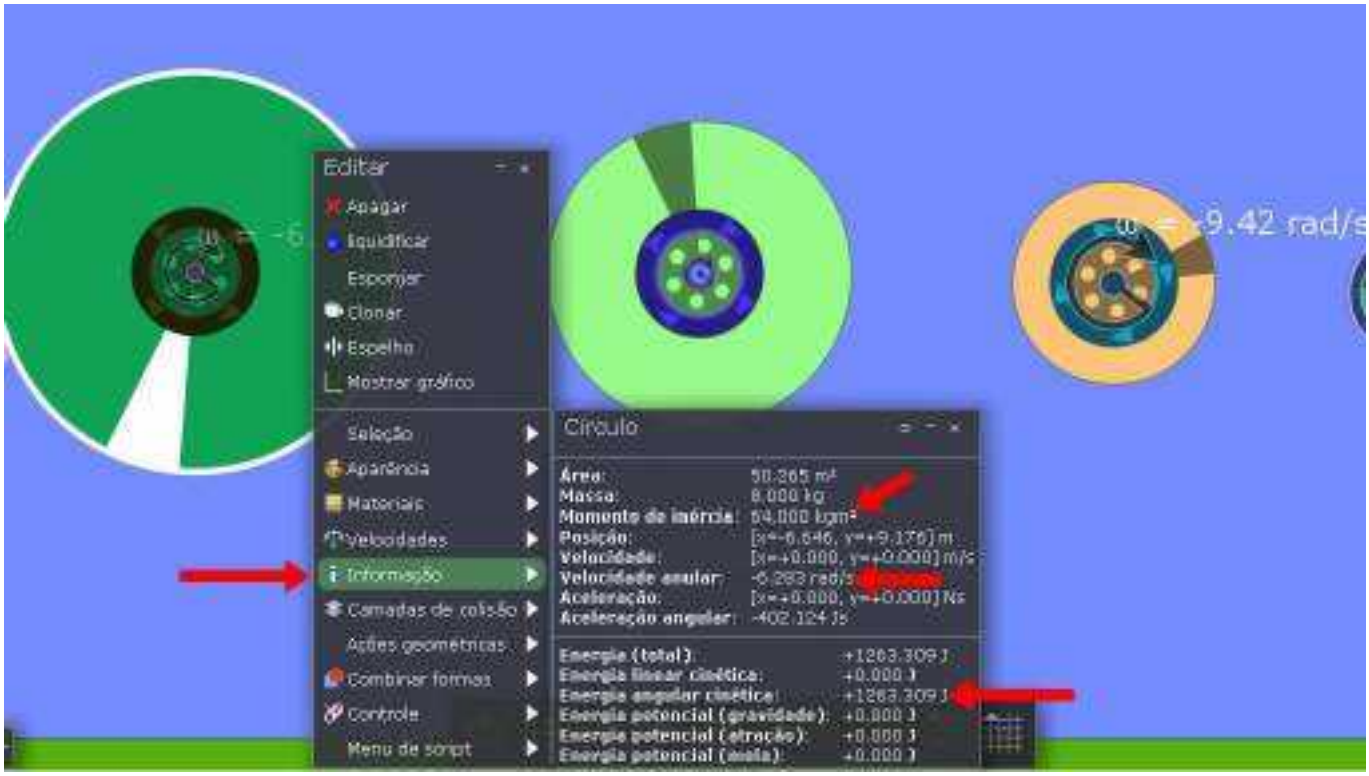
Disco	f (Hz)	m (kg)	r (m)	$\omega = 2\pi f$ (rad/s)	$I = \frac{mr^2}{2}$ (kgm^2)	$K = \frac{I\omega^2}{2}$ (J)
A						
B						
C						
D						

Tabela para cálculo da velocidade angular, momento de inércia e energia angular cinética dos discos homogêneos

PASSO 8: Por fim, reproduza a simulação e confira os valores das velocidades angulares, momentos de inércia e energia angular cinética de cada disco clicando com o botão direito sobre cada um deles e conferindo essas informações como mostra as figuras a seguir:



Fonte: Captura de tela do Algodoo.



Fonte: Captura de tela do Algodoo.

INFORMAÇÕES ADICIONAIS: Você também pode utilizar as outras ferramentas do software para uma melhor interatividade nas simulações que você está criando. Além disso, também é possível habilitar e desabilitar os efeitos gravitacionais e de resistência do ar caso sua simulação não leve em consideração esses fatores.



Fonte: Captura de tela do Algodoo.

REFERÊNCIAS

ALGODOO. **[Software]**. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 12 mar. 2024.

ALGODOO. **Tradução do Algodoo**. Fórum Algodoo. Disponível em: <http://www.algodoo.com/forum/viewtopic.php?f=30&t=12229&p=86459&hilit=tradu%C3%A7%C3%A3o&sid=2ed19f082184cf645d2a3a6a7d9a9be8#p86459> . Publicado em: 29 set. 2018. Acesso em: 13 mar. 2024.

Introdução à Plataforma Algodoo | GEDAI-MG | CEFET. **Como instalar a tradução PT-BR no Algodoo | Introdução à plataforma Algodoo | GEDAI-MG | CEFET-MG**. YouTube, 05 de maio de 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=3DErSjJkjeI>. Acesso em: 27 mar. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 28 nov. 2023.

APÊNDICE E – PLANILHAS DE TABULAÇÃO DE RESULTADOS

CONTROLE DAS RESPOSTAS NO PRÉ-TESTE I										
COMPETÊNCIA	NÚMERO DA QUESTÃO E QUANTIDADE DE RESPOSTAS									
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
Domina										
Bom conhecimento										
Conhecimento básico										
Precisa de reforço										
Não respondeu										
COMPETÊNCIA	NÚMERO DA QUESTÃO E QUANTIDADE DE RESPOSTAS									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Domina										
Bom conhecimento										
Conhecimento básico										
Precisa de reforço										
Não respondeu										

CONTROLE DAS RESPOSTAS NO PRÉ-TESTE II										
COMPETÊNCIA	NÚMERO DA QUESTÃO E QUANTIDADE DE RESPOSTAS									
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
Domina										
Bom conhecimento										
Conhecimento básico										
Precisa de reforço										
Não respondeu										
COMPETÊNCIA	NÚMERO DA QUESTÃO E QUANTIDADE DE RESPOSTAS									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Domina										
Bom conhecimento										
Conhecimento básico										
Precisa de reforço										
Não respondeu										

CONTROLE DAS RESPOSTAS NO PÓS-TESTE										
COMPETÊNCIA	NÚMERO DA QUESTÃO E QUANTIDADE DE RESPOSTAS									
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
EXCELENTE										
BOM										
REGULAR										
INSUFICIENTE										
NÃO RESPONDEU										

PARTE 1 – AUTOAVALIAÇÃO (QUESTÕES OBJETIVAS) (OPINIÃO DOS ALUNOS)										
RESPOSTA	NÚMERO DA QUESTÃO E QUANTIDADE DE RESPOSTAS									
	1	2	3	4	5	6				
a										
b										
b										
d										
e										

PARTE 1 – AUTOAVALIAÇÃO (QUESTÕES DISURSIVAS) (OPINOÃO DOS ALUNOS)										
PARÂMETRO	NÚMERO DA QUESTÃO E QUANTIDADE DE RESPOSTAS									
	7	8	9	10	11					
RESPONDEU										
RESPONDEU PARCIALMENTE										
NÃO RESPONDEU										

PARTE 2 – AVALIAÇÃO DAS AULAS (OPINIÃO DOS ALUNOS)										
PARÂMETRO	NÚMERO DA QUESTÃO E QUANTIDADE DE RESPOSTAS									
	12	13	14	15	16	17	18			
RESPONDEU										
RESPONDEU PARCIALMENTE										
NÃO RESPONDEU										

PARTE 3 - CONCEITO FINAL DE AUTOAVALIAÇÃO										
ESCALAS										
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

OS ALUNOS SE IDENTIFICARAM NOS QUESTIONÁRIO FINAL	
PARÂMETRO	QUANTIDADE DE ALUNOS
SIM	
NÃO	

APÊNDICE F – PRODUTO EDUCACIONAL

SOCIEDADE BRASILEIRA DE FÍSICA – SBF

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO NORTE – IFRN – POLO 10

CAMPUS NATAL CENTRAL

MESTRADO NACIONAL PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA – MNPEF

ALGODOO E A DINÂMICA ROTACIONAL: UMA PROPOSTA DIDÁTICA INTERATIVA PARA O ENSINO DE ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO E ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO MEDIADA PELO USO DO *SOFTWARE ALGODOO*

Anderson Gomes da Silva

Produto Educacional apresentado em Dissertação de Mestrado ao Programa de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física do Curso de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte – IFRN – Polo 10, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Prof. Melquisedec Lourenço da Silva, D.Sc.

Natal/RN

Março de 2025

O material apresentado neste documento pode ser reproduzido livremente desde que citada a sua fonte. As imagens apresentadas são de propriedade dos respectivos autores ou produção própria e utilizadas para fins didáticos. Caso sinta que houve violação de seus direitos autorais, por favor, contate os autores para solução imediata do problema. Este documento é veiculado gratuitamente, sem nenhum tipo de retorno comercial a nenhum dos autores, e visa apenas a divulgação do conhecimento científico.

Os Materiais utilizados na produção deste trabalho podem ser acessados gratuitamente pelo QR-Code:

Ou pelo *link:*

https://drive.google.com/drive/folders/1EkYmAf5b-KmUsw2HWBCBmlbR9jwXwiIS?usp=drive_link

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO 2
O PROGRAMA *ALGODOO* 5
SUGESTÃO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL 9
A Sequência Didática 9
Passos da aplicação do produto educacional 12
Informações sobre a proposta de aplicação da sequência didática 13
Adaptação da Proposta: Uma versão reduzida pala aplicação em menos tempo 18
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 22
APÊNDICE A – MATERIAIS A SEREM UTILIZADOS NA SD 24
APÊNDICE B – EBOOK 58

APRESENTAÇÃO

Desde sempre, o processo de ensino-aprendizagem foi predominantemente baseado na aprendizagem mecânica do indivíduo e essa metodologia é a mais usada nas escolas até os dias de hoje Moreira (2012). Com o avanço tecnológico e o surgimento das mídias digitais, o professor precisa se adequar a essas mudanças para atender as exigências da sociedade atual (Aguiar *et al*, 2020).

Pensando nisso, produzimos um *ebook* intitulado "*Algodoo e a Dinâmica Rotacional*", que se justifica pela necessidade de melhoria da qualidade do ensino de Física, principalmente fazendo uso de recursos tecnológicos; e tem como objetivo geral potencializar o ensino de Física com o auxílio de um *software* computacional gratuito de simulação de fenômenos físicos.

Como objetivos específicos, podemos citar:

- Criar um material didático, interativo e gratuito para professores e alunos usarem como recurso pedagógico quanto ao ensino-aprendizagem de Física com o auxílio do software nas aulas;
- Trabalhar a Dinâmica Rotacional com maior ênfase no Ensino Básico com o auxílio do *Algodoo*;
- Criar atividades interativas e desafiadoras que explorem as funcionalidades do aplicativo;
- Proporcionar ao aluno uma experiência de aprendizagem mais rica e significativa;
- Disseminar o uso do software computacional de simulação física na comunidade escolar.

Esses objetivos estão alinhados à Base Nacional Comum Curricular, que busca, entre outros fatores, fazer uso da tecnologia para potencialização da aprendizagem no ensino de Ciências da Natureza e Suas Tecnologias (Brasil, 2018).

O livro digital compõe um produto educacional a ser aplicado em sala de aula e trata sobre a dinâmica do movimento de rotação e a aplicação desses conceitos em simulações virtuais de Física com o uso de um *software* educacional computacional (*Algodoo*). Seu nível de conteúdo está mais voltado para o Ensino Médio, uma vez que foi construído para ser aplicado nessa etapa. No entanto, ele também pode ser usado por alunos e professores da graduação, pois possui um pequeno resumo de linguagem conceitual e matemática desse nível.

Obras como (Ferraro; Penteado; Torres, 2012), (Gogoy; Agnolo; MELO, 2020), (Halliday; Resnick; Walker, 2016), (Martini *et al*, 2016), (Nussenzveig, 2002), (Ramalho;

Ferraro; Soares, 2015) e (Young; Freedman, 2008), além de outras plataformas, como o *YouTube* e o próprio *site* do *Algodoo*, foram as referências bibliográficas para o embasamento teórico da escrita do *ebook*.

A teoria é dividida em 12 capítulos sobre a **Dinâmica Rotacional** e toda a estrutura do *ebook* se dá como mostra a tabela a seguir.

Tabela 1 - Estrutura do *Ebook*

ESTUTURA DO *EBOOK*	
ELEMENTOS PRÉ-TEXTUAIS	**CAPA** **CONTRACAPA** **EPÍGRAFE** **APRESENTAÇÃO** **LISTA DE FIGURAS** **SUMÁRIO**
ELEMENTOS TEXTUAIS "CAPÍTULOS"	**CAPÍTULO 1 – ROTAÇÃO** **CAPÍTULO 2 – CONEXÕES ENTRE AS VARIÁVEIS LINEARES E AS ANGULARES** **CAPÍTULO 3 – MOVIMENTOS CIRCULARES ACOPLADOS** **CAPÍTULO 4 – ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO** **CAPÍTULO 5 – TORQUE** **CAPÍTULO 6 – TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO** **CAPÍTULO 7 – ROLAMENTO** **CAPÍTULO 8 – ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO** **CAPÍTULO 9 – AS FORÇAS DE ROLAMENTO** **CAPÍTULO 10 – REVISANDO O TORQUE** **CAPÍTULO 11 – MOMENTO ANGULAR** **CAPÍTULO 12 – CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR**
ELEMENTOS PÓS-TEXTUAIS	**RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS** **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS** **APRESENTAÇÃO DO AUTOR** **QUARTA CAPA (VERSO DO LIVRO)**

Fonte: Elaborada pelos autores.

Como mostrado na tabela acima, o *ebook* também conta com toda a estrutura de um livro comum, contendo, além dos capítulos destinados à teoria dos conteúdos, Capa, Contracapa, Epígrafe, Apresentação, Lista de Figuras, Sumário, Respostas dos Exercícios

Propostos, Referências Bibliográficas, Apresentação do Autor e capa de verso do livro.

Além disso, todos os capítulos contam com **Figuras**, T**abelas**, **Equações**, **Exercícios Resolvidos**, **Exercícios Propostos** e **Revisão** do conteúdo abordado no capítulo e, quando necessário, também há um tópico chamado **Saiba mais...**, destinado a apresentar uma linguagem, principalmente de cálculo, a nível de graduação para aqueles alunos ou professores que desejam se aprofundar um pouco mais, mesmo que o conteúdo de todos os capítulos sejam focados na linguagem de Ensino Médio.

Ademais, os capítulos também contam, principalmente, com o tópico **Usando o *Algodoo***, que consiste na demonstração do conteúdo estudado em simulação no programa computacional, em que o leitor pode acessar as simulações por meio de *links*. Também é possível fazer o *download* do *software* gratuitamente e visualizar, inclusive, a vídeos com tutoriais, produzidos pelos autores, de como fazer as simulações. Nesse tópico, também são disponibilizados **Tarefas Propostas**, que correspondem a laboratórios digitais, os quais são conexas com o aplicativo e permitem que os usuários realizem atividades relacionadas com o conteúdo estudado no capítulo e possa interagir com o *software* para ter acesso à simulação que trará o gabarito do exercício feito.

Os vídeos com os tutoriais das simulações no *software* usados em todo o livro podem ser acessados escaneando, com o *smarthphone*, o QR *Code* da figura a seguir e tendo acesso à *playlist* do Canal Anderson Silva, no *YouTube*, o qual é um dos autores da obra.

Figura 1 - QR *Code* dos tutoriais das simulações do *Algodoo*



Ou clique em:
https://youtube.com/playlist?list=PLJ9tsFeU6BHFYXseU1Q OneZYiSy5LdyQX&si=b9r2e8Yq5Mjn_l3t

Fonte: MEQR (gerador de QR *Code*) – Disponível em <*https://me-qr.com/pt*>.

Como o código foi criado por uma página de terceiros, é preciso clicar, depois de ser direcionado ao *site* do gerador do QR *code*, em “Pular anúncio” para ter acesso aos vídeos.

O PROGRAMA *ALGODOO*

A palavra *Algodoo* é a junção das palavras em inglês "*Algorithm*" e "*Do*", que significam algoritmo e fazer, respectivamente, e se refere a um aplicativo de simulação desenvolvido, a princípio, por Emil Ernerfeldt da Universidade Umea, Suécia, em 2008, como objeto de sua dissertação de Mestrado (Batista *et al*, 2022). Nele, podemos criar várias simulações de física em duas dimensões (2D).

Trata-se de um programa gratuito que, com ferramentas de desenho muito simples, como molas, engrenagens, motores, cordas, *lasers*... permite o usuário criar várias simulações de física em duas dimensões (2D) para própria diversão ou para fins pedagógicos. O *software* não tem restrição de idade e possui uma comunidade ativa *online*, por meio de um fórum contigo na sua própria página da *internet*.

O simulador pode ser usado para o ensino de ciências e física, permitindo ser abordado algumas áreas como Cinemática, Dinâmica, Óptica, por exemplo, sendo muito flexível quanto à interatividade das simulações e à hospedagem do conteúdo. Segundo Batista *et al.* (2022, p. 1),

> Esse simulador é utilizado para o ensino de física e permite estudar diversos fenômenos de áreas diversas como Cinemática, Dinâmica, Óptica, Fluidos e Teoria Cinética dos gases entre outros, tendo sempre a opção de alterar a restituição dos corpos, o atrito com a superfície e com o ar, a força gravitacional, a textura, cor, distância e inúmeros outros recursos que permitem ao usuário desenvolver diversas atividades e relacionar a influência das variáveis físicas envolvidas. Outra característica positiva é que o usuário pode alterar a frequência das simulações podendo adequar a capacidade de cada computador.

Na página oficial do aplicativo, disponível no endereço eletrônico "*http://www.algodoo.com/*", contém várias referências que visam atrair o interesse do usuário para a disseminação do seu uso, como, por exemplo, enfatizar que o *software* parece uma ideia muito interessante e está disponível gratuitamente para ser baixado nas plataformas *Windows* ou *Mac* e também no *IPad*, além de oferecer a oportunidade de o próprio usuário criar, por meio de ferramentas de desenho simples, simulações para explorar o universo da Física (Algodoo, c2024).

A página também se preocupa em oferecer vários exemplos inspiradores de simulações e conta com um banco de dados de simulações de outros usuários que oferecem uma experiência mais integral ao seu utilizador.

Para o uso do *Algodoo*, é necessário fazer o *download* do programa na sua página da

internet e possuir o programa *Java* instalado no computador. Para *Windows,* esse último programa pode ser baixado no *link* "*https://www.java.com/pt-BR/*". Possuindo uma interface originalmente em inglês, é possível instalar a extensão em português no endereço eletrônico "*http://www.algodoo.com/forum/viewtopic.php?f=30&t=12229&p=86459&hilit=tradu%C3%A7%C3%A3o&sid=2ed19f082184cf645d2a3a6a7d9a9be8#p86459*" para facilitar o uso de usuários que dominam esse idioma. O *download* da extensão em Português Brasil também pode, em caso de problemas de acesso com o link anterior, ser realizado em "*https://drive.google.com/file/d/1qyqYVmbPE1gQ9OmASdNgV_sRnKXg0Bpn/view?usp=drive_link*".

Figura 2 - Captura de tela da página oficial do *Algodoo* na *internet*



Fonte: Site do Algodoo – Disponível em: <*http://www.algodoo.com/*> *Acesso em 12 mar 2024.*

Para facilitar o manuseio do recurso pelos usuários, é possível, no *software*, salvar os progressos das interações realizadas. Essas simulações salvas podem ficar disponíveis de duas formas: apenas para o autor da simulação, onde ele pode salvar e compartilhar de maneira

privativa os cenários com outras pessoas que fazem uso do programa; e pelo *Algobox*, o qual representa o armazém *online* para compartilhar cenários (Algodoo, c2024).

O *Algebox* está disponível no site oficial do *Algodoo* e qualquer pessoa que visite a página pode ter acesso às simulações lá disponíveis, o que torna esse recurso computacional em uma ferramenta extremamente útil para potencializar o ensino de Física.

Figura 3 - Ferramenta "Salvar e compartilhar cenários" no *Algodoo* e *Algebox*



Fonte: Em a, captura de tela do aplicativo. Em b, captura de tela do *site* do *Algodoo* – Disponível em: *<http://www.algodoo.com/> Acesso em 01 maio 2024.*

O *Algodoo* possui uma interface bastante dinâmica e interativa, como mostrado na Fig. 3, que permite o usuário aprender facilmente como manuseá-lo e começar a criar suas próprias interações, permitindo, inclusive, que profissionais da educação consigam montar seus planos de aulas com auxílio desse recurso computacional educacional, ou até mesmo sequências didáticas para tornar suas aulas mais interativas e significativas.

Figura 1 - Página inicial do *Algodoo* com idioma Português Brasil instalado



Fonte: Captura de tela da página inicial do *Algodoo.*

A seguir, está detalhada, em forma, principalmente, de sugestão, uma metodologia de

aplicação do produto educacional que usará o *Algodoo* por meio de uma sequência didática baseada nas UEPS de Marco Antônio Moreira (2011). Em primeira mão, traremos uma sequência didática bastante detalhada que busca extrair ao máximo todos os recursos do livro digital e da SD escolhida. Ao final, uma forma simplificada também será apresentada, buscando atingir profissionais que desejam usar este material de forma bem mais objetiva e dinâmica.

SUGESTÃO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

Nesta seção, faremos o detalhamento de um percurso metodológico para aplicação do produto educacional, que deve ser usado, inclusive, por professores em sua prática educativa. De forma detalhada, vamos organizar as informações de como poderá ser a sua aplicabilidade; quais serão as ferramentas necessárias para isso; a que público-alvo se destina; uma relativa duração da SD e as etapas que deverão ser seguidas.

Fugindo da abordagem mecânica de ensino, a qual é focada incisivamente na repetição e memorização, e baseada na Teoria de Aprendizagem Significativa de Ausubel (1968), o produto educacional, o qual contém o *ebook* com título "*Algodoo e a Dinâmica Rotacional*", que tem como principal característica o uso de um *software* computacional (*Algodoo*) para alinhar a teoria dos conteúdos do livro à prática por meio de simulações virtuais, será aplicado seguindo uma sequência didática norteada, principalmente, nas UEPS de Marco Antônio Moreira (2011), que busca uma forma eficiente de potencializar a aprendizagem do aluno com ênfase nos seus conhecimentos prévios, pois, segundo o autor, a aprendizagem não pode ser mecânica, mas significativa e crítica (Moreira, 2012).

A Sequência Didática

Antes de se iniciar a aplicação de um conjunto de atividades, é necessário organizá-las para se obter o objetivo desejado. Nesse sentido, surge o conceito de sequência didática, a qual se refere a uma organização bem estruturada e sistematizada de atividades. Zabala (1998, p. 18) define o conceito de sequência didática como um conjunto de atividades bem-organizadas quando fala que

> Se realizarmos uma análise destas seqüências buscando os elementos que as compõem, nos daremos conta de que são um *conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos*.

Apesar da proposta de SD aqui estabelecida não ser, necessariamente, fiel em todos os aspectos das UEPS de Moreira (2011), ela está muito próxima e, certamente, mantém os pontos mais relevantes do seu trabalho, como as definições de situações problemas por meio de questionários, verificação de conhecimentos prévios dos alunos e aplicações de pré e pós-testes, por exemplo.

Como o livro digital é relativamente extenso, fizemos aqui, como sugestão, uma SD baseada no conteúdo de dois dos seus doze capítulos (Energia Cinética de Rotação e Energia Cinética de Rolamento) para aplicação. Partindo dessa finalidade e, nesse sentido, os objetivos da SD que será usada para aplicação do produto educacional são:

- Desenvolver unidades de ensino potencialmente significativas, levando em consideração os conhecimentos prévios dos alunos e uma avaliação principalmente contínua durante todo o processo.

- Definir e explicar os conceitos das energias cinéticas de rotação e rolamento de um corpo, relacionando-os com o seu momento de inércia e a sua velocidade angular.

- Identificar situações em que esses tipos de energias relacionadas à rotação e ao rolamento de um corpo são relevantes para a descrição do movimento de um corpo rígido, como na rotação de um disco, de uma esfera ou de um pêndulo.

- Calcular essas energias para diferentes corpos rígidos a partir das suas propriedades geométricas, da distribuição da sua massa e da sua velocidade angular.

- Entender os conceitos de energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento para explicar diferentes fenômenos físicos, como a influência do momento de inércia na estabilidade de objetos em rolamento, como giroscópios e bicicletas, por exemplo.

- Usar um livro eletrônico (*ebook*), que tem como principal característica a utilização de um aplicativo digital, para a potencialização da aprendizagem do aluno por meio de aulas expositivas e práticas.

Esses objetivos estão alinhados à BNCC, que deixa clara a importância do uso de ferramentas digitais em sala de aula quando declara que

> [...] propostas de trabalho que possibilitem aos estudantes o acesso a saberes sobre o mundo digital e a práticas da cultura digital devem também ser priorizadas, já que impactam seu dia a dia nos vários campos de atuação social. Sua utilização na escola não só possibilita maior apropriação técnica e crítica desses recursos, como também é determinante para uma aprendizagem significativa e autônoma pelos estudantes (Brasil, 2018, p. 478).

Ainda de acordo com a BNCC (2018, p. 541 e 543), em suas competências específicas e habilidades de Ciências da Natureza e suas Tecnologias no Ensino Médio, a importância da

análise, representação e explicações do conteúdo específico (Energia Cinética de Rotação e Energia Cinética de Rolamento) com uso de aplicativos digitais que será utilizado na aplicação da SD são

> [...] **(EM13CNT101)** Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas; [...] **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros).

Essas competências e habilidades trazidas pela BNCC estão pautadas na necessidade de atender a definição de educação trazida pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação, a LDB de 1996, que, em seu art. 1º, define a educação como um processo permanente de construção do conhecimento (Brasil, 1996).

Em relação aos recursos para auxiliar no desenvolvimento da sua SD, e para atender aos seus objetivos, podem ser usados, por exemplo, o uso de quadro negro para aulas expositivas sobre o tema; experimentos simples com objetos do cotidiano; vídeos e animações de fenômenos relacionados à temática com o auxílio de projetor de imagens na sala de aula ou na sala de vídeo da escola; *software* computacional (*Algodoo*) para criação de simulações de fenômenos físicos virtuais na sala de aula e no laboratório de informática (Lab. Inf.); questionários e atividades de aprendizagem e avaliação para verificar os conhecimentos pré-existentes dos alunos e suas evoluções cognitivas e sociais durante o processo de aplicação da SD; além, é claro, do uso do livro digital, que consiste no material mais relevante do produto educacional que estará sendo aplicado como ferramenta que dará embasamento teórico e prático acerca do conteúdo abordado e do uso do aplicativo.

Para fazer o levantamento e analisar os conhecimentos prévios dos alunos, como também avaliar a evolução dos conhecimentos adquiridos e bem estruturados nas suas estruturas cognitivas, conforme o modelo da TAS de Ausubel, propomos questionários em papel, que tratarão de conceitos do conteúdo que será abordado e também do *software* utilizado em forma de, inicialmente, pré-teste e, posteriormente, em pós-teste, além de avaliações contínuas por meio de observações da participação e do desempenho dos alunos nas atividades escritas e práticas.

A utilização de questionários físicos e bem estruturados, em relação aos questionários virtuais, que possuem inúmeras vantagens significativas por oferecerem um maior alcance e facilidades por causa dos recursos tecnológicos atuais; é de extrema importância para aplicação da SD que será desenvolvida, pois o emprego de questionários virtuais pode trazer problemas quanto ao alcance desejado, pois seu preenchimento fora de um espaço físico pode fazer com que o público alvo não se sinta atraído em respondê-lo, prejudicando, assim, o andar natural da SD (Bastos *et al*., 2023, p. 631).

Ao final, o aluno também terá a oportunidade de fazer uma autoavaliação para reflexão sobre o próprio processo de aprendizagem, principalmente no que diz respeito ao uso do *Algodoo* como ferramenta de ensino nas aulas de Física, além de ser solicitado um *feedback* a respeito de todo o processo de aplicação da SD e do seu aprendizado.

Passos da aplicação do produto educacional

Como a principal fonte norteadora da SD são as UEPS de Moreira (2011), organizamos um primeiro modelo de aplicação do produto educacional em 18 aulas de 50 minutos cada. Essas aulas estão divididas em 9 encontros de duas aulas cada para facilitar a execução da SD. O número de aulas relativamente alto para aplicação da SD se dá pela busca de aulas mais fluidas, com ênfase na discussão integral dos conteúdos relacionados às energias cinéticas de rotação e rolamento, além das suas respectivas simulações no *Algodoo*.

Consideramos o tempo destinado à aplicação do produto educacional, nessa delimitação de uso de apenas dois dos seus capítulos, suficiente para vencer todas as etapas da sequência didática escolhida, pois a sua aplicação é baseada nas UEPS de Moreira e precisa, no nosso entendimento, de um número de aulas expressivo.

Como já explicado, para satisfazer aos objetivos da sequência didática construída para aplicação do produto educacional, o conteúdo a ser trabalhado em sala de aula durante o processo foi delimitado em apenas dois capítulos do livro digital, pois ele está estruturado muito detalhadamente e sua aplicação na íntegra demandaria um tempo muito maior, quiçá todo um ano letivo.

Na Tab. (2) a seguir, constam as principais informações que devem fazer parte da aplicação do produto educacional, em especial, a do modelo aqui proposto. Nesse caso, o professor deve utilizá-lo de acordo com a sua realidade.

Tabela 2 - Informações relacionadas à aplicação do produto educacional

INFORMAÇÕES SOBRE A APLICAÇÃO DO PRODUTO	
Nome da escola	
Nível de Ensino	
Tipo da escola	
Turma de aplicação do produto	
Turno	
Quantidade de alunos da turma	
Quantidade de aulas	18
Duração da aula	50 min
Quantidade de encontros	9
Duração do encontro	100 min
Duração total de aplicação	2 meses, aproximadamente.
Período do ano letivo	

Fonte: Elaborada pelos autores.

Informações sobre a proposta de aplicação da sequência didática

Seguindo os princípios e os objetivos das UEPS e sua proposta para a criação de uma sequência didática, fundamentada na Teoria de Aprendizagem Significativa de Ausubel, o planejamento das ações, que deverão ocorrer em cada encontro, para garantir que a aplicação do produto educacional ocorra de forma bem satisfatória, atingindo, assim, os objetivos da sequência didática, serão feitos de forma que:

- No primeiro encontro, podem ser exibidos vídeos sobre a temática. Nesse modelo de encontro 1, além da apresentação da SD e aplicação de um pré-teste, deixamos como sugestão dois vídeos do *YouTube*, com títulos "O Que É Energia" e "Energia | Nerdologia", dos canais "Ciência Todo Dia" e "Nerdologia", respectivamente; relacionados aos conceitos de energia, seus tipos e as descobertas da Antiguidade que serviram para a evolução da tecnologia em diversas áreas. A aplicação do pré-teste (modelo nos Apêndices) consistirá em um questionário individual com perguntas introdutórias para fazer um diagnóstico da turma referente aos conhecimentos prévios relacionados aos conteúdos e métodos escolhidos e definidos que serão trabalhados durante o processo de aplicação do produto educacional. Como indicação de estudo, o vídeo, do canal "DOCUMENTARIOS HISTÓRICOS", sobre a evolução do conceito de energia relacionadas às descobertas da Antiguidade, também pode

ser utilizado como material de apoio.

- No segundo, pode ser exposta uma situação-problema relacionada a energia e, principalmente, a energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento, para fazer com que os estudantes reflitam sobre aspectos do seu cotidiano que estejam relacionados com a temática da situação introdutória. Nesse encontro, também sugerimos a realização de um segundo pré-teste (modelo nos Apêndices), sendo as perguntas, agora, com um nível intermediário.
- No terceiro, o *Algodoo* será apresentado como ferramenta de criação de simulações de fenômenos físicos como possibilidade de potencialização do ensino-aprendizagem, bem como o livro eletrônico que será utilizado para aplicação da sequência didática. Nas duas aulas referentes a esse encontro, os alunos terão a possibilidade de conhecer as principais funcionalidades do *software* e de como criar algumas animações sobre temas diversos, principalmente sobre os conteúdos escolhidos para a aplicação da SD.
- Em seguida, no quarto e no quinto encontros, devem ser dadas, nessa perspectiva de aplicação, aulas expositivas no quadro negro e em apresentação de *slides* relacionadas aos conteúdos de energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento, tendo o produto educacional como ferramenta teórica para planejamento dessas aulas. Nesses encontros, os quais serão compostos por quatro aulas de cinquenta minutos cada, também serão feitos exercícios de fixação dos conteúdos, buscando trabalhar a coletividade dos alunos na resolução das questões propostas, tanto do livro didático como de materiais extras.
- No sexto e no sétimo encontros, serão trabalhados a aplicação do conteúdo no *Algodoo*, que também terá o livro digital como material de apoio didático. Com isso, os alunos terão a oportunidade de colocar, de forma coletiva, em prática os conhecimentos que aprenderam relacionados ao manuseio do programa, como também a aplicabilidade do conteúdo aprendido na prática de simulações virtuais disponibilizada gratuitamente pelo *software*. Numa eventual falta de estrutura da escola para o uso de computadores, como a ausência da possibilidade de uso do Lab. Inf., por exemplo, será disponibilizado nos Apêndices deste trabalho, um manual de construção de uma simulação no aplicativo para que o aluno consiga fazer esse trabalho em casa e apresente durante essas aulas. Aqui, vamos levar em consideração que a escola possui esse tipo de problema.
- Após vencida toda a parte teórica e prática do conteúdo, o oitavo encontro será reservado para coletar indícios de aprendizagem dos alunos por meio da aplicação de um pós-teste, realizado por meio de um questionário individual com perguntas de níveis mais avançados

em relação às dos pré-testes sobre as energias cinéticas de rotação e rolamento e sua aplicabilidade no meio social.

- Por fim, no nono e último encontro, as duas aulas serão utilizadas para, em um primeiro momento, o professor dar um *feedback* sobre a aplicação do pós-teste do encontro anterior, corrigindo o questionário e buscando fazer com que o aluno perceba sua evolução de aprendizagem, principalmente no que tange a sua capacidade de captar significados, compreender, explicar e de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema, características essas presentes nas UEPS de Moreira (2011). Aqui, os alunos também terão a oportunidade, na segunda parte do encontro, de se autoavaliar, darem as suas opiniões sobre a sequência didática aplicada e a utilização de simulações virtuais com o *Algodoo* durante as aulas de Física, além de sugestões de melhoria, tudo por meio de um questionário específico e individual (modelo nos Apêndices).

A seguir, encontra-se, de forma prática e resumida, uma tabela que sintetiza todas as informações da sequência didática que será utilizada, dividindo toda a aplicação do produto educacional nos encontros, aulas e seus objetivos. É importante relembrar que os encontros são compostos por duas aulas de cinquenta minutos cada, nesse modelo sugerido, podendo o professor, mais uma vez, adequar essa metodologia às suas necessidades.

Tabela 3 - Informações sobre a aplicação da sequência didática

INFORMAÇÕES SOBRE A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA (continua)			
Encontro	Aula	Atividade	Objetivo
1	1	Apresentação da SD, do conteúdo e exibição e diálogos sobre os vídeos	Apresentar ao aluno a SD a ser trabalhada, além do conteúdo definido, e exibir vídeos para introduzir um conceito amplo sobre a temática a ser estudada durante a aplicação da SD
	2	Aplicação do pré-teste	Aplicar um questionário individual sobre energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento a nível introdutório com o intuito de coletar informações sobre os conhecimentos prévios dos alunos
2	3	Apresentação da situação-problema	Manifestar uma situação-problema sobre a energia cinética de uma roda de um carro e identificar a opinião dos alunos sobre o tema da aula
	4	Aplicação de pré-teste	Submeter a turma a um novo pré-teste individual por meio de um questionário a nível intermediário para analisar se houve uma melhor percepção sobre os conteúdos abordados
3	5 6	Apresentação do *ebook* e do *software Algodoo*	Expor o livro digital na íntegra que será utilizado na SD e realizar introdução ao uso do *Algodoo*

Tabela 3 - Informações sobre a aplicação da sequência didática

INFORMAÇÕES SOBRE A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA (conclusão)			
Encontro	Aula	Atividade	Objetivo
4	7	Aulas expositivas do conteúdo	Apresentar o conteúdo de forma clara e organizada na sala de aula e/ou, com exemplos práticos, utilizando recursos como o *ebook*, o quadro negro e a sala de vídeo
	8		
5	9		
	10		
6	11	Aulas práticas do *Algodoo*	Trabalhar simulações práticas e coletivas sobre o conteúdo estudado no *Algodoo*, usando o laboratório de informática e/ou o projetor de imagens para reforçar o conteúdo estudado, buscando novos significados quanto às situações-problemas
	12		
7	13		
	14		
8	15	Aplicação do pós-teste	Aplicar um questionário individual sobre energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento a nível mais elevado com o intuito de coletar indícios de aprendizagem dos alunos
	16		
9	17	Realização de um *feedback* do pós-teste	Retomar o pós-teste, corrigindo-o e buscando fazer com que o aluno perceba sua evolução de aprendizagem, principalmente no que tange a sua capacidade de captar significados, compreender, explicar e de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema, características essas presentes nas UEPS de Moreira (2011)
	18	Aplicação do questionário de autoavaliação e pesquisa final de opinião	Verificar, por meio de questionários individuais específicos, como o aluno se autoavalia em relação ao seu aprendizado e o que ele achou da SD utilizada

Fonte: Elaborada pelos autores.

Para que a aplicação do produto educacional atinja um número expressivo de alunos e servir, além do uso de outros recursos didáticos, como fator motivante para participação nas etapas da sequência didática, poderá atribuída uma pontuação considerável atrelada à frequência, à participação nas aulas, ao preenchimento dos questionários físicos de conhecimentos e de opinião por parte dos discentes.

Para registro da aplicação da sequência didática, é fundamental que os elementos avaliativos e os recursos fotográficos utilizados preservem o anonimato dos alunos. Costa (2019, p. 2), em relação a importância de manter preservada a identidade dos alunos, fala que

> De um modo geral, é indispensável ao professor conhecer a identidade dos alunos, bem como suas determinantes sociais e econômicas. Mas em casos nos quais os tabus sociais, as crenças religiosas ou os preconceitos inibem a relação de confiança, a não identificação do aluno se faz necessária para a efetivação do processo ensino-aprendizagem. Neste sentido, um processo educativo e/ou comunicativo não implica em um professor conhecer apenas a identidade do seu aluno, mas sim em uma relação de confiança que se estabelece.

Nesse sentido, os recursos de imagens utilizados para registro das atividades envolvendo os discentes deverão levar em conta a sua não identificação.

Em relação à adequação da aplicação da SD com os passos da construção de uma UEPS, a tabela a seguir faz uma compatibilidade entre esses fatores.

Tabela 4 - Comparativo da aplicação da SD com a UEPS de Moreira

COMPARATIVO DA APLICAÇÃO DA SD COM A UEPS DE MOREIRA				
PASSOS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA		**PASSOS DA UMA UEPS**		
Encontro	Aula			
1	1	1	-	-
	2	2	-	-
2	3	3	7	-
	4	2		
3	5	4	7	-
	6			
4	7	4	5	7
	8			
5	9			
	10			
6	11	5	6	7
	12			
7	13			
	14			
8	15	-	7	8
	16			
9	17	-	7	8
	18			

Fonte: Elaborada pelos autores.

Os oito passos da UEPS de Moreira (2011), os quais a tab. (4) acima se refere, a que SD aqui proposta está baseada, são:

- 1 – Definição do tópico específico a ser abordado e sua relação com a disciplina.
- 2 – Criar situações-problemas por meio de discussões, questionários, entre outros para coletar informações sobre os conhecimentos prévios do aluno.
- 3 – Propor situações-problemas, em nível introdutório, para organizar os conhecimentos prévios dos alunos.
- 4 – Apresentar o conteúdo a ser ensinado, com foco na participação coletiva dos alunos.
- 5 – Retornar os aspectos gerais do conteúdo ensinado, que, dessa vez, precisa ser com um maior nível de complexidade, podendo ser usado recursos computacionais.
- 6 – De forma integradora, retomar novamente o conteúdo e propor novos desafios, podendo fazer uso de programas computacionais.
- 7 – Durante toda a aplicação da SD, o aluno deve ser avaliado de forma contínua, levando em consideração seu desempenho individual e coletivo nas tarefas propostas.
- 8 – Verificar se a SD foi exitosa, por meio de avaliação do desempenho dos alunos que busque fornecer evidências de aprendizagem significativa (captação de significados, compreensão, capacidade de explicar, de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema).

Como a aplicação dessa proposta pode ser extensa para a realidade de muitos discentes, sugerimos um modelo mais sintetizado a seguir.

Adaptação da Proposta: Uma versão reduzida pala aplicação em menos tempo

Para que o professor, caso o interesse, consiga aplicar a SD em um tempo menor do que o que foi sugerido anteriormente, apresentaremos, nesta subseção, um modelo mais simplificado dos passos das UEPS de Moreira (2011). Aqui, não seremos repetitivos em descrever, fora das tabelas que serão apresentadas, os eventos que irão compor as aulas, bem como os respectivos passos das UEPS. Assim, o planejamento de ações, de forma bem objetiva, pode ser feito da de acordo com a Tab. (5) a seguir.

Tabela 5 - Comparativo da aplicação simplificada da SD com a UEPS de Moreira

INFORMAÇÕES SOBRE A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA (continua)			
Encontro	Aula	Atividade	Objetivo
1	1	Apresentação da SD, do conteúdo, do *ebook,* do *software Algodoo* e exibição e diálogos sobre os vídeos	Apresentar ao aluno a SD a ser trabalhada, o conteúdo definido, expor o livro digital na íntegra que será utilizado na SD, realizar introdução ao uso do *Algodoo* e exibir vídeos para introduzir um conceito amplo sobre a temática a ser estudada durante a aplicação da SD
	2	Aplicação do pré-teste	Aplicar um questionário individual sobre energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento a nível introdutório com o intuito de coletar informações sobre os conhecimentos prévios dos alunos
2	3 / 4	Aulas expositivas do conteúdo	Apresentar o conteúdo de forma clara e organizada na sala de aula e/ou, com exemplos práticos, utilizando recursos como o *ebook*, o quadro negro e a sala de vídeo
3	5 / 6	Aulas práticas do *Algodoo*	Trabalhar simulações práticas e coletivas sobre o conteúdo estudado no *Algodoo*, usando o laboratório de informática e/ou o projetor de imagens para reforçar o conteúdo estudado, buscando novos significados quanto às situações-problemas
4	7 / 8	Aplicação do pós-teste	Aplicar um questionário individual sobre energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento a nível mais elevado com o intuito de coletar indícios de aprendizagem dos alunos
5	9	Realização de um *feedback* do pós-teste	Retomar o pós-teste, corrigindo-o e buscando fazer com que o aluno perceba sua evolução de aprendizagem, principalmente no que tange a sua capacidade de captar significados, compreender, explicar e de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema, características essas presentes nas UEPS de Moreira (2011)
	10	Aplicação do questionário de autoavaliação e pesquisa final de opinião	Verificar, por meio de questionários individuais específicos, como o aluno se autoavalia em relação ao seu aprendizado e o que ele achou da SD utilizada

Fonte: Elaborada pelos autores.

Observe que o tempo para aplicação do Produto foi reduzido em quase 50%. Logo, em relação aos passos das UEPS, a Tab. (6) abaixo adapta o modelo reduzido às necessidades da nova SD e passa a ser configurada da seguinte forma:

Tabela 6 - Comparativo da aplicação simplificada da SD com a UEPS de Moreira

COMPARATIVO DA APLICAÇÃO DA SD COM A UEPS DE MOREIRA					
PASSOS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA		**PASSOS DA UMA UEPS**			
Encontro	Aula				
1	1	1	3	4	7
	2	2			
2	3	4	5		7
	4				
3	5	5	6		7
	6				
4	7	-	7		8
	8				
5	9	-	7		8
	10				

Fonte: Elaborada pelos autores.

Já as informações sobre a aplicação do produto, nesse modelo reduzido, passam a ser configurado, em relação ao tempo de aplicação, da seguinte forma:

Tabela 2 - Informações relacionadas à aplicação do produto educacional

INFORMAÇÕES SOBRE A APLICAÇÃO DO PRODUTO	
Nome da escola	
Nível de Ensino	
Tipo da escola	
Turma de aplicação do produto	
Turno	
Quantidade de alunos da turma	
Quantidade de aulas	10
Duração da aula	50 min
Quantidade de encontros	5
Duração do encontro	100 min
Duração total de aplicação	1 meses, aproximadamente.
Período do ano letivo	

Fonte: Elaborada pelos autores.

Finalizados esses modelos de metodologia, a qual se pretende aplicar o produto educacional em sala de aula, traremos, a seguir, as Referências Bibliográficas que serviram para a construção e aplicação do Produto Educativo, além de alguns Apêndices que podem ser usados durante a SD, para atingir os objetivos para aplicação do Produto Educacional, bem como os resultados que se pretende chegar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIAR, Mateus Dias *et al*. **Mal-estar docente no ensino de física:** desafios e perspectivas. Research, Society and Development, v. 9, n. 6, e106963265, 2020. ISSN 2525-3409. Disponível em: <https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/3265/3829>. Acesso em: 28 fev. 2024.

ALGODOO. Disponível em:< http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 28 jan. 2023.

ALGODOO. **[Software]**. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 12 mar. 2024.

ALGODOO. **Tradução do Algodoo**. Fórum Algodoo. Disponível em: <http://www.algodoo.com/forum/viewtopic.php?f=30&t=12229&p=86459&hilit=tradu%C3%A7%C3%A3o&sid=2ed19f082184cf645d2a3a6a7d9a9be8#p86459> . Publicado em: 29 set. 2018. Acesso em: 13 mar. 2024.

ALGODOO.COM. **Fórum Algodoo.** Disponível em: <http://www.algodoo.com/forum/viewtopic.php?f=30&t=12229&p=86459&hilit=tradução&sid=2ed19f082184cf645d2a3a6a7d9a9be8#p86459>. Acesso em: 28 nov. 2023.

AUSUBEL, David Paul**. Educational psychology:** a cognitive view. Nova York: Holt, Rienehart and Winston, 1968.

BASTOS, Jennifer Ester de Sousa *et al*. O uso do questionário como ferramenta metodológica: potencialidades e desafios. **Brazilian Journal of Implantology and Health Sciences,** v. 5, n. 3, p. 623-636, 2023.

BATISTA, Michel Corci *et al*. **O software Algodoo como possibilidade para o ensino de física**. Atena Editora, 2022. Disponível em: <https://atenaeditora.com.br/catalogo/ebook/o-software-algodoo-como-possibilidade-para-o-ensino-de-fisica>. Acesso em: 19 fev. 2024.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.** Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 23 dez. 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 25 fev. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 25 fev. 2024. Ciência Todo Dia – Canal do YouTube. **O Que é Energia | Episódio 1.** YouTube, 10 de jun. de 2020. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=3VLPyOLC1nc&t=47s>. Acesso em: 26 fev. 2024.

COSTA, Adriano Medeiros. O anonimato como fator de pertencimento no uso de redes sociais on-line em projetos educacionais. **Prometeu**, Ano V, n. 1, ISSN 2175-0920, 1-20,

2019. Disponível em: <http://lte.ce.ufrn.br/prometeu/revistas/revista_2019/3.O-ANONIMATO.docx.pdf>. Acesso em: 11 mar. 2024.
DOCUMENTARIOS HISTORICOS.**"Energia & tecnologia" Descobertas da Antiguidade Documentario Completo**. YouTube, 11 de abr. de 2018. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=q_oPJtmPL2E>. Acesso em: 26 fev. 2023.

FERRARO, Nicolau Gilberto; PENTEADO, Paulo Cesar M.; TORRES, Carlos Magno A.; **Física -** Vereda Digital - Volume único. 1. Ed. – São Paulo: Moderna, 2012.

GOGOY, Leandro; AGNOLO, Rosana Maria Dell'; MELO, Wolney C. **Multiversos: Ciências da Natureza:** matéria, energia e a vida – 1. ed. – São Paulo: Editora FTD, 2020.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física:** Mecânica -Volume 1. 10ª ed. Tradução: Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

MARTINI, Glorinha *et al.* **Conexões com a Física** – 3. ed. – São Paulo: Moderna, 2016.

MOREIRA, Marco Antonio. Unidades de Enseñanza Potencialmente Significativas - UEPS. **Aprendizagem Significativa em Revista**, v. 1, n. 2, p. 43-63, 2011.

Nerdologia – Canal do YouTube. **Energia | Nerdologia**. YouTube, 03 de dez. de 2015. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=pXtVUobPQLs>. Acesso em: 25 fev. 2024.

NUSSENZVEIG, H. Moisés. **Curso de Física Básica 1:** Mecânica. 4. Ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

RAMALHO, Francisco Júnior; FERRARO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo Antônio de Toledo. **Os Fundamentos da Física:** Mecânica, Volume 1. São Paulo: Moderna, 2015.

SILVA, Anderson Gomes da; SILVA, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 28 nov. 2023.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 28 nov. 2023.

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. Sears & Zemansky - **Física I:** Mecânica - Volume 1. 12ª ed. Tradução de Sonia Midori Yamamoto. São Paulo: Pearson Universidades, 2008.

ZABALA, A. **A Prática Educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A – MATERIAIS A SEREM UTILIZADOS NA SD

PLANO DE AULA 01

Instituição de ensino:

Professor: | **Data:** | **Duração:**

Área do conhecimento: | **Disciplina:**

Turma:

Temática: *O que é Energia?* – Nestas aulas, serão exibidos, além da apresentação da SD, dois vídeos do YouTube, com títulos "O Que É Energia" e *"Energia | Nerdologia"*, dos canais "Ciência Todo Dia" e "Nerdologia", respectivamente; relacionados aos conceitos de energia, seus tipos e as descobertas da Antiguidade que serviram para a evolução da tecnologia em diversas áreas, além da aplicação de um pré-teste, que consistirá em um questionário individual com perguntas introdutórias para fazer um diagnóstico da turma referente aos conhecimento prévios relacionados aos conteúdos e métodos escolhidos e definidos que serão trabalhados durante a aplicação do produto.

Objetivos da Aprendizagem*: 1)* Apresentar ao aluno a SD a ser trabalhada, além do conteúdo definido, e exibir vídeos para introduzir um conceito amplo sobre a temática a ser estudada durante o segundo bimestre. *2)* Aplicar um questionário individual sobre energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento a nível introdutório com o intuito de coletar informações sobre os conhecimentos prévios dos alunos.

Conteúdo Programático*: 1)* Conceitos básicos de energia: definição, tipos e transformações. *2)* Importância e princípios da energia rotacional. *3)* Energia e Movimento Rotacionais: exemplos e aplicações. *4)* Análise de movimento rotacional em situações do cotidiano, como parques de diversões e usinas eólicas, por exemplo. *5)* Uso de softwares computacionais no Ensino de Física.

Metodologia: A aula se inicia com a demonstração do livro digital que será utilizado como material didático durante o bimestre, como também da sequência didática que será trabalhada. A seguir, será haverá uma apresentação interativa sobre o que é energia e alguns tipos de como ela pode se mostrar, através visualização e discussão de vídeos educativos. Logo após, será aplicado um questionário individual que visará coletar conhecimentos prévios dos alunos referentes aos conteúdos que serão estudados durante o bimestre.

Cronograma: Aula 1 - Apresentação da SD, do *Ebook* e visualização de vídeos sobre energia (50 minutos). Aula 2 - Aplicação do 1º pré-teste (50 minutos).

Materiais utilizados: Computador com acesso à internet; projetor de tela para exibição dos vídeos; questionário físico.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante as discussões em grupo e na análise dos resultados dos testes individuais aplicados.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 25 fev. 2024.

Ciência Todo Dia. **O Que é Energia | Episódio 1.** YouTube, 10 de jun. de 2020. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=3VLPyOLC1nc&t=47s>. Acesso em: 26 fev. 2024.

Nerdologia – Canal do YouTube. **Energia | Nerdologia**. YouTube, 03 de dez. de 2015. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=pXtVUobPQLs>. Acesso em: 25 fev. 2024.

PLANO DE AULA 02

Instituição de ensino:

Professor: | **Data:** | **Duração:**

Área do conhecimento: | **Disciplina:**

Turma:

Temática: Apresentação de situação-problema. Nesta aula será exposta uma situação-problema relacionada a energia e, principalmente, a energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento, para fazer com que os estudantes reflitam sobre aspectos do seu cotidiano que estejam relacionados com a temática da situação introdutória. Nesse encontro, será realizado um segundo pré-teste, sendo as perguntas, agora, com um nível intermediário.

Objetivos da Aprendizagem*: 1)* Manifestar uma situação-problema sobre a energia cinética de uma roda de um carro e identificar a opinião dos alunos sobre o tema da aula. *2)* Submeter a turma a um novo pré-teste individual por meio de um questionário a nível intermediário para analisar se houve uma melhor percepção sobre os conteúdos abordados.

Conteúdo Programático*: 1)* Importância e princípios da energia rotacional. *2)* Energia e Movimento Rotacionais: exemplos e aplicações. *3)* Análise de movimento rotacional de uma roda de um carro.

Metodologia: A aula se inicia com uma situação-problema sobre a energia cinética contida em uma roda de um carro em movimento. A sala será dividida em grupo de alunos para debater a temática e verificar suas opiniões sobre o assunto. No final do debate, a turma será submetida a um novo pré-teste individual por meio de um questionário para verificar se os alunos conseguiram aflorar uma melhor percepção em relação ao conteúdo.

Cronograma: Aula 1 – Apresentação e discussão da situação-problema (50 min). Aula 2 – Aplicação do segundo pré-teste (50 minutos).

Materiais utilizados: Computador com acesso à internet; projetor de tela; quadro negro e questionário físico.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante as discussões em grupo e na análise dos resultados dos testes individuais aplicados.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. **[Software]**. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 03

Instituição de ensino:

Professor: | **Data:** | **Duração:**

Área do conhecimento: | **Disciplina:**

Turma:

Temática: O *Algodoo* e o Livro digital "*Algodoo e a Dinâmica Rotacional*". Neste encontro serão apresentados o *softwate* Algodoo e suas funcionalidades, bem como o livro digital "*Algodoo e a Dinâmica Rotacional*" na integra.

Objetivos da Aprendizagem*: 1)* Expor o livro digital na íntegra que será utilizado na SD. *2)* Realizar introdução ao uso do *Algodoo*.

Conteúdo Programático*: 1)* Apresentar, na íntegra, o livro digital "*Algodoo e a Dinâmica Rotacional*". *2)* Introdução ao *Algodoo*.

Metodologia: A aula se inicia com a demonstração, na íntegra, do livro digital a ser utilizado durante o 2º bimestre. Depois, será introduzido o uso do *Algodoo*, com demonstrações das suas ferramentas, aplicabilidades e construções das primeiras simulações.

Cronograma: Apresentação do ebook na íntegra e sua interatividade (25 min – ½ aula); Introdução ao *Algodoo* (75 min – 1,5 aula).

Materiais utilizados: Computador com acesso à internet com o *Algodoo* instalado; projetor de tela; quadro negro.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante a aula. Também será passado para o aluno uma atividade em grupo de Laboratório digital, o qual eles terão que construir simulações sobre Energia Cinética de rotação de diferentes discos para apresentarem no "ENCONTRO 07", que tratará sobre aulas práticas com o *software*.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. **[Software]**. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 04

Instituição de ensino:

Professor: | **Data:** | **Duração:**

Área do conhecimento: | **Disciplina:**

Turma:

Temática: Revisão dos conceitos básicos do Movimento Circular Uniforme e o estudo da Energia Cinética de Rotação. Neste encontro, será introduzido o ensino do conteúdo de Física a ser estudado durante a aplicação da SD.

Objetivos da Aprendizagem*: 1)* Apresentar o conteúdo de forma clara e organizada na sala de aula e/ou, com exemplos práticos, utilizando recursos como o *ebook*, o quadro negro e a sala de vídeo.

Conteúdo Programático*: 1)* Conceitos básicos do MCU. *2)* Momento de Inércia. *3)* Teorema dos Eixos Paralelos. *4)* Centro de Massa. *5)* Energia Cinética de Rotação.

Metodologia: A aula se inicia com a revisão dos principais conceitos do MCU. Em seguida, serão introduzidos os conceitos de Momento de Inércia e Centro de Massa, para, depois, ser estudada a Energia Cinética de Rotação. No final, serão trabalhados, em grupo, exercícios sobre o conteúdo estudado.

Cronograma: Aula 1: Exposição do conteúdo programático (50 min); Aula 2: Continuação do conteúdo programático e trabalho, em grupo, da resolução de exercícios propostos sobre o conteúdo (50 min).

Materiais utilizados: Computador; projetor de tela; quadro negro.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante a aula.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. **[Software]**. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 05

Instituição de ensino:

Professor: | **Data:** | **Duração:**

Área do conhecimento: | **Disciplina:**

Turma:

Temática: Energia Cinética de Rolamento como a composição das energias cinéticas de Rotação e Translação. Neste encontro, será dada a continuidade do ensino do conteúdo de Física que está sendo estudado na aplicação da SD.

Objetivos da Aprendizagem*: 1)* Apresentar o conteúdo de forma clara e organizada na sala de aula e/ou, com exemplos práticos, utilizando recursos como o *ebook*, o quadro negro e a sala de vídeo.

Conteúdo Programático*: 1)* Conceitos básicos de Movimento de Translação e Movimento de Rotação. *2)* Energia Cinética de Rolamento.

Metodologia: A aula se inicia com uma breve revisão dos principais conceitos do Movimento Linear e do Movimento Rotacional. Em seguida, será introduzido o conceito de Energia Cinética de Rolamento. No final, serão trabalhados exercícios, em grupo, para fixação do conteúdo.

Cronograma: Aula 1: Exposição do conteúdo programático (50 min); Aula 2: Continuação do conteúdo programático e trabalho, em grupo, da resolução de exercícios propostos sobre o conteúdo com apoio do Algodoo (50 min).

Materiais utilizados: Computador; projetor de tela; quadro negro.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante a aula.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. **[Software]**. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 06

Instituição de ensino:		
Professor:	**Data:**	**Duração:**
Área do conhecimento:		**Disciplina:**
Turma:		

Temática: Apresentação de seminário usando o *Algodoo* – Simulando a Energia Cinética de Rotação. Os alunos apresentarão o trabalho passado no "ENCONTRO 03".

Objetivos da Aprendizagem*: 1)* Verificar a aprendizagem do conteúdo Energia Cinética de Rotação com o uso do *Algodoo*.

Conteúdo Programático*: 1)* Energia Cinética de Rotação. *2)* Laboratório virtual de Física.

Metodologia: As duas aulas serão reservadas para apresentação dos trabalhos em grupos sobre energia cinética de rotação com o uso do *Algodoo*.

Cronograma: Aulas 1 e 2: Apresentação de seminários (100 min).

Materiais utilizados: Computador com o *Algodoo* instalado; projetor de tela; quadro negro.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante a aula.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. **[Software]**. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 07

Instituição de ensino:

Professor: | **Data:** | **Duração:**

Área do conhecimento: | **Disciplina:**

Turma:

Temática: Apresentação de seminário usando o *Algodoo* – Simulando a Energia Cinética de Rotação. Os alunos continuarão as apresentações dos trabalhos do encontro 06.

Objetivo da Aprendizagem*: 1)* Verificar a aprendizagem do conteúdo Energia Cinética de Rotação com o uso do *Algodoo*.

Conteúdo Programático*: 1)* Energia Cinética de Rotação. *2)* Laboratório virtual de Física.

Metodologia: As duas aulas serão reservadas para continuação das apresentações dos trabalhos em grupos sobre energia cinética de rotação com o uso do *Algodoo*.

Cronograma: Aulas 1 e 2: Apresentação de seminários (100 min).

Materiais utilizados: Computador com o *Algodoo* instalado; projetor de tela.

Avaliação: A avaliação será baseada no desempenho dos alunos durante as apresentações dos seminários.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. **[Software]**. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 08

Instituição de ensino:

Professor: | **Data:** | **Duração:**

Área do conhecimento: | **Disciplina:**

Turma:

Temática: Aplicação do pós-teste.

Objetivo da Aprendizagem*: 1)* Coletar e verificar indícios de aprendizagem dos conteúdos Energia Cinética de Rotação e Energia Cinética de Rolamento.

Conteúdo Programático*: 1)* Energia Cinética de Rotação. *2)* Energia Cinética de Rolamento.

Metodologia: As duas aulas serão reservadas para aplicação do pós-teste.

Cronograma: Aulas 1 e 2: Aplicação do pós-teste (avaliação) (100 min).

Materiais utilizados: Questionário físico.

Avaliação: A avaliação será baseada no desempenho dos alunos na resolução da avaliação.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. **[Software]**. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

PLANO DE AULA 09

Instituição de ensino:		
Professor:	**Data:**	**Duração:**
Área do conhecimento:		**Disciplina:**
Turma:		

Temática: *Feedback* do pós-teste, autoavaliação e pesquisa final de opinião. Neste encontro, o pós-teste será resolvido e debatido com os alunos e será aplicado um questionário de autoavaliação e de pesquisa final de opinião para os discentes.

Objetivos da Aprendizagem*: 1)* Retomar o pós-teste, corrigindo-o e buscando fazer com que o aluno perceba sua evolução de aprendizagem, principalmente no que tange a sua capacidade de captar significados, compreender, explicar e de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema, características essas presentes nas UEPS de Moreira (2011). *2)* Verificar, por meio de questionários individuais específicos, como o aluno se autoavalia em relação ao seu aprendizado e o que ele achou da SD utilizada

Conteúdo Programático*: 1)* Importância e princípios da energia rotacional. *2)* Energia e Movimento Rotacionais: exemplos e aplicações. *3)* Análise de movimento rotacional de uma roda de um carro.

Metodologia: A aula se inicia com a resolução da avaliação bimestral para debate das questões com os alunos, verificação das últimas dúvidas dos alunos e aprimoramento dos conceitos estudados. Em seguida, será aplicado um questionário individual para que os alunos possam se autoavaliar e emitir suas opiniões quanto à metodologia utilizada durante o bimestre e aplicação da sequência didática.

Cronograma: Aula 1 – *Feedback* do pós-teste (50 min). Aula 2 – Aplicação do questionário individual de autoavaliação e pesquisa final de opinião (50 minutos).

Materiais utilizados: Quadro negro.

Avaliação: A avaliação será baseada na participação ativa dos alunos durante as discussões em grupo e na análise dos resultados dos questionários individuais aplicados.

Habilidades BNCC: (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros). **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

ALGODOO. **[Software]**. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Silva, Anderson Gomes da; Silva, Melquisedec Lourenço da. **Algodoo e a Dinâmica Rotacional** (ainda não publicado). Natal: Editora a definir, 2024.

Capítulo 4 **Energia Cinética de Rotação**

Turma:

Professor:

Dia, mês e ano

ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO DE UMA PARTÍCULA

A **energia cinética de rotação** descreve objetos em rotação, sendo uma extensão da energia cinética linear que lida com movimentos de translação.

Esse tipo de energia depende da forma e de como a massa de um corpo é distribuída em um movimento circular.

Para apenas uma partícula, temos uma massa pontual m associada e com energia cinética:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

$v = \omega r$ $mr^2 = I$

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \ (joule - J)$$

K → Energia Cinética de Rotação da partícula.

I → Momento de Inércia da partícula.

ω → Velocidade Angular da partícula.

ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO

Para um corpo rígido, podemos usar:

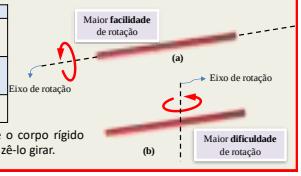
$$K_T = \frac{1}{2}I_T\omega^2 \ (joule - J)$$

K_T → Energia Cinética de Rotação do corpo rígido.

I_T → Momento de Inércia da partícula.

ω → Velocidade Angular da partícula.

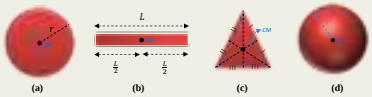
Corpo	*Momento de Inércia (kg . m2)*
Esfera maciça em relação a um diâmetro	$I = \frac{2}{5}Mr^2$
Disco em relação ao seu eixo central	$I = \frac{1}{2}Mr^2$
Anel fino em relação ao eixo central	$I = Mr^2$



- Quanto maior próximo os átomos que compõe o corpo rígido estão do eixo de rotação, maior a facilidade de fazê-lo girar.

CENTRO DE MASSA

O ponto de um corpo, ou um sistema de corpos, onde se pode considerar que toda a concentração de massa se concentra sobre ele é chamado de centro de massa CM, comumente chamado de centro de gravidade.



O centro geométrico de objetos não homogêneos pode não ser o mesmo do seu CM devido às suas características irregulares., dificultando a sua análise para cálculos envolvendo essa distribuição de massa.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS – ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

4.01 – Qual é a energia cinética de rotação de uma partícula, de um corpo rígido, com um momento de inércia de 0,1 *kg . m²* em relação ao seu eixo de rotação e uma velocidade angular de 5 rad/s?

4.02 – O momento de inercia de um corpo rígido, de massa 2 *kg*, em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa, é de 0,02 *kg.m².* Qual o momento de inercia em relação a um ponto *P* desse corpo por onde passa outro eixo de rotação, distante 0,1 metros perpendicularmente do eixo que passa pelo centro de massa?

4.03 – Um ponto material com uma massa de 0,5 *kg* está em rotação ao redor de um eixo perpendicular a ele. A distância entre o eixo e o ponto material é de 0,2 metros. Determine o momento de inércia desse ponto material em relação ao eixo de rotação.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS – ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

4.01 – Qual é a energia cinética de rotação de uma partícula contida em um corpo rígido com um momento de inércia de 0,15 *kgm²* em relação ao seu eixo de rotação, quando ela gira com uma velocidade angular de 7 *rad/s*?

4.02 – O momento de inércia de um corpo rígido, com uma massa de 3 *kg*, em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa, é de 0,015 *kgm².* Qual é o momento de inércia em relação a um ponto Q desse corpo, por onde passa outro eixo de rotação, que está a uma distância de 0,2 metros perpendicularmente ao eixo que passa pelo seu centro de massa?

4.03 – Um ponto material de massa 1 *kg* gira em torno de um eixo perpendicular a ele. A distância entre o eixo de rotação e o ponto material é de 0,5 metros. Determine o momento de inércia deste ponto material em relação ao eixo de rotação.

USANDO O ALGODOO – ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

USAR O MANUAL DE LABORATÓRIO VIRTUAL

Disco	I (kg)	m (kg)	r (m)	$\omega = 2\pi f$ (rad/s)	$I = \frac{mr^2}{2}$ (kgm²)	$K = \frac{I\omega^2}{2}$ (J)
A	1	16	4			
B	2	8	3			
C	3	4	2			
D	4	2	1			

Capítulo 8 **Energia Cinética de Rolamento**

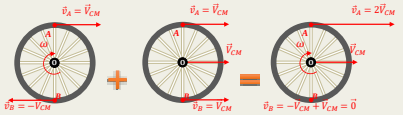
Turma:

Professor:

Dia, mês e ano

ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO

A **energia cinética de rolamento** de um corpo corresponde à soma das suas energias cinéticas de rotação e de translação.



(a) Rolagem pura

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

(b) Translação pura

$$K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$

(c) Rolamento

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2 (J)$$

K→ Energia Cinética de Rolamento do corpo rígido.

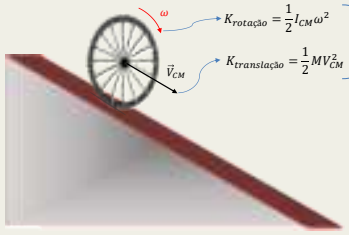
I_{CM} **→** Momento de Inércia que passa pelo Centro de Massa do corpo rígido.

ω **→** Velocidade Angular da corpo rígido.

***M*→** Massa do corpo rígido.

V_{CM} **→** Velocidade do Centro de Massa do corpo rígido.

ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO



IMPORTANTE

$$V_{CM} = \omega R$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS - ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO

8.01 – Um veículo está em movimento retilíneo uniforme com velocidade linear escalar de 20 *m/s*. Suas rodas, homogêneas e idênticas, cada uma com massa $M = 10\ kg$ e raio $R = 25\ cm$, por consequência do movimento linear do veículo, possuem velocidade angular constante e seus momentos de inércia podem ser calculados por meio da equação $\left(I = \frac{1}{2} MR^2\right)$, em que M é a massa da roda e R, o seu raio.

De acordo com o enunciado, determine, para uma das rodas do veículo:

a) a sua velocidade do centro de massa;

b) a sua velocidade angular;

c) o seu momento de inércia;

d) a sua energia cinética de rotação;

e) a sua energia cinética de translação;

f) a sua energia cinética de rolamento.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS - ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO

8.01 – Um carro está em movimento retilíneo uniforme com velocidade linear escalar de 15 *m/s*. Suas rodas, homogêneas e idênticas, cada uma com massa $M = 8\ kg$ e raio $R = 20\ cm$, por consequência do movimento linear do veículo, possuem velocidade angular constante. De acordo com o enunciado, determine, para uma das rodas do veículo:

Use $\left(I = \frac{1}{2} MR^2\right)$ para calcular o momento de inércia da roda.

a) a sua velocidade do centro de massa;

b) a sua velocidade angular;

c) o seu momento de inércia;

d) a sua energia cinética de rotação;

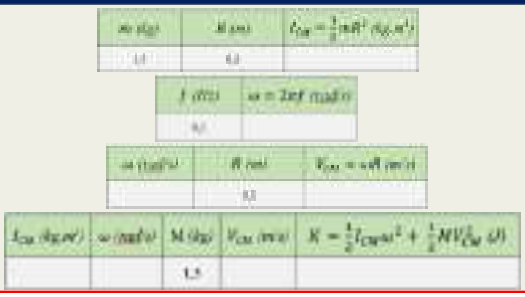
e) a sua energia cinética de translação;

f) a sua energia cinética de rolamento.

USANDO O ALGODOO- ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO



USANDO O ALGODOO- ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO



INSTRUÇÕES

- O objetivo deste questionário é verificar o que você já sabe sobre o tema e suas respostas serão utilizadas para que as suas aulas sejam preparadas da forma mais adequada para atender às suas necessidades educacionais.
- Assim, é fundamental que você seja o mais sincero possível na sua resolução, pois a sua participação é de extrema importância para que você seja avaliado.

PRÉ-TESTE 01

01 – O que é um ângulo?

02 – Em qual unidade medimos o ângulo?

03 – Quais são os tipos de ângulos que podemos encontrar?

04 – O que você entende por posição angular de um objeto?

05 – O que você entende por deslocamento angular de um corpo rígido?

06 – Qual a diferença entre posição angular e deslocamento angular de um corpo rígido?

07 – Qual a relação entre a sua velocidade angular e o seu período de rotação?

08 – Qual a relação entre a velocidade angular e a frequência de rotação?

09 – Em um movimento circular uniforme, a velocidade angular é igual ou diferente em todos os pontos de um corpo rígido? E em relação à velocidade linear?

10 – Em um movimento circular uniforme, a velocidade linear é igual ou diferente em todos os pontos de um corpo rígido?

11 – O que você entende por aceleração em um movimento circular?

12 – Qual a diferença entre aceleração linear e aceleração centrípeta?

13 – Se a "velocidade linear não muda" em um movimento uniforme, por que um corpo muda de direção em um movimento circular uniforme?

14 – O que você entende por energia?

15 – Cite alguns tipos de energia.

16 – Como a energia é usada no dia a dia?

17 – O que você entende por energia cinética?

18 – Qual a diferença entre energia cinética de translação, também chamada de linear, e energia cinética de rotação?

19 – Você conhece algum programa de computador usado para fins educacionais? Quais?

20 – Você conhece um programa de computador chamado Algodoo? Se sim, já utilizou? Para que serve?

Muito obrigado por você ter respondido todo o questionário da maneira mais completa e sincera possível! Certamente, o modo como serão abordados os conteúdos referentes aos temas contidos neste questionário serão mais relevantes para o seu aprendizado!

INSTRUÇÕES

- O objetivo deste questionário é verificar o que você já sabe sobre o tema após uma breve discussão e suas respostas serão utilizadas para que as suas aulas sejam preparadas da forma mais adequada para atender às suas necessidades educacionais.
- Assim, é fundamental que você seja o mais sincero possível na sua resolução, pois a sua participação é de extrema importância para que você seja avaliado.

PRÉ-TESTE 02

01 – Qual a diferença entre o movimento circular e o movimento retilíneo de um objeto?

_____

_____

_____

02 – Cite 5 exemplos de objetos que podem realizar um movimento circular no seu dia a dia.

_____

_____

_____

03 – Ao girar uma bola de basquete em sua mão, existe um ponto nela que parece não se mover. Você saberia dizer qual é?

_____

04 – Explique qual a relação entre a velocidade angular e a frequência de um corpo em movimento circular?

_____

_____

_____

05 – Cite 3 exemplos de objetos que possuem energia cinética no seu dia a dia.

_____

_____

_____

06 – Explique o conceito de trabalho.

_____

_____

_____

07 – Cite 3 exemplos de situações em que o trabalho é realizado.

_____

_____

_____

08 – Qual a relação entre trabalho e energia cinética?

_____

_____

_____

09 – Cite 3 exemplos de situações em que a energia cinética de um corpo é aumentada.

_____

_____

_____

10 – Cite 3 exemplos de situações em que a energia cinética de um corpo é diminuída.

_____

_____

_____

11 – Qual a relação entre a energia cinética de rotação e o funcionamento de um carrinho de brinquedo?

_____

_____

_____

12 – Explique como a energia cinética de rotação é importante para o movimento de uma bicicleta.

_____

_____

_____

13 – Qual a relação entre a energia cinética de rotação e a força centrífuga em um brinquedo giratório?

_____

_____

_____

14 – Cite 3 situações do dia a dia em que a energia cinética de rotação e/ou a energia cinética de translação são importantes.

_____

_____

_____

15 – Imagine que você está empurrando um carrinho de brinquedo em linha reta. Em qual situação o carrinho terá mais energia cinética: quando as rodas estão girando ou quando as rodas estão travadas? Por quê?

_____

_____

_____

16 – Imagine um disco girando em torno de um eixo. Se você aumentar o raio do disco sem alterar sua massa ou velocidade de rotação, o que acontecerá com sua energia cinética de rotação?

_____

_____

_____

17 – Explique como a energia cinética de rotação pode ser usada para gerar energia elétrica.

_____

_____

_____

18 – Cite 3 exemplos de máquinas que funcionam utilizando a energia cinética de rotação.

_____

_____

_____

19 – Cite 3 exemplos de atividades físicas que envolvem a energia cinética de rotação.

_____

_____

_____

20 – Qual a importância de entendermos os conceitos de movimento circular, rotação e energia para nosso dia a dia?

_____

_____

_____

Muito obrigado por você ter respondido todo o questionário da maneira mais completa e sincera possível! Certamente, o modo como serão abordados os conteúdos referentes aos temas contidos neste questionário serão mais relevantes para o seu aprendizado!

INSTRUÇÕES

- O objetivo deste questionário é verificar os indícios de aprendizagem em relação ao conteúdo estudado (**ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO** e **ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO**).
- Assim, é fundamental que você resolva às questões da forma mais completa possível, pois a sua participação é de extrema importância para que você seja avaliado.

PÓS-TESTE

01 – Explique a diferença entre energia cinética de rotação e energia cinética de translação.

02 – Defina momento de inércia. Qual a influência que essa grandeza possui no movimento de giro de um corpo?

03 – O que significa o centro de massa de um corpo rígido.

04 – Existe alguma diferença em calcular o momento de inércia de uma partícula e de um corpo rígido com distribuição de massa contínua?

05. Um disco homogêneo de metal de massa 2 kg e raio 0,5 m gira em torno de seu eixo central com velocidade angular de 10 rad/s. Sabendo que o momento de inércia de um disco homogêneo pode ser obtido usando a equação $I = \frac{MR^2}{2}$, calcule a energia cinética de rotação do disco.

06 – Qual é a energia cinética de rotação de uma partícula contida em um corpo rígido com um momento de inércia de 0,2 $kg \cdot m^2$ em relação ao seu eixo de rotação, quando ela gira com uma velocidade angular de 8 *rad/s*?

07 – Um ponto material de massa 0,2 *kg* gira em torno de um eixo perpendicular a ele. A distância entre o eixo de rotação e o ponto material é de 0,6 metros. Determine o momento de inércia deste ponto material em relação ao eixo de rotação.

08 – O momento de inercia de um corpo rígido, de massa 5 *kg*, em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa, é de 0,08 $kg.m^2$. Use o teorema dos eixos paralelos ($I_P = I_{CM} + Mh^2$) e calcule o momento de inercia em relação a um ponto *P* desse corpo por onde passa outro eixo de rotação, distante 0,15 metro perpendicularmente do eixo que passa pelo centro de massa?

09 - Um veículo está em movimento retilíneo uniforme com velocidade linear escalar de 30 *m/s*. Suas rodas, homogêneas e idênticas, cada uma com massa $M = 12\ kg$ e raio $R = 20\ cm = 0{,}2\ m$, por consequência do movimento linear do veículo, possuem velocidade angular constante e seus momentos de inércia podem ser calculados por meio da equação $\left(I = \frac{1}{2}MR^2\right)$, em que M é a massa da roda e R, o seu raio. De acordo com o enunciado, determine, para uma das rodas do veículo:

a) a sua velocidade do centro de massa;

b) a sua velocidade angular;

c) o seu momento de inércia;

d) a sua energia cinética de rotação;

e) a sua energia cinética de translação;

f) a sua energia cinética de rolamento.

10 - Em seu dia a dia, quais objetos ou situações você observa que envolvem os conceitos de energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento? Faça uma breve descrição da sua resposta e explique como esses conceitos se aplicam na prática.

RASCUNHO PARA CÁLCULOS

Parabéns por ter concluído a avaliação com êxito! Espero que o conteúdo estudado e as interações com o Algodoo durante o bimestre tenha o ajudado responder às questões!

INSTRUÇÕES

- O objetivo deste questionário é fazer um levantamento dos resultados da aplicação da sequência didática utilizada no 2º bimestre por meio da autoavaliação do seu aprendizado e da sua opinião acerca de todo o processo de estudo, principalmente referente ao uso do Algodoo. Portanto, seja o mais sincero possível nas suas respostas.

AUTOAVALIAÇÃO E PESQUISA FINAL DE OPINIÃO

PARTE 1 - AUTOAVALIAÇÃO

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

1 – Em sua opinião, quais eram seus conhecimentos prévios sobre energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento antes de iniciar a sequência didática?

a) Não tinha nenhum conhecimento sobre esses conceitos.
b) Tinha conhecimento superficial sobre alguns dos conceitos, mas precisava de aprofundamento.
c) Tinha conhecimento básico sobre os conceitos e suas aplicações.
d) Tinha bom conhecimento sobre os conceitos e suas aplicações.
e) Tinha ótimo conhecimento sobre os conceitos e suas aplicações.

2 – O que você achou do questionário inicial utilizado para verificar seus conhecimentos prévios?

a) Não foi útil para avaliar meus conhecimentos.
b) Foi um pouco útil, mas poderia ter sido mais abrangente.
c) Foi útil para avaliar meus conhecimentos e identificar pontos de aprimoramento.
d) Foi muito útil para avaliar meus conhecimentos e identificar pontos de aprimoramento.
e) Foi extremamente útil para avaliar meus conhecimentos e identificar pontos de aprimoramento.

APRENDIZADO DURANTE A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

3 – Qual foi a sua percepção sobre a clareza e a organização das aulas expositivas (quadro e *slides*)?

a) As aulas foram confusas e desorganizadas.
b) As aulas foram um pouco confusas e desorganizadas.
c) As aulas foram claras e organizadas, mas com alguns pontos que poderiam ser melhorados.
d) As aulas foram muito claras e organizadas.
e) As aulas foram extremamente claras e organizadas.

4 – Como você avalia a efetividade do uso do *software Algodoo* para o aprendizado dos conceitos?

a) O uso do Algodoo não foi útil para o meu aprendizado.
b) O uso do Algodoo foi um pouco útil, mas poderia ter sido mais explorado.
c) O uso do Algodoo foi útil para o meu aprendizado, mas com algumas limitações.
d) O uso do Algodoo foi muito útil para o meu aprendizado.
e) O uso do Algodoo foi extremamente útil para o meu aprendizado.

5 – Quanto você se sente confiante na aplicação dos conceitos de energia cinética de rotação e energia cinética de rolamento após a sequência didática?

a) Não me sinto confiante na aplicação dos conceitos.
b) Me sinto um pouco confiante na aplicação dos conceitos.
c) Me sinto confiante na aplicação dos conceitos básicos.
d) Me sinto muito confiante na aplicação dos conceitos.
e) Me sinto extremamente confiante na aplicação dos conceitos.

6 – O que você achou da avaliação final da sequência didática?

a) A avaliação não foi justa e não avaliou meus conhecimentos adequadamente.
b) A avaliação foi um pouco injusta e poderia ter sido mais abrangente.
c) A avaliação foi justa e avaliou meus conhecimentos de forma adequada.
d) A avaliação foi muito justa e avaliou meus conhecimentos de forma abrangente.
e) A avaliação foi extremamente justa e avaliou meus conhecimentos de forma abrangente e precisa.

SUGESTÕES PARA MELHORIA

7 – O que você acha que poderia mudar para melhorar a metodologia utilizada na sequência didática?

_____

_____

_____

8 – Você acha que as aulas deveriam ser dadas de outra forma ou em outro ambiente? Qual?

_____

_____

_____

9 – O que mais motivou você a participar das aulas e das atividades durante todo o 2º bimestre?

_____

_____

_____

10 – Você tem alguma sugestão de como o seu professor deveria ter abordado o conteúdo?

_____

_____

_____

11 – Você tem outros comentários ou sugestões que gostaria de compartilhar?

_____

_____

_____

PARTE 2: AVALIAÇÃO DAS AULAS

CLAREZA DAS EXPLICAÇÕES

12 – As explicações dos conceitos foram claras e fáceis de entender?

13 – O professor utilizou exemplos e recursos visuais que facilitaram o aprendizado?

14 – O professor respondeu às suas dúvidas de forma satisfatória?

UTILIZAÇÃO DO *EBOOK* E DO ALGODOO

15 – O que você achou no livro digital utilizado? Ele possui uma linguagem de fácil compreensão? As figuras estão bem construídas? É fácil navegar pelas partes do *Ebook*? Ele aborda bem o conteúdo por meio do *software Algodoo*? A quantidade de exercícios é satisfatória? O conteúdo está bem dividido nos capítulos? O que ele poderia ser acrescentado ou retirado para melhorá-lo?

16 – As atividades com o *Algodoo* foram relevantes para o aprendizado dos conceitos?

17 – O professor orientou o uso do *Algodoo* de forma eficaz?

18 – Qual a sua opinião final sobre o uso do *Algodoo* para aprender Física?

PARTE 3: CONCEITO FINAL DE AUTOAVALIAÇÃO

19 – Em uma escala de 0 a 10, sendo 0 para EXTREMAMENTE RUIM e 10 para EXTREMAMENTE BOM, como você avalia seu aprendizado no final do 2º bimestre (período de aplicação da sequência didática)?

(0) (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10)

Obrigado pela sua participação! As suas respostas servirão para aprimorar futuras abordagens dos conteúdos e para melhoria do material didático utilizado.

INSTRUÇÕES

- Para esta atividade, vocês, alunos, para facilitar a sua execução, precisarão fazê-la em um computador ou notebook com sistema operacional *Windows*.
- Sigam os passos a seguir para a criação de uma simulação de quatro discos rígidos homogêneos em movimento de rotação para cálculo das suas energias cinéticas de rotação.
- Você precisará fazer o download do programa e, se preferir, da sua extensão de tradução para o português. Para isso, use o navegador de *internet* da sua preferência. Em caso de problemas de acesso, sugerimos o navegador **MOZILA FIREFOX**.

LABORATÓRIO DIGITAL NO ALGODOO

PASSO 1: Primeiro, você deve acessar o site de *download* do programa clicando no *link* a seguir ou digitando-o no seu navegador de *internet*:

http://www.algodoo.com/download/

Depois disso, clique no ícone de *download* grátis no final da página para baixar o *Algodoo***,** como ilustrado na figura abaixo:



Fonte: Página oficial de download do Algodoo - *http://www.algodoo.com/download/*.

Execute o arquivo (**Algodoo_2_1_0-Win32.exe**) que você acabou de baixar para instalar o programa no seu computador.

Se preferir, você também pode baixar e instalar a extensão que permite traduzir o idioma do *software* para português por meio do *link* abaixo:

http://www.algodoo.com/forum/viewtopic.php?f=30&t=12229&p=86459&hilit=tradu%C3%A7%C3%A3o&sid=2ed19f082184cf645d2a3a6a7d9a9be8#p86459

Veja o tutorial de como instalar a tradução em português acessando o *link* a seguir:

https://www.youtube.com/watch?v=3DErSjJkjeI

A imagem abaixo ilustra a página inicial do Algodoo já com a tradução em português:



Fonte: Captura de tela do Algodoo.

PASSO 2: Com a tela inicial do Algodoo aberta, clique em **"Novo cenário"**, como mostra a imagem abaixo:



Fonte: Captura de tela do Algodoo.

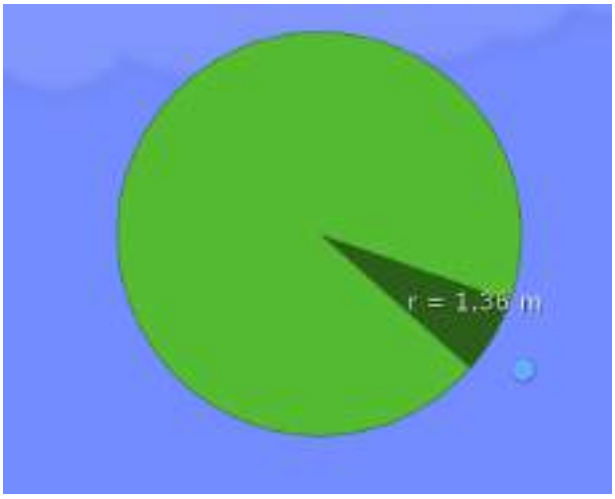
Dentre os cenários disponíveis, escolha o que mais lhe agradar:



Fonte: Captura de tela do Algodoo.

PASSO 3: Com o novo cenário aberto, escolha a “Ferramenta Círculo” e crie quatro círculos perfeitos de tamanhos diferentes, como ilustram as imagens a seguir (não esqueça de anotar os tamanhos dos raios dos círculos que você acabou de criar):

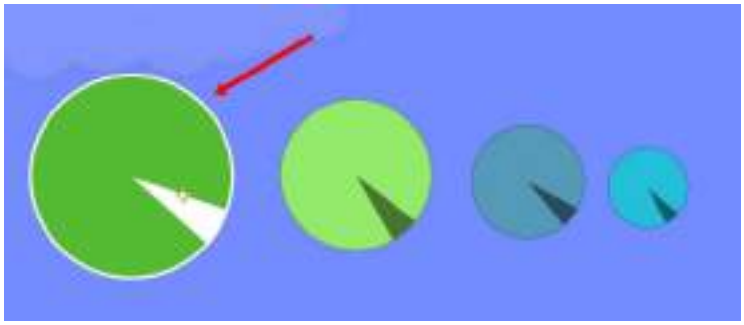




Fonte: Capturas de telas do Algodoo.

PASSO 3: Agora, você poderá atribuir um valor de massa para cada um dos discos que você acabou de criar. Para isso, clique no disco desejado e atribua a sua massa, conforme as imagens a seguir:

Faça isso para cada um dos discos, escolhendo sempre valores de massas diferentes. Não altere os demais valores.





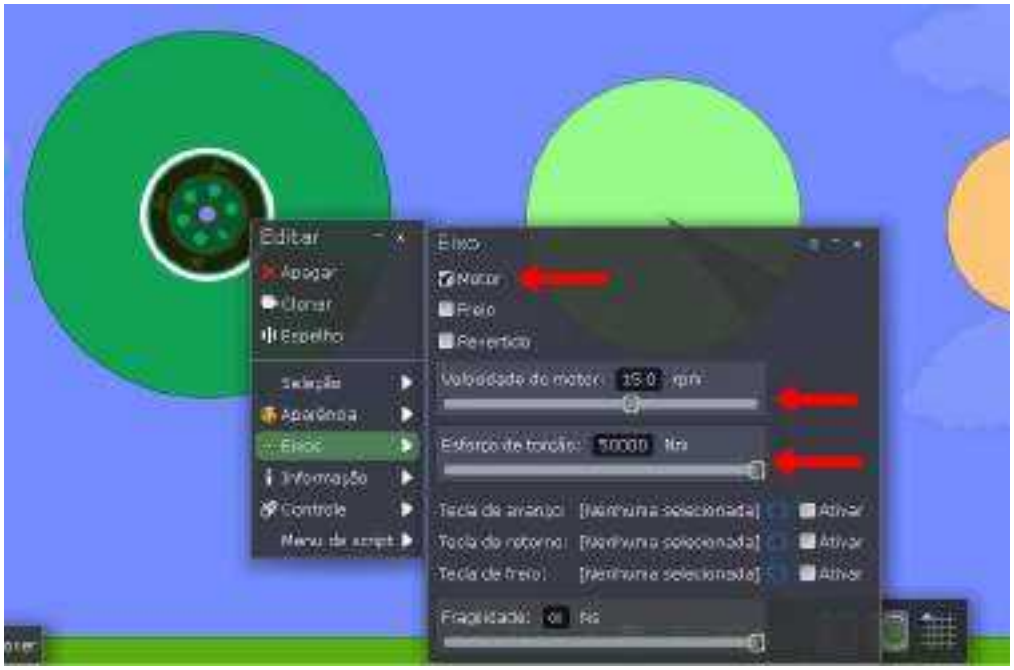
Fonte: Capturas de telas do Algodoo.

PASSO 4: Depois de atribuir as massas dos quatro discos, adicione um eixo no centro de cada um deles. Para isso, clique com o botão direito do *mouse* sobre o disco e siga os passos a seguir:



Fonte: Captura de tela do Algodoo.

PASSO 5: Com os eixos adicionados, clique com o botão direito do *mouse* sobre cada um dos eixos, ative a opção **"Motor"** e atribua um valor diferente para a frequência de giro de cada disco. Esse valor é fundamental para determinar as suas velocidades angulares. A unidade de frequência no programa está em rpm (rotações por minuto), sendo que 60 rpm equivalem a 1 *Hz*, ou seja, 60 rotações em um minuto é o mesmo que uma rotação em um segundo. Não esqueça de anotar os valores das frequências de cada disco.

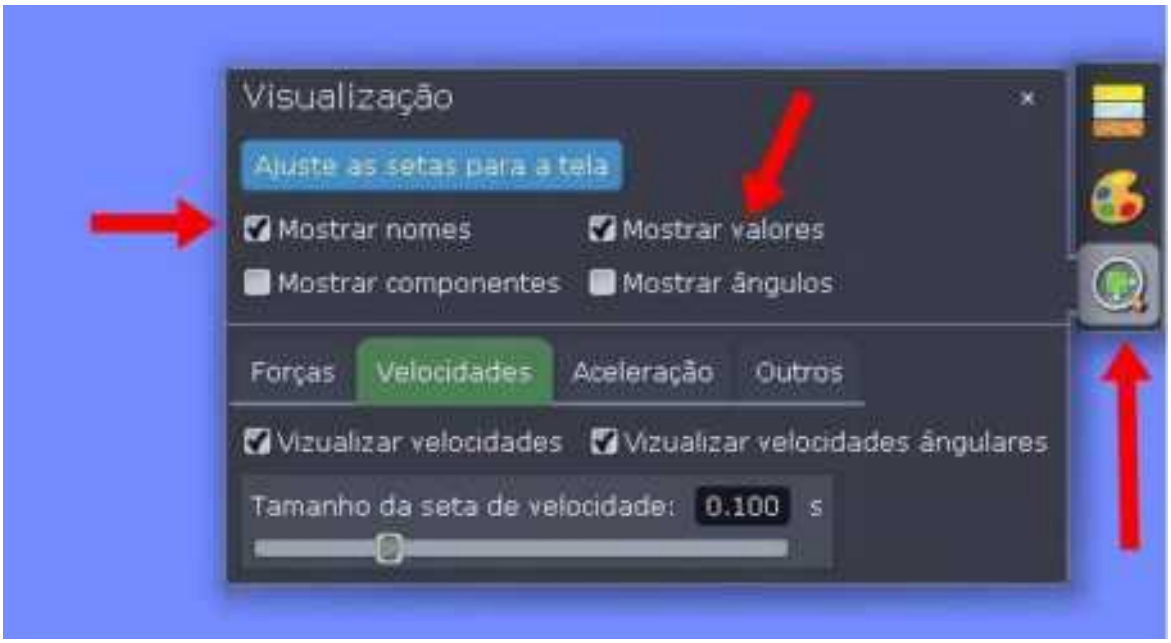


SUGESTÃO: Atribua o valor máximo para o "Esforço de torção" para o disco atingir a velocidade de giro de maneira mais eficiente.

A opção "Revertido" faz com que o disco gire em sentido oposto.

Fonte: Captura de tela do Algodoo.

PASSO 6: Clique no ícone "Visualização" e selecione as caixas de nomes e valores das velocidades angulares, de acordo com a figura a seguir.



Fonte: Captura de tela do Algodoo.

PASSO 7: Agora, preencha a tabela a seguir com os valores que você atribuiu para cada disco e, em seguida, calcule, além das velocidades angulares e os momentos de inércia, as suas energias cinéticas de rotação:

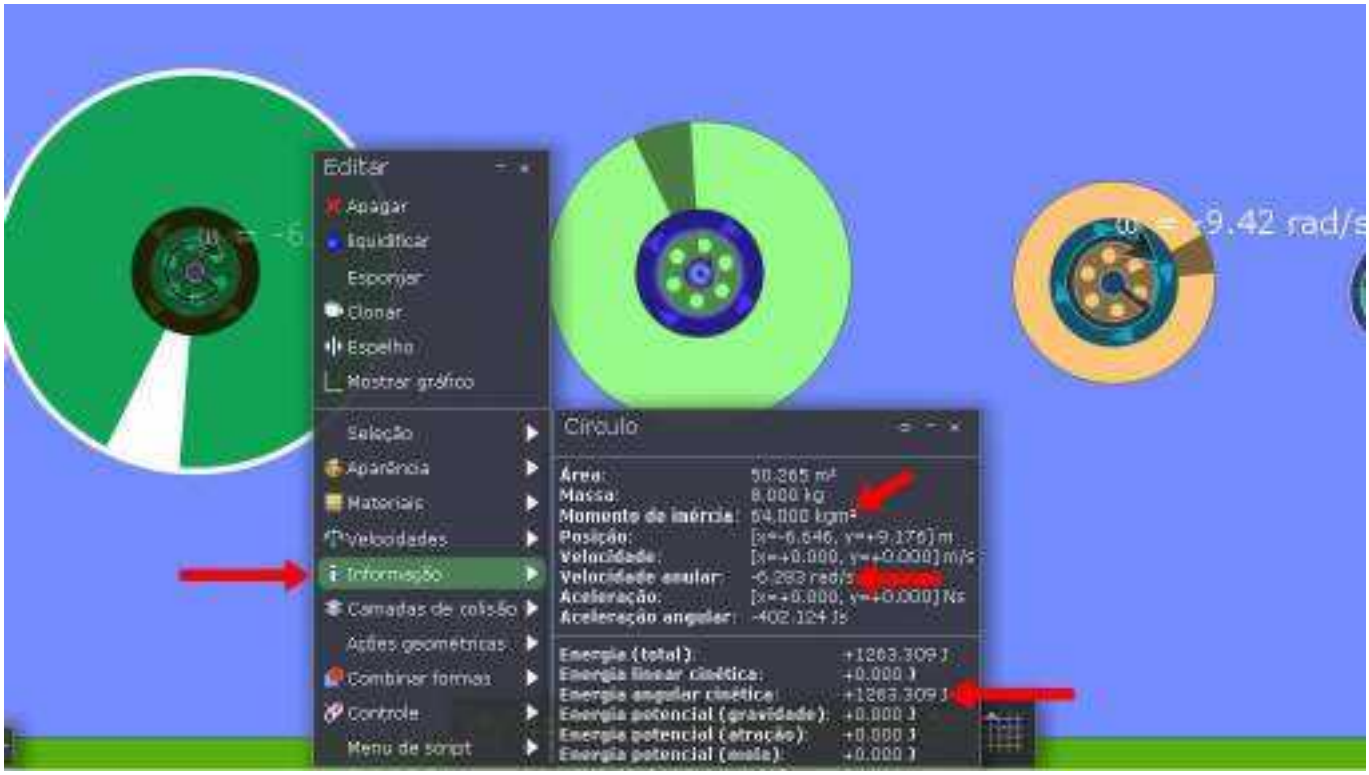
Disco	f (Hz)	m (kg)	r (m)	$\omega = 2\pi f$ (rad/s)	$I = \frac{mr^2}{2}$ (kgm^2)	$K = \frac{I\omega^2}{2}$ (J)
A						
B						
C						
D						

Tabela para cálculo da velocidade angular, momento de inércia e energia angular cinética dos discos homogêneos

PASSO 8: Por fim, reproduza a simulação e confira os valores das velocidades angulares, momentos de inércia e energia angular cinética de cada disco clicando com o botão direito sobre cada um deles e conferindo essas informações como mostra as figuras a seguir:



Fonte: Captura de tela do Algodoo.



Fonte: Captura de tela do Algodoo.

INFORMAÇÕES ADICIONAIS: Você também pode utilizar as outras ferramentas do software para uma melhor interatividade nas simulações que você está criando. Além disso, também é possível habilitar e desabilitar os efeitos gravitacionais e de resistência do ar caso sua simulação não leve em consideração esses fatores.



Fonte: Captura de tela do Algodoo.

Acesse também à *playlist* **"SIMULAÇÕES ALGODOO MNPEF"** do canal do meu canal, escaneado o QR *code* a seguir:

Ou acesse:

https://youtu.be/g4AbAEK3zm4?si=kvb6VhahAkxf4RM2

Fonte: QR *Code* da *playlist* SIMULAÇÕES ALGODOO MNPEF , do Canal Anderson Silva, no *YouTube*.

REFERÊNCIAS

ALGODOO. **[Software]**. [S.l.]: Algodoo, [2023?]. Disponível em: <http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 12 mar. 2024.

ALGODOO. **Tradução do Algodoo**. Fórum Algodoo. Disponível em: <http://www.algodoo.com/forum/viewtopic.php?f=30&t=12229&p=86459&hilit=tradu%C3%A7%C3%A3o&sid=2ed19f082184cf645d2a3a6a7d9a9be8#p86459> . Publicado em: 29 set. 2018. Acesso em: 13 mar. 2024.

Introdução à Plataforma Algodoo | GEDAI-MG | CEFET. **Como instalar a tradução PT-BR no Algodoo | Introdução à plataforma Algodoo | GEDAI-MG | CEFET-MG**. YouTube, 05 de maio de 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=3DErSjJkjeI>. Acesso em: 27 mar. 2024.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 28 nov. 2023.

CONTROLE DAS RESPOSTAS NO PRÉ-TESTE I										
COMPETÊNCIA	NÚMERO DA QUESTÃO E QUANTIDADE DE RESPOSTAS									
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
Domina										
Bom conhecimento										
Conhecimento básico										
Precisa de reforço										
Não respondeu										
COMPETÊNCIA	NÚMERO DA QUESTÃO E QUANTIDADE DE RESPOSTAS									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Domina										
Bom conhecimento										
Conhecimento básico										
Precisa de reforço										
Não respondeu										

CONTROLE DAS RESPOSTAS NO PRÉ-TESTE II										
COMPETÊNCIA	NÚMERO DA QUESTÃO E QUANTIDADE DE RESPOSTAS									
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
Domina										
Bom conhecimento										
Conhecimento básico										
Precisa de reforço										
Não respondeu										
COMPETÊNCIA	NÚMERO DA QUESTÃO E QUANTIDADE DE RESPOSTAS									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Domina										
Bom conhecimento										
Conhecimento básico										
Precisa de reforço										
Não respondeu										

CONTROLE DAS RESPOSTAS NO PÓS-TESTE										
COMPETÊNCIA	NÚMERO DA QUESTÃO E QUANTIDADE DE RESPOSTAS									
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
EXCELENTE										
BOM										
REGULAR										
INSUFICIENTE										
NÃO RESPONDEU										

PARTE 1 – AUTOAVALIAÇÃO (QUESTÕES OBJETIVAS) (OPINIÃO DOS ALUNOS)										
RESPOSTA	NÚMERO DA QUESTÃO E QUANTIDADE DE RESPOSTAS									
	1	2	3	4	5	6				
a										
b										
b										
d										
e										

PARTE 1 – AUTOAVALIAÇÃO (QUESTÕES DISURSIVAS) (OPINOÃO DOS ALUNOS)										
PARÂMETRO	NÚMERO DA QUESTÃO E QUANTIDADE DE RESPOSTAS									
	7	8	9	10	11					
RESPONDEU										
RESPONDEU PARCIALMENTE										
NÃO RESPONDEU										

PARTE 2 – AVALIAÇÃO DAS AULAS (OPINIÃO DOS ALUNOS)										
PARÂMETRO	NÚMERO DA QUESTÃO E QUANTIDADE DE RESPOSTAS									
	12	13	14	15	16	17	18			
RESPONDEU										
RESPONDEU PARCIALMENTE										
NÃO RESPONDEU										

PARTE 3 - CONCEITO FINAL DE AUTOAVALIAÇÃO										
ESCALAS										
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

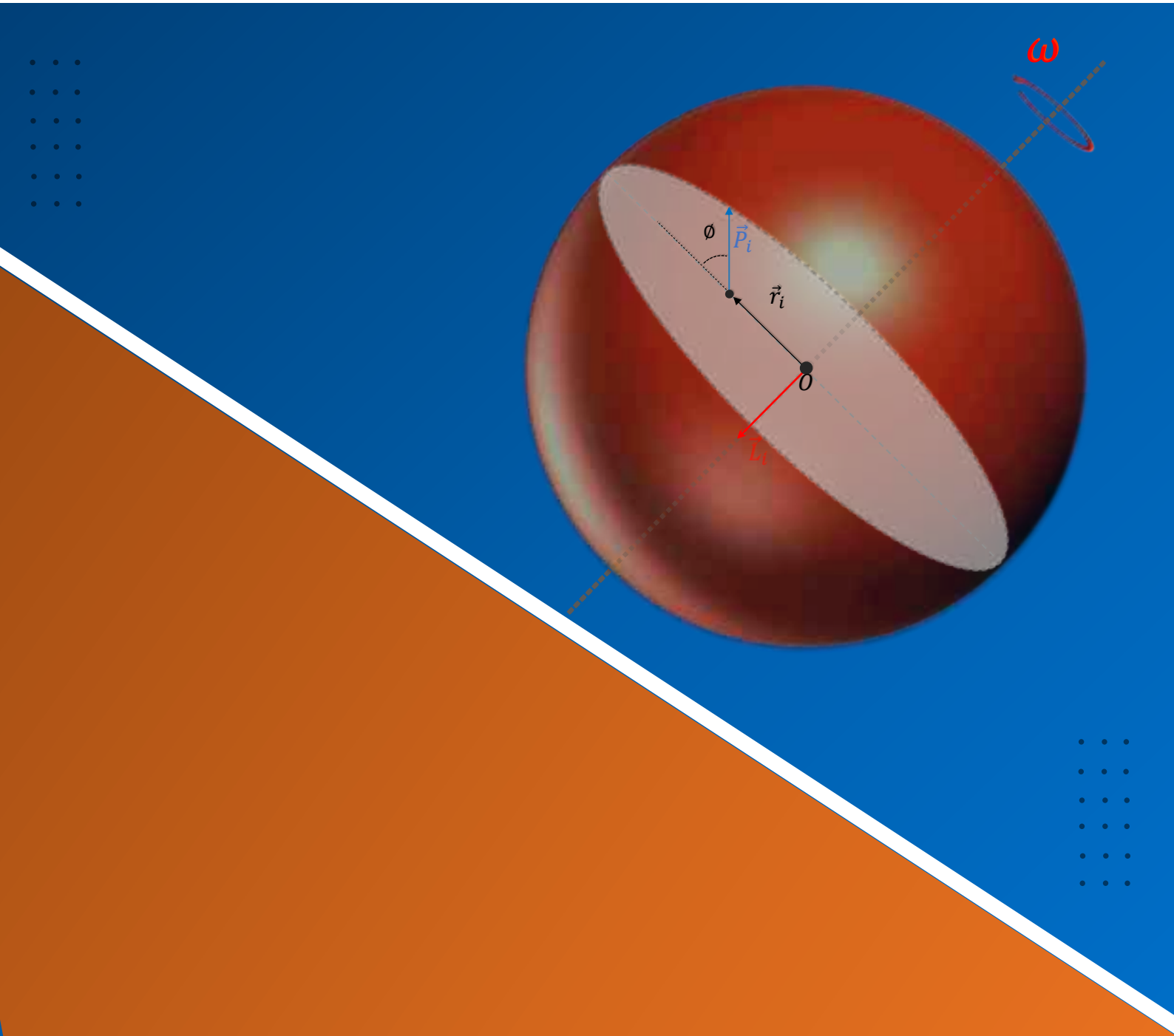
OS ALUNOS SE IDENTIFICARAM NOS QUESTIONÁRIO FINAL	
PARÂMETRO	QUANTIDADE DE ALUNOS
SIM	
NÃO	

APÊNDICE B – EBOOK ALGODOO E A DINÂMICA ROTACIONAL

Anderson Gomes da Silva

Melquisedec Lourenço da Silva

Algodoo e a Dinâmica Rotacional



Anderson Gomes da Silva

Melquisedec Lourenço da Silva

Algodoo e a Dinâmica Rotacional

1ª edição

Algodoo e a Dinâmica Rotacional

Primeira publicação em
Natal, Rio Grande do Norte, Brasil.
2025

1ª Edição

Todos os direitos da obra
Algodoo e a Dinâmica Rotacional
reservados aos autores

Copyright do texto © Anderson Gomes da Silva, 2023
Artes do livro – Anderson Gomes da Silva

Diagramação: *Anderson Gomes da Silva*

Autores: *Anderson Gomes da Silva*

Melquisedec Lourenço da Silva

S586a Silva, Anderson Gomes da – 1986
Algodoo e a Dinâmica Rotacional / Anderson Gomes da Silva, Melquisedec Lourenço da Silva. – 1. ed. – Natal, RN : Ed. dos Autores, 2025.
182p.

ISBN:

1. Ensino de Física 2. Software Algodoo 3. Dinâmica Rotacional
I. Título II. Silva, Melquisedec Lourenço da

CDD – 531

“A mente que se abre a uma nova ideia
jamais voltará ao seu tamanho original.”

Albert Einstein

APRESENTAÇÃO

Caro professor e/ou caro aluno, se você chegou até aqui, certamente gosta de estudar Física e é fascinado pelo funcionamento do mundo em que vivemos. Muitos são os fenômenos físicos que são capazes de prender a nossa atenção e despertar o nosso interesse por essa disciplina extraordinária. Objetivando uma melhor interatividade dos conceitos que permeiam essa área do conhecimento, apresentamos este livro que busca aliar a teoria de uma parte dessa ciência à prática por meio de simulações interativas utilizando *software* gratuito *Algodoo*.

A palavra *Algodoo* é a junção das palavras em inglês "*Algorithm*" e "*Do*", que significam algoritmo e fazer, respectivamente, e se refere a um aplicativo de simulação desenvolvido, a princípio, por Emil Ernerfeldt da Universidade Umea, Suécia, em 2008, como objeto de sua dissertação de Mestrado. Nele, podemos realizar várias simulações em duas dimensões (2D).

A parte teórica deste livro é dividida em 12 capítulos sobre a **Dinâmica Rotacional** da seguinte forma: Capítulo 1 – Rotação; Capítulo 2 – Conexões entre as Variáveis Lineares e as Angulares; Capítulo 3 – Movimentos Circulares Acoplados; Capítulo 4 – Energia Cinética de Rotação; Capítulo 5 – Torque; Capítulo 6 – Trabalho e Energia Cinética de Rotação; Capítulo 7 – Rolamento; Capítulo 8 – Energia Cinética de Rolamento; Capítulo 9 – As Forças de Rolamento; Capítulo 10 – Revisando o Torque; Capítulo 11 – Momento Angular e Capítulo 12 – Conservação do Momento Angular.

Todos os capítulos contam com **Figuras**, **Tabelas**, **Equações**, **Exercícios Resolvidos**, **Exercícios Propostos** e **Revisão** do conteúdo abordado no capítulo. Ademais, quando necessário, também há um tópico chamado **Saiba mais...**, destinado a apresentar uma linguagem, principalmente de cálculo, de nível superior para aqueles alunos ou professores que desejam se aprofundar um pouco mais, mesmo que o conteúdo de todos os capítulos sejam focados na linguagem de Ensino Médio.

Além disso, todos eles também contam, principalmente, com o tópico **Usando o *Algodoo***: que consiste na demonstração do conteúdo estudado em simulação no programa computacional, em que o leitor pode acessar as simulações por meio de *links*. Também é possível fazer o *download* do *software* gratuitamente e visualizar, inclusive, a vídeos com tutoriais de como fazer as simulações. Nesse tópico, também são disponibilizados Tarefas Propostas conexa com o aplicativo.

Os vídeos com os tutoriais das simulações no *software* podem ser acessados escaneando o QR Code ao lado.

ou acesse:
https://abre.ai/hrgr

Esperamos que você goste do conteúdo apresentado neste livro e que ele possa te ajudar a entender melhor os conceitos desse mundo esplêndido que é a Física.

Os autores

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.01: Máquina de Atwood ilustrando o movimento de rotação de uma polia em relação a um eixo fixo **14**

Figura 1.02: Circunferência com rotação em sentido anti-horário **16**

Figura 1.03: Reta de referência do corpo rígido variando das posições angulares θ_1 para θ_2 nos instantes t_1 e t_2, respectivamente, formando o deslocamento angular $\Delta\theta$ no intervalo de tempo Δt **17**

Figura 1.04: Captura de tela do *software Algodoo*: disco rígido em rotação **20**

Figura 2.01: Esboço de um disco rígido em rotação em sentido anti-horário com uma partícula descrevendo um movimento circular e uniforme em torno de um eixo fixo **28**

Figura 2.02: Corpo rígido circular em rotação em sentido anti-horário descrevendo um movimento circular e uniforme **28**

Figura 2.03: Corpo rígido circular em rotação no sentido anti-horário descrevendo um movimento circular acelerado **31**

Figura 2.04: Captura de tela do *software Algodoo*: valores de módulos de velocidades lineares no MCU **32**

Figura 2.05: Captura de tela do *software Algodoo*: velocidade angular constante no MCU **33**

Figura 2.06: Captura de tela do *software Algodoo*: trajetória circular de pontos distintos de um corpo rígido em rotação **34**

Figura 3.01: Transmissão de rotação entre polias **41**

Figura 3.02: Transmissão de rotação entre engrenagens **43**

Figura 3.03: Captura de tela do *software Algodoo*: sistema de engrenagens com e sem mesmo eixo de rotação **44**

Figura 3.04: Captura de tela do *software Algodoo*: sistema de engrenagens com contato e com diferentes eixos de rotações **45**

Figura 4.01: Momentos de inércia diferentes para corpos idênticos **51**

Figura 4.02: Representação de corpos rígidos homogêneos **52**

Figura 4.03: Momento de inércia de um *P* de um corpo rígido em um eixo a uma distância *h* a outro eixo paralelo a ele que passa pelo centro de massa desse corpo **53**

Figura 4.04: Captura de tela do *software Algodoo*: momento de inércia distintos para corpos idênticos **54**

Figura 4.05: Captura de tela do *software Algodoo*: gráfico *energia angular x velocidade angular* para um corpo com densidade constante **55**

Figura 4.06: Captura de tela do *software Algodoo*: verificação das informações dos resultados da simulação **56**

Figura 5.01: Representação de um corpo rígido, fixo no eixo de rotação que passa pelo ponto O, sob a influência de uma força $\vec{F}$ que produz um torque **62**

Figura 5.02: Captura de tela do *software Algodoo*: torques diferentes para forças iguais aplicadas em corpos idênticos **66**

Figura 5.03: Exercício Resolvido 5.02..... **68**

Figura 5.04: Exercício Proposto 5.02..... **69**

Figura 6.01: Corpo rígido de massa *m* em trajetória retilínea do instante t_1 a t_2, submetido a uma força constante $\vec{F}$ e descrevendo um deslocamento $\vec{d}$, formando um ângulo θ com a força aplicada **72**

Figura 6.02: Corpo rígido de massa *m em rotação* preso à extremidade de uma barra fina de comprimento *r* e de massa desprezível **76**

Figura 6.03: Captura de tela do *software Algodoo*: corpo de massa *m* preso à extremidade de uma barra fina de massa desprezível, submetido a uma força tangencial de 0,05 N e com velocidade angular de 3,09 rad/s **78**

Figura 6.04: Captura de tela do *software Algodoo*: mesmo corpo de massa *m* da **Figura 6.03** em uma posição angular diferente, preso à extremidade de uma barra fina de massa desprezível, submetido a uma força tangencial de 0,05 *N* e com velocidade angular de 3,14 *rad/s* **78**

Figura 6.05: Captura de tela do *software Algodoo*: como obter acesso aos dados físicos de um objeto em simulação **80**

Figura 6.06: Exercício Resolvido 6.02 - Corpo rígido em rotação preso na extremidade de uma barra fina de massa desprezível **82**

Figura 6.07: Exercício Proposto 6.02 - Corpo rígido em rotação preso na extremidade de uma barra fina de massa desprezível **83**

Figura 7.01: Esfera homogênea de massa *m* em movimento de rolamento sobre um plano inclinado **89**

Figura 7.02: Esfera maciça homogênea rolando da esquerda para direita em um movimento combinado de rotação e translação sem deslizamento **90**

Figura 7.03: Roda descrevendo um movimento de rolamento com velocidade do centro de massa $\vec{V}_{CM}$ **91**

Figura 7.04: Movimento de rolagem de uma roda como a combinação dos movimentos de rotação e translação puros **92**

Figura 7.05: Roda de uma bicicleta em movimento para a direita. Os raios de cima estão menos nítidos porque estão se movendo mais devagar **93**

Figura 7.06: Representação do movimento de rolagem como uma rotação pura, com eixo de rotação de passa pelo ponto B..... **94**

Figura 7.07: Recorte de captura de tela do *software Algodoo*: movimento de rolamento suave de um objeto homogêneo circular descendo uma rampa **95**

Figura 7.08: Recorte de captura de tela do *software Algodoo*: trajetórias de dois pontos distintos em um movimento de rolamento **96**

Figura 7.09: Captura de tela do *software Algodoo*: rolamento como uma rotação pura **96**

Figura 7.10: Captura de tela do *software Algodoo*: movimento de translação pura..... **97**

Figura 7.11: Captura de tela do *software Algodoo*: rotação pura com velocidades angulares constantes e velocidades lineares simétricas **98**

Figura 7.12: Tarefa Proposta 7.0 – Roda de raio 40 *cm* descrevendo um movimento de rolamento **98**

Figura 7.13: Exercício Resolvido 7.01 – Roda homogênea de raio 30 *cm* descrevendo um movimento de rolamento..... **99**

Figura 7.14: Exercício Proposto 7.01 – Roda homogênea de raio 50 cm descrevendo um movimento de rolamento..... **102**

Figura 8.01: Roda homogênea descrevendo um movimento de rolamento em um plano inclinado, com energia cinética de rotação $K_{rotação} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$, energia cinética de translação $K_{translação} = \frac{1}{2} MV_{CM}^2$ e energia cinética de rolamento $K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} MV_{CM}^2$ sendo a soma das duas primeiras **108**

Figura 8.02: Captura de tela do *software Algodoo*: Ônibus em movimento retilíneo uniforme (MRU) com rodas em movimento de rolagem **109**

Figura 9.01: Roda em movimento retilíneo acelerado com movimento de rolamento sem sofrer deslizamento **116**

Figura 9.02: Corpo redondo em rolamento suave ao longo de um plano inclinado que forma um ângulo θ com o plano horizontal **117**

Figura 9.03: Representação das forças do corpo redondo da **Figura 9.02**. Em (a), todas as forças que atuam sobre o corpo. Em (b), o valor do módulo da componente *x* da força **118**

Figura 9.04: Gráfico do desempenho da força de atrito agindo em um corpo..... **122**

Figura 9.05: Captura de tela do *software Algodoo*: forças agindo sobre um corpo em movimento de rolamento suave descendo uma rampa **122**

Figura 9.06: Captura de tela do *software Algodoo*: forças agindo sobre as rodas de um *skate* enquanto um *skatista* usa uma rampa apropriada para o movimento **123**

Figura 10.01: Regra da mão direita para determinar a orientação do torque **130**

Figura 10.02: Representação do passo a passo de como se obter a orientação do torque $\vec{\tau}$ **131**

Figura 10.03: Representação do passo a passo de como se obter o sentido do torque $\vec{\tau}$ invertendo o sentido da força $\vec{F}$ da **Figura 10.02**..... **132**

Figura 10.04: Captura de tela do *software Algodoo*: Regra da mão direita para determinar a orientação do torque $\vec{\tau}$ que faz a partícula girar em sentido anti-horário.....**133**

Figura 10.05: Recorte da captura de tela do *software Algodoo*: Regra da mão direita para determinar a orientação do torque $\vec{\tau}$ que faz a partícula girar em sentido horário **133**

Figura 10.06: Exercício Resolvido 10.01 – Cálculo dos torques produzidos por três forças sobre uma partícula de massa *m* em três situações distintas.....**135**

Figura 10.07: Exercício Proposto 10.01 – Cálculo dos torques produzidos por três forças sobre uma partícula de massa *m* em três situações distintas.....**138**

Figura 10.08: Regra da mão direita para produtos vetoriais. Em (a), os vetores posição $\vec{r}$ e força $\vec{F}$ no plano *x*-*y* relacionados à partícula no ponto P **139**

Figura 11.01: Regra da mão direita para se obter a orientação do momento angular $\vec{L}$ **144**

Figura 11.02: Esfera homogênea girando em torno de um eixo fixo que passa pelo seu centro de massa, localizado no ponto O **149**

Figura 11.03: Recorte de captura de tela do *software Algodoo*. Momento angular de uma esfera homogênea girando em sentido anti-horário **152**

Figura 11.04: Recorte de captura de tela do *software Algodoo*. Momento angular de uma esfera homogênea girando em sentido horário **152**

Figura 11.05: Exercício Resolvido 11.01: Momento angular de uma partícula de massa *m* em movimento circular uniforme **155**

Figura 11.06: Exercício Proposto 11.01: Momento angular de uma partícula de massa *m* em movimento circular uniforme **158**

Figura 12.01: Representação de uma pessoa girando em uma cadeira giratória.....**167**

Figura 12.02: Representação de um patinador de gelo girando quase que livremente em torno do seu eixo vertical **168**

Figura 12.03: Representação de um atleta realizando um salto mortal **169**

Figura 12.04: Captura de tela do *software Algodoo*. Conservação do momento angular mesmo com a variação do momento de inércia de um sistema **170**

Figura 12.05: Exercício Resolvido 12.02 - Representação de um estudante girando em uma cadeira giratória **174**

Figura 12.06: Exercício Proposto 12.02 - Representação de um estudante girando em uma cadeira giratória **176**

Figura 12.07: Pião girando em torno do seu eixo de rotação em um movimento de precessão ...**177**

SUMÁRIO

Capítulo 1 — Rotação — 13

1.1 O que é Rotação? 14

1.2 – As Grandezas de Rotação 15
1.2.1 – Posição Angular 15
1.2.2 – Deslocamento Angular 16
1.2.3 – Velocidade Angular 17
1.2.4 – Aceleração Angular 18
1.2.5 – Aceleração Angular Constante 18

USANDO O *ALGODOO* 1.0 19
TAREFA PROPOSTA 1.0 20

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS 21

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 22

Saiba mais... 23

REVISÃO 24

Capítulo 2 — Conexões entre as Variáveis Lineares e as Angulares — 26

2.1 – Movimento Circular e Uniforme de Rotação 27

2.2 – Movimento Circular Acelerado 31

USANDO O *ALGODOO* 2.0 32
TAREFA PROPOSTA 2.0 34

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS 35

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 36

Saiba mais... 36

REVISÃO 38

Capítulo 3 — Movimentos Circulares Acoplados — 40

USANDO O *ALGODOO* 3.0 44
TAREFA PROPOSTA 3.0 45

EXERCÍCIO RESOLVIDO 46

EXERCÍCIO PROPOSTO 47

REVISÃO 48

Capítulo 4 | Energia Cinética de Rotação | 49

4.1 – Momento de Inércia – Distribuição Contínua de Massa 52
4.1.1 – Centro de Massa 52
4.1.2 – Teorema dos Eixos Paralelos 53

USANDO O *ALGODOO* 4.0 54
TAREFA PROPOSTA 4.0 55

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS 56

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 58

Saiba mais... 58

REVISÃO 60

Capítulo 5 | Torque | 61

USANDO O *ALGODOO* 5.0 65
TAREFA PROPOSTA 5.0 66

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS 67

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 68

Saiba mais... 69

REVISÃO 70

Capítulo 6 | Trabalho e Energia Cinética de Rotação | 71

6.1 – Potência 76

USANDO O *ALGODOO* 6.0 77
TAREFA PROPOSTA 6.0 79

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS 81

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 83

Saiba mais... 84

REVISÃO 86

Capítulo 7 **Rolamento** **88**

7.1 – O que é Rolamento? 89

7.2 – Rolamento: uma combinação de Rotação e Translação 90

7.3 – Rolamento como uma Rotação Pura 93

USANDO O *ALGODOO* 7.0 95
TAREFA PROPOSTA 7.0 98

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS 99

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 102

Saiba mais... 103

REVISÃO 104

Capítulo 8 **Energia Cinética de Rolamento** **106**

USANDO O *ALGODOO* 8.0 109
TAREFA PROPOSTA 8.0 109

EXERCÍCIO RESOLVIDO 111

EXERCÍCIO PROPOSTO 113

REVISÃO 114

Capítulo 9 **As Forças de Rolamento** **115**

9.1 – Atrito e Rolamento 116

9.2 – Rolamento no Plano Inclinado 117

USANDO O *ALGODOO* 9.0 122
TAREFA PROPOSTA 9.0 123

EXERCÍCIO RESOLVIDO 126

EXERCÍCIO PROPOSTO 126

REVISÃO 127

Capítulo 10 **Revisando o Torque** **129**

USANDO O *ALGODOO* 10.0 133
TAREFA PROPOSTA 10.0 134

EXERCÍCIO RESOLVIDO 135

EXERCÍCIO PROPOSTO 138

Saiba mais... 138

REVISÃO 141

Capítulo 11 | Momento Angular | 144

11.1 – Momento Angular e a Segunda Lei de Newton 146

11.2 – Momento Angular de um Sistema de Partículas 148

11.3 – Momento Angular de um Corpo Rígido 149

USANDO O *ALGODOO* 11.0 152
TAREFA PROPOSTA 11.0 153

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS 155

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 158

Saiba mais... 158

REVISÃO 161

Capítulo 12 | Conservação do Momento Angular | 164

USANDO O *ALGODOO* 12.0 170
TAREFA PROPOSTA 12.0 171

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS 172

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 176

Saiba mais... 177

REVISÃO 178

Respostas dos Exercícios Propostos | 180

Referências Bibliográficas | 181



CAPÍTULO 1

ROTAÇÃO

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Definir o que é um movimento de rotação de um corpo rígido ou de uma partícula.
- ✓ Identificar quais são as grandezas da rotação.
- ✓ Usar o *software* de simulação Física *Algodoo* como extensão do aprendizado do capítulo.

Capítulo 1 Rotação

1.1 - O que é Rotação?

Rotação é o movimento de giro de um corpo ou uma partícula em torno de um ponto ou eixo fixos, podendo ou não ter um movimento linear somado a esse corpo ou partícula.

Para entender melhor, imagine um disco girando em torno de seu centro. O disco está em movimento de rotação, mas não está se movendo para frente ou para trás. Ele está apenas girando em torno de seu próprio eixo.

O movimento de rotação é caracterizado por três grandezas:

ângulo: medida do quanto um objeto girou em torno de seu eixo;
velocidade angular: taxa de mudança do ângulo de um objeto;
aceleração angular: taxa de mudança da velocidade angular de um objeto.

A rotação é uma parte fundamental da mecânica e é aplicada em diversos contextos.

A rotação da Terra sobre seu eixo, por exemplo, é responsável pela sucessão de dia e noite. O movimento de engrenagens em máquinas também é um exemplo de rotação. O movimento de rotação um disco em relação de seu centro é outro um exemplo típico de movimento de rotação.

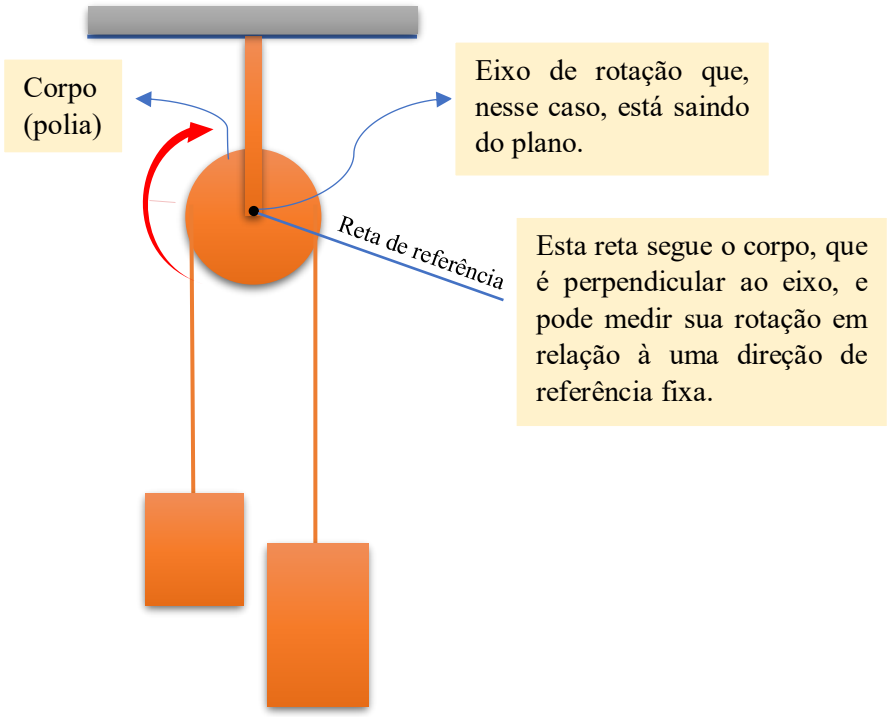


Figura 1.01: Máquina de Atwood ilustrando o movimento de rotação de uma polia em relação a um eixo fixo.

1.2 - As Grandezas de Rotação

Para nossa análise, iremos restringir nosso foco à rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo. Um corpo rígido é aquele que gira mantendo todas as suas partes interconectadas e sem sofrer alterações em sua forma. Um eixo fixo é um ponto de referência que não se move. Ele é utilizado para descrever o movimento de rotação de um corpo rígido.

A **Figura 1.01** ilustra uma polia executando um movimento de rotação em torno de um eixo fixo. Durante esse movimento, todos os pontos da polia percorrem trajetórias circulares cujo centro é o próprio eixo de rotação. Além disso, todos os pontos da polia descrevem o mesmo ângulo durante o mesmo intervalo de tempo.

O movimento de linear de um corpo é chamado de **translação**. Se houver apenas o movimento linear, sem que haja o de rotação, obviamente, trata-se de uma **translação pura**.

Imagine uma fila de pessoas andando em linha reta. A distância percorrida por cada pessoa é a mesma no mesmo intervalo de tempo, ou seja, todos os pontos da fila gastam o mesmo tempo para percorrer a mesma distância. Esse tipo de movimento é chamado de translação pura.

As correspondentes angulares das grandezas lineares serão tratadas em seguida.

1.2.1 - Posição Angular

A **posição angular** de uma reta é definida como o ângulo formado por essa reta em relação a uma direção fixa que é considerada como a posição angular zero. Na **Figura 1.02**, a posição angular, representada por θ, é medida em relação ao semieixo x positivo.

O ângulo θ pode ser expresso da seguinte forma:

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \textit{(radianos - rad)} \qquad \textit{(1.01)}$$

- θ – posição angular;
- s – comprimento de um arco de circunferência formado entre o eixo positivo de x (posição angular zero) até a reta de referência;
- r – raio da circunferência.

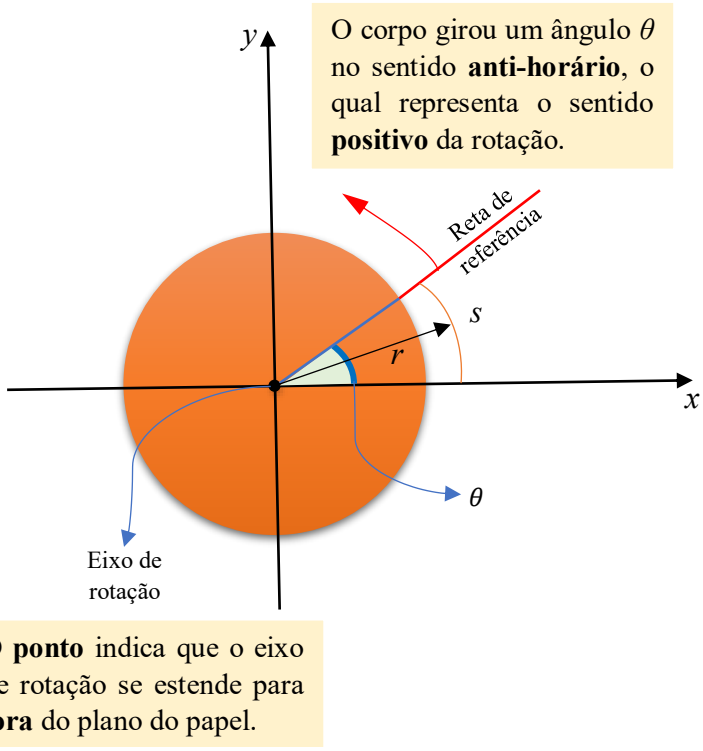


Figura 1.02: Circunferência com rotação em sentido anti-horário. A reta de referência é perpendicular ao eixo de rotação e faz um ângulo θ com o eixo x.

Em relação ao sentido da rotação:

- **horário:** sentido **negativo** da rotação;
- **anti-horário:** sentido **positivo** da rotação.

Na **Equação 1.01**, o ângulo definido dessa forma é medido em **radianos** *(rad)*, medida sem dimensão.

Para fazer a conversão de radianos em graus, podemos usar uma regra de três simples:

Comprimento (s)	Ângulo (rad)	Ângulo (graus)
1 volta completa - $2\pi r$	2π	360º
Meia volta - πr	π	180º
¼ de volta - $\pi r/2$	$\pi/2$	90º

Tabela 1.01: Equivalência entre medidas de ângulos em radianos e em graus.

1.2.2 - Deslocamento Angular

Se o círculo da **Figura 1.02** gira em torno do eixo fixo de rotação, fazendo com que a reta de referência mude da posição angular θ_1 para θ_2, o corpo sofre uma variação na sua posição angular e, portando, descreve um **deslocamento angular** $\Delta\theta$ expresso por:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \ (rad) \qquad (1.02)$$

- θ_1 – posição angular inicial;
- θ_2 – posição angular final;
- $\Delta\theta$ – variação da posição angular ou deslocamento angular.

IMPORTANTE

Da mesma forma que se dá o sentido de rotação do corpo, um deslocamento angular no sentido anti-horário é positivo, enquanto no sento horário, negativo.

1.2.3 - Velocidade Angular

Considere que um corpo em movimento de rotação está na posição angular θ_1, no instante t_1, e em θ_2, em t_2, como na **Figura 1.03** a seguir. O módulo da **velocidade angular média** do corpo nesse intervalo de tempo é definido como:

$$\omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \ (rad/s) \qquad (1.03)$$

- ω_m – módulo da velocidade angular média;
- $\Delta\theta$ – variação da posição angular ou deslocamento angular;
- Δt – intervalo de tempo, tempo gasto ou tempo decorrido.

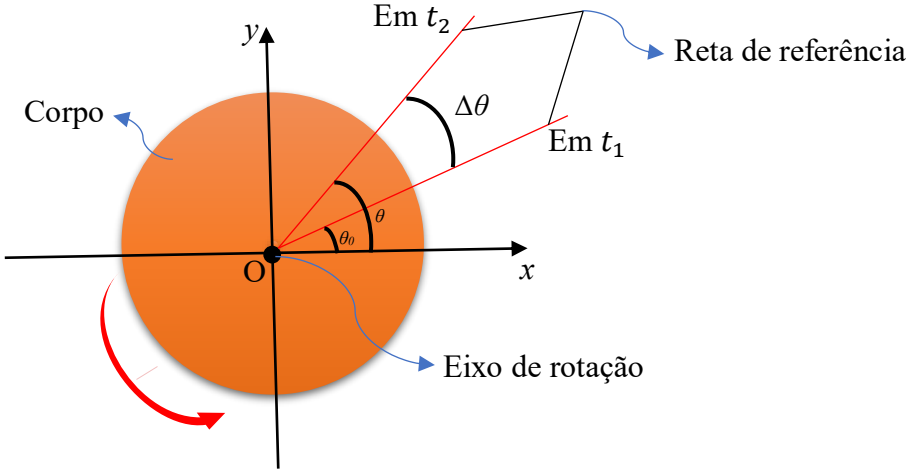


Figura 1.03: Reta de referência do corpo rígido variando das posições angulares θ_1 para θ_2 nos instantes t_1 e t_2, respectivamente, formando o deslocamento angular $\Delta\theta$ no intervalo de tempo Δt.

1.2.4 - Aceleração Angular

Quando a velocidade angular de um corpo, com o passar do tempo, sofre variações, ou seja, não é constante, o corpo possui **aceleração angular**.

O módulo da aceleração angular média de um corpo em rotação é obtido por meio da equação:

$$\alpha_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t}$$

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (rad/s^2) \qquad (1.04)$$

- α_m – módulo da aceleração angular média;
- ω_2 – velocidade angular final;
- ω_1 – velocidade angular inicial;
- $\Delta\omega$ – variação da velocidade angular;
- Δt – intervalo de tempo, tempo gasto ou tempo decorrido.

IMPORTANTE

A velocidade angular pode ser expressa como uma **grandeza vetorial** e o sentido do vetor velocidade angular é dado pela regra da mão direita, se estendendo sempre ao longo do eixo de rotação. Veremos como utilizar essa regra mais à frente.

1.2.5 - Aceleração Angular Constante

Em movimentos de translação pura, as equações que descrevem movimentos com aceleração linear constante têm equivalentes nas equações que descrevem movimentos de rotação pura com aceleração angular constante.

Vamos demonstrar um par de equações (aceleração linear constante e aceleração angular constante) e generalizar para as demais situações, considerando $t_1 = 0$ e $t_2 = t$:

- $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \Delta v = a\Delta t \rightarrow v_2 - v_1 = a(t_2 - t_1) \rightarrow \boldsymbol{v_2 = v_1 + at}$ (para $t_1 = 0$)
- $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \rightarrow \Delta\omega = \alpha\Delta t \rightarrow \omega_2 - \omega_1 = \alpha(t_2 - t_1) \rightarrow \boldsymbol{\omega_2 = \omega_1 + \alpha t}$ (para $t_0 = 0$)

A **Tabela 1.03** discrimina a correspondência entre as equações angulares e as equações lineares:

Equação Linear	Equação Angular	Nº da Equação Angular
$v_2 = v_1 + at$	$\omega_2 = \omega_1 + \alpha t$	(1.05)
$\Delta S = v_1 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\Delta\theta = \omega_1 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	(1.06)
$S_2 = S_1 + v_1 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta_2 = \theta_1 + \omega_1 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	(1.07)
$v_m = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$	$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$	(1.08)
$v_2^2 = v_1^2 + 2a\Delta S$	$\omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\alpha\Delta\theta$	(1.09)

Tabela 1.02: Equivalência entre as equações de movimento para acelerações linear e angular constantes.

USANDO O *ALGODOO* 1.0

A partir de agora, vamos, antes dos exercícios de cada capítulo, apresentar, quando possível, simulações dos conteúdos do referido tópico por meio de um aplicativo de simulação de Física em duas dimensões (2D) chamado ***Algodoo***.

O objetivo do uso deste aplicativo é mostrar um meio interativo de alinhar a teoria dos assuntos deste material à prática, através de um *software* computacional gratuito e de fácil acesso, que pode, inclusive, ser usado sem a necessidade de acesso à *internet*, o que traz uma enorme facilidade quanto ao seu uso.

O *Algodoo* pode ser baixado por meio do endereço eletrônico (*http://www.algodoo.com/download*). E, para uma interação mais simples, sua extensão em português também pode ser encontrada no *link (https://bitlybr.com/aouCl)*.

Além disso, sempre que plausível, haverá uma sugestão de atividade direcionada ao leitor para confirmação dos fenômenos estudados, além de vídeos com tutoriais das simulações.

Para todas as interações no aplicativo, haverá *links* e/ou códigos de leitura que direcionará o usuário ao acesso do material eletrônico.

Feita essa breve introdução sobre o *software*, vamos à prática.

A **Figura 1.04** a seguir contém um disco homogêneo em rotação descrevendo um movimento circular variável, no qual podemos vizualizar o valor da sua velocidade angular de rotação em um determinado instante.

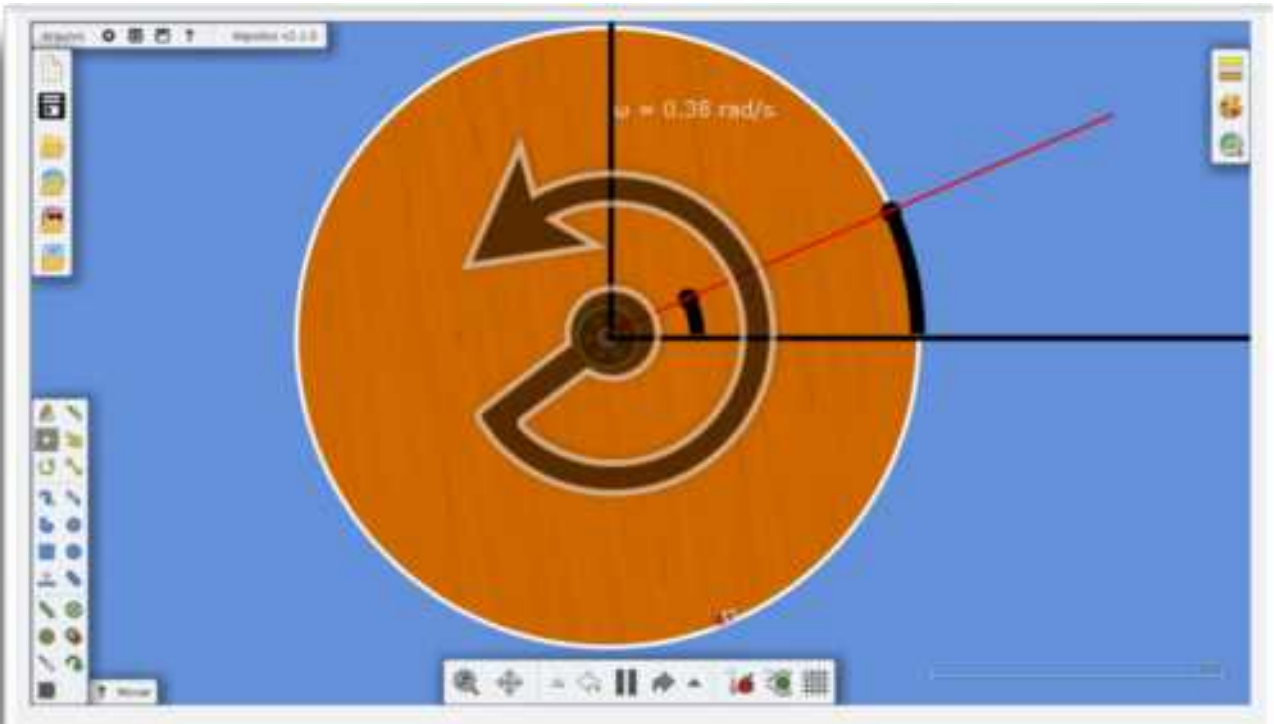


Figura 1.04: Captura de tela do *software Algodoo*: disco rígido em rotação.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=263993*.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em: *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

Clique no *link https://youtu.be/g4AbAEK3zm4* ou escaneie o *QR code* a seguir para assistir ao vídeo do tutorial da animação.

TAREFA PROPOSTA 1.0

Agora, é a sua vez de verificar se os resultados da tabela abaixo batem com uma simulação no programa.

A **Tabela 1.03** abaixo apresenta os dados para cálculo da velocidade angular de dois discos homogêneos.

Disco	$\Delta\theta$ (rad)	Δt (s)	$\omega_m = {}^{\Delta\theta}/_{\Delta t}$ *(rad/s)*
A	2π (sentido anti-horário)	0,5	
B	-2π (sentido horário)	2	

Tabela 1.03: Tabela para cálculo da velocidade angular média da Tarefa Proposta 1.0.

Considere $\pi = 3{,}14$ e utilize os dados apresentados na tabela e realize os cálculos para obter a velocidade angular média de cada disco fazendo uso da equação da última coluna da tabela.

Em seguida, clique **AQUI** para verificar a simulação com os resultados para cada disco.

E aí, acertou!?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1.01 – Determine a velocidade angular média de um ponto sobre um círculo em rotação que variou 2π radianos em um intervalo de tempo de 4 segundos.

Solução: Para calcular a velocidade angular média, usaremos a **Equação 1.03**:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\omega_m = \frac{2\pi \text{ rad}}{4\ s}$$

$$\boxed{\omega_m = 0{,}5\pi \text{ rad/s}}$$

Assim, a velocidade angular do ponto é de $0{,}5\pi$ *rad/s*.

1.02 – Qual o tempo necessário para que um corpo rígido gire em uma volta completa em torno de um eixo fixo localizado no seu centro (rotação pura), sabendo que o módulo da sua aceleração média será de 2 *rad/s*^{2} e o módulo da variação da sua velocidade angular, 30 *rad/s*?

Solução: Para calcular a o tempo necessário para o corpo realizar uma volta completa em torno do eixo central, usaremos a **Equação 1.04**:

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta\omega}{\alpha_m}$$

$$\Delta t = \frac{30\ rad/s}{2\ rad/s^2}$$

$$\boxed{\Delta t = 15\ s}$$

Portanto, o tempo necessário para realização do giro completo do disco é de 15 *s*.

1.03 – Um objeto gira com aceleração angular constante de 2 *rad/s*^{2}. Inicialmente, o objeto tem velocidade angular de 5 *rad/s* na posição angular $\theta_1 = 0$ em relação à horizontal. Em que instante esse objeto terá girado até a posição $\theta_2 = 36$ rad?

Solução: Para calcular o instante final, usaremos a **Equação 1.07**:

$$\theta_2 = \theta_1 + \omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$36 = 0 + 5t + \frac{1}{2}.2t^2$$

$$36 = 5t + t^2$$

$$t^2 + 5t - 36 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\,.\,1\,.\,(-36)}}{2}$$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2}$$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2}$$

$$t = \frac{-5 \pm 13}{2}$$

$$t_1 = \frac{-5 + 13}{2} = \frac{8}{2} = 4\ s$$

$$t_2 = \frac{-5 - 13}{2} = -\frac{18}{2} = -9\ s$$

Como o tempo é necessariamente positivo, a resposta correta é 4 *s*.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1.01 – Determine o deslocamento angular, em radianos, de um círculo em rotação em que um ponto arbitrário sobre ele obteve, em módulo, uma velocidade angular média de 8 *rad/s* em um intervalo de tempo de 0,5 segundo.

1.02 – Qual a intensidade da aceleração angular média de um corpo rígido em rotação pura, sabendo que no intervalo de tempo de 8 *s* ele variou sua velocidade angular em 40 *rad/s*.

1.03 – Um objeto gira com aceleração angular constante de 3 *rad/s*^{2}. Inicialmente, o objeto tem velocidade angular de 2 *rad/s* na posição angular $\theta_1 = 1\ rad$ em relação à horizontal. Em que instante esse objeto terá girado até a posição $\theta_2 = 67\ rad$?

Saiba mais...

Para se calcular a **velocidade angular instantânea**, podemos usar o limite do quociente da **Equação 1.03** quando Δt tende a zero:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad \rightarrow \quad \int d\theta = \int \omega \, dt$$

Da mesma forma, a **aceleração angular instantânea** é o limite do quociente da **Equação 1.04** quando Δt tende a zero:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad \rightarrow \quad \int d\omega = \int \alpha \, dt$$

REVISÃO

As Grandezas de Rotação

Posição angular: A **posição angular** de uma **reta de referência** é definida como o ângulo formado por essa reta em relação a uma direção fixa que é considerada como a posição angular zero. Se $\boldsymbol{\theta}$ for medido em radianos:

$$\theta = \frac{s}{r} \text{ (radianos - rad)} \qquad (1.01)$$

- θ – ângulo;
- s – arco da circunferência;
- r – raio da circunferência.

Deslocamento angular: Quando um corpo gira em torno de um eixo de rotação ele sofre um **deslocamento angular** $\Delta\theta$ expresso por:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \text{ (rad)} \qquad (1,02)$$

- $\Delta\theta$ – deslocamento angular;
- θ_2 – posição angular final;
- θ_1 – posição angular inicial.

Velocidade angular média: A variação da posição angular $\Delta\theta$ por intervalo de tempo para um corpo em rotação descrever esse deslocamento é chamada de **velocidade angular média ω_m:**

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \text{ (rad/s)} \qquad (1.03)$$

- ω_m – velocidade angular média;
- $\Delta\theta$ – deslocamento angular;
- Δt – intervalo de tempo.

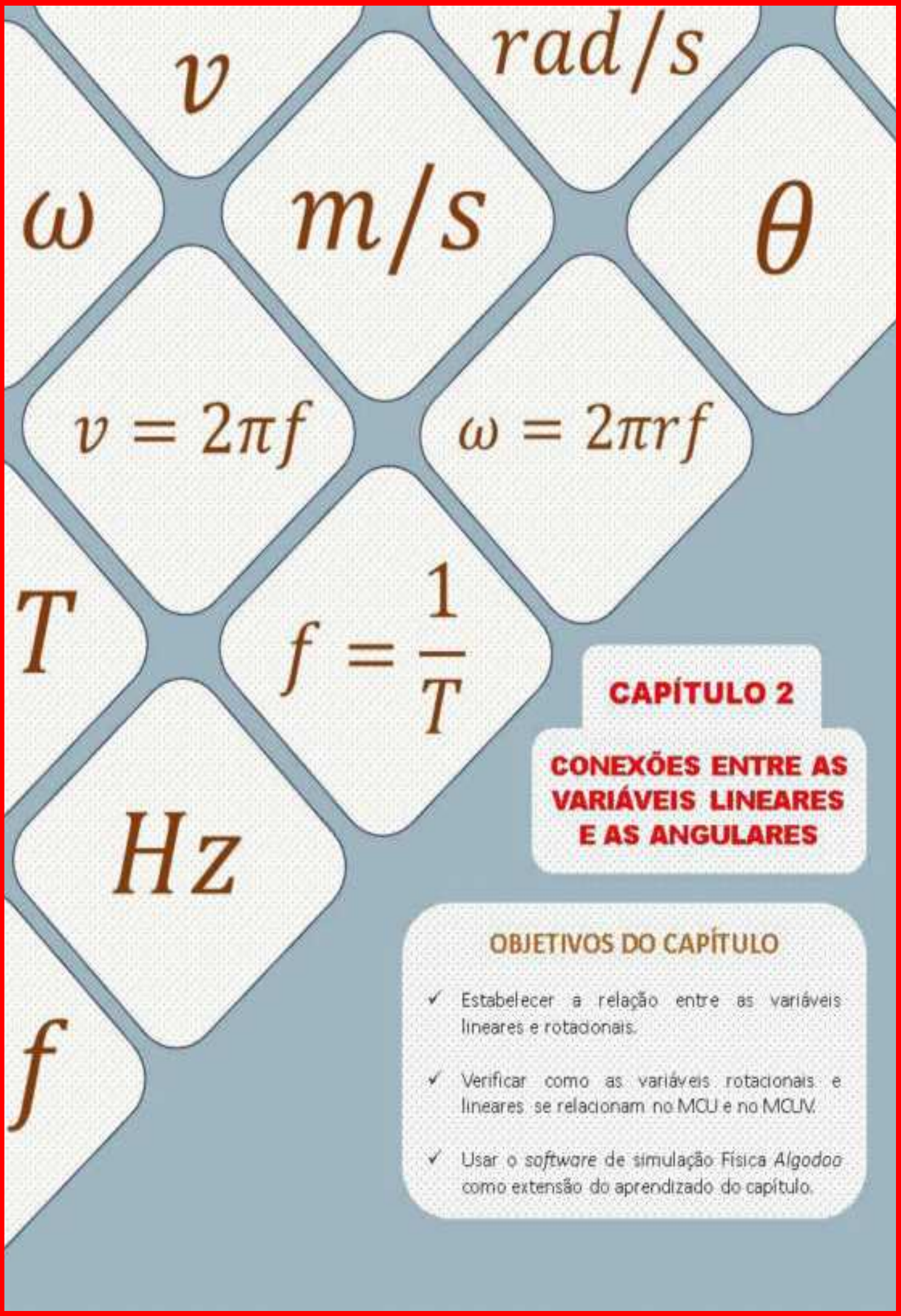
Aceleração angular média: Quando, com o passar do tempo, a velocidade angular do corpo rígido em rotação sofre variações, ou seja, não é constante, o corpo possui aceleração angular. A aceleração angular média é obtida através da expressão:

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \ (rad/s^2) \qquad (1.04)$$

- α_m – aceleração angular média;
- $\Delta\omega$ – variação da velocidade angular;
- Δt – intervalo de tempo.

Aceleração angular constante: Para o movimento de rotação com **aceleração angular constante**, a **Tabela 2.02** mostra as equações equivalentes entre os movimentos de translação e rotação com acelerações escalares constantes:

Equação Linear	Equação Angular	Nº da Equação Angular
$v_2 = v_1 + at$	$\omega_2 = \omega_1 + \alpha t$	(1.05)
$\Delta S = v_1 t + \frac{1}{2}at^2$	$\Delta\theta = \omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(1.06)
$S_2 = S_1 + v_1 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta_2 = \theta_1 + \omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(1.07)
$v_m = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$	$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$	(1.08)
$v_2^2 = v_1^2 + 2a\Delta S$	$\omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\alpha\Delta\theta$	(1.09)



CAPÍTULO 2

CONEXÕES ENTRE AS VARIÁVEIS LINEARES E AS ANGULARES

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Estabelecer a relação entre as variáveis lineares e rotacionais.
- ✓ Verificar como as variáveis rotacionais e lineares se relacionam no MCU e no MCUV.
- ✓ Usar o *software* de simulação Física *Algodoo* como extensão do aprendizado do capítulo.

Capítulo 2 Conexões entre as Variáveis Lineares e as Angulares

Analisamos, no capítulo anterior, a relação entre as grandezas de movimento linear e angular em um movimento circular com aceleração constante. Agora, imagine uma partícula que se move ao longo de uma circunferência com velocidade escalar constante. Essa partícula está realizando um movimento circular uniforme (MCU).

No MCU, a velocidade escalar linear da partícula é constante, ou seja, o módulo da velocidade é sempre o mesmo, e sua direção é sempre tangente à trajetória circular, que também é perpendicular ao raio.

Vamos imaginar um disco girando em torno de um eixo fixo. Cada ponto do disco descreve uma circunferência em torno do eixo. Elas completam uma volta no mesmo intervalo de tempo, resultando em uma velocidade angular constante ω. No entanto, a velocidade escalar linear de cada ponto do disco é diferente em relação à distância do eixo de rotação.

Para relacionar as grandezas lineares e angulares de um movimento rotacional, precisamos considerar essas grandezas em função do raio da trajetória circular, o qual é perpendicular ao eixo fixo de rotação.

2.1 - Movimento Circular e Uniforme de Rotação

No MCU, o tempo necessário para um corpo ou partícula completar uma volta chama-se de período T.

Por ou lado, a frequência f em um movimento circular e uniforme indica quantas vezes um objeto gira em torno de um ponto central em um determinado intervalo de tempo. Quanto maior a frequência, mais rápido o objeto gira.

A frequência é calculada dividindo-se o número de voltas por um intervalo de tempo.

$$f = \frac{n}{\Delta t}$$

$$f = \frac{1}{T} \quad \textit{(hertz - Hz)} \qquad (2.01)$$

Concluímos, assim, que a frequência é o inverso do período, bem como o período é o inverso da frequência: $f = \frac{1}{T} \quad \rightarrow \quad T = \frac{1}{f}$.

- f – frequência;
- T – período;
- n – número de voltas.

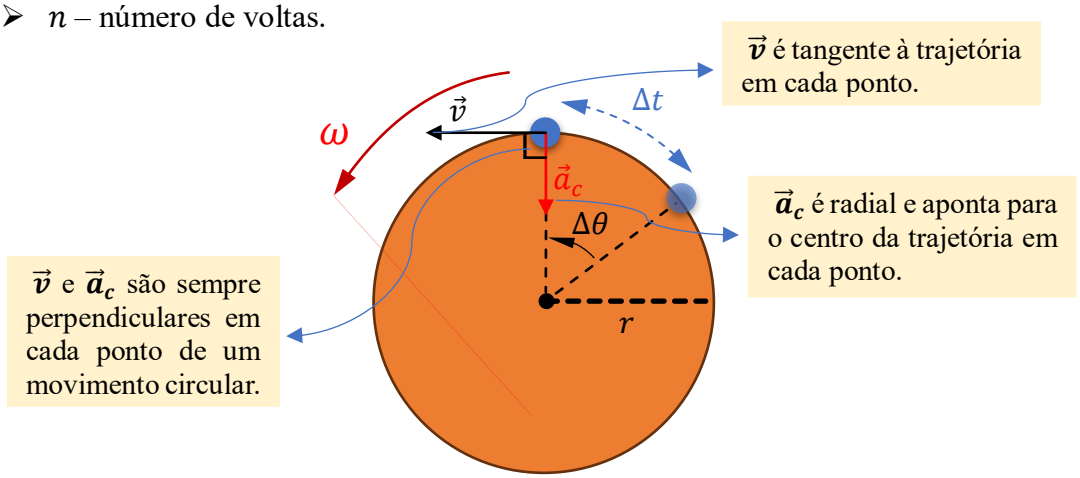


Figura 2.01: Esboço de um disco rígido em rotação em sentido anti-horário com uma partícula descrevendo um movimento circular e uniforme em torno de um eixo fixo.

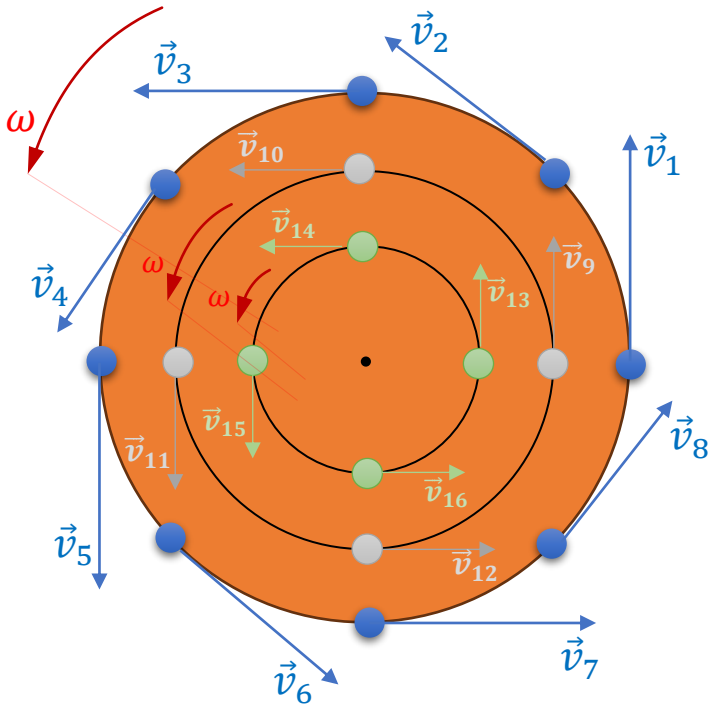


Figura 2.02: Corpo rígido circular em rotação em sentido anti-horário descrevendo um movimento circular e uniforme.

A **Figura 2.02** mostra que a direção da velocidade linear de um corpo em movimento circular é sempre tangente à trajetória. Isso significa que o corpo está sempre se movendo nessa direção. O módulo da velocidade linear, por sua vez, é proporcional ao raio da trajetória. Quanto mais afastado o ponto estiver do centro da trajetória, maior será o módulo da velocidade linear.

A **Figura 2.01** e a **Figura 2.02** mostram que, apesar de o movimento ser uniforme, apenas o módulo da velocidade linear não se altera, pois a **aceleração centrípeta**, que é a componente

radial da aceleração, é a responsável pela mudança da direção e do sentido da velocidade linear em cada ponto. A outra componente da aceleração, que no MCU é nula, responsável pela variação do módulo da velocidade linear, é a **aceleração tangencial**, que possui a mesma direção da velocidade linear. Além disso, a velocidade angular, no MCU, é constante em todos os pontos do corpo rígido, pois pontos distintos demoram o mesmo tempo para completar uma volta completa em torno do mesmo eixo fixo de rotação.

Assim, podemos dizer que, em módulo

- $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = v_6 = v_7 = v_8$
- $v_9 = v_{10} = v_{11} = v_{12}$
- $v_{13} = v_{14} = v_{15} = v_{16}$

Sendo o módulo da velocidade linear constante:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Para uma volta completa em um movimento circular, temos que:

- $\Delta S = 2\pi r$ – comprimento da circunferência;
- $\Delta t = T$ – período (tempo necessário para uma volta completa).

Substituindo:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad (m/s) \qquad (2.02)$$

Como $f = \frac{1}{T}$, também podemos escrever a velocidade em função da frequência:

$$v = 2\pi r f \quad (m/s) \qquad (2.03)$$

- v – módulo da velocidade linear;
- r – raio da trajetória circular;
- T – período;
- f – frequência.

Usando o fato de que, em radianos, uma volta completa corresponde ao deslocamento angular $\Delta\theta = 2\pi$, podemos reescrever a **Equação 2.02** em função da velocidade angular:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \boxed{\frac{2\pi}{T}}\, r = 2\pi r f = \omega r$$

ω

Logo:

$$v = \omega r \quad (m/s) \qquad (2.04)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (rad/s) \qquad (2.05)$$

$$\omega = 2\pi f \quad (rad/s) \qquad (2.06)$$

- v – módulo da velocidade linear;
- ω – velocidade angular constante;
- r – raio da trajetória circular;
- T– período;
- f – frequência.

Como já vimos, a aceleração centrípeta é radial, responsável pela mudança de direção e sentido da velocidade linear, é perpendicular ao vetor velocidade linear, aponta para o centro da trajetória circular e seu módulo é dado por:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

sendo v o módulo da velocidade linear e r o raio da trajetória circular.

Como $v = \omega r$:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r$$

Logo:

$$a_c = \omega^2 r \quad (m/s^2) \qquad (2.07)$$

Como $v = \omega r$, podemos também reescrever a aceleração centrípeta da seguinte forma:

$$a_c = \omega^2 r = \omega \,.\, \omega r = \omega v$$

$$a_c = \omega v \quad (m/s^2) \qquad (2.08)$$

- a_c – módulo da aceleração centrípeta;
- v – módulo da velocidade linear;
- ω – velocidade angular constante.

2.2 - Movimento Circular Acelerado

A **Tabela 1.02** já mostra a correspondência entre as equações do movimento linear e angular com acelerações constantes. Aqui, vamos estabelecer a relação entre essas grandezas na mesma equação.

O módulo da **aceleração linear média**, também chamada de tangencial, que, vetorialmente, é a componente do vetor aceleração em cada ponto, é dada pela equação:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$$

Sendo $v = \omega r$, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$a_m = \frac{\omega_2 r - \omega_1 r}{\Delta t} = \frac{(\omega - \omega_0)}{\Delta t} r = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} r = \alpha_m r$$

(α_m)

Para um **movimento circular uniformemente variado (MCUV)**, em que a aceleração tangencial é constante durante toda a trajetória, ou até mesmo se considerarmos uma aceleração angular instantânea em um curto intervalo de tempo, podemos escrever essa relação entre as acelerações como:

$$a_t = \alpha r \quad (m/s^2) \qquad (2.09)$$

- a_t – módulo da aceleração tangencial;
- α – aceleração angular;
- r – raio da trajetória circular.

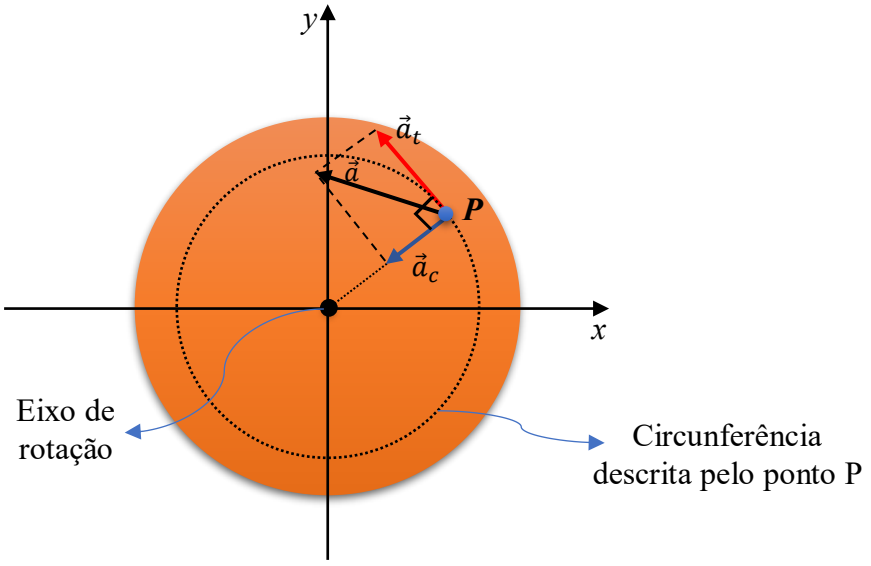


Figura 2.03: Corpo rígido circular em rotação no sentido anti-horário descrevendo um movimento circular acelerado.

Como mostrado na **Figura 2.03,** a aceleração linear de um ponto ***P,*** que pertence a um corpo rígido em rotação, possui uma componente centrípeta e, se o movimento de rotação for acelerado, contendo, portanto, uma aceleração angular não nula, a aceleração linear também possui uma componente tangencial:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c \ (m/s^2) \qquad (2.10)$$

- $\vec{a}$ – aceleração;
- $\vec{a}_t$ – aceleração tangencial (linear);
- $\vec{a}_c$ – aceleração centrípeta.

Como as componentes tangencial e centrípeta da aceleração são perpendiculares entre si, usamos o Teorema de Pitágoras para calcular o módulo da aceleração:

$$a^2 = a_t^2 + a_c^2 \ (m/s^2) \qquad (2.11)$$

- a – módulo da aceleração;
- a_t – módulo da aceleração tangencial (linear);
- a_c – módulo da aceleração centrípeta.

USANDO O *ALGODOO* 2.0

Na **Figura 2.04** a seguir, temos uma simulação do *Algodoo* de um círculo homogêneo em rotação descrevendo um movimento circular uniforme, no qual podemos visualizar que o módulo da velocidade linear é maior quanto mais o ponto se afasta do eixo de rotação.

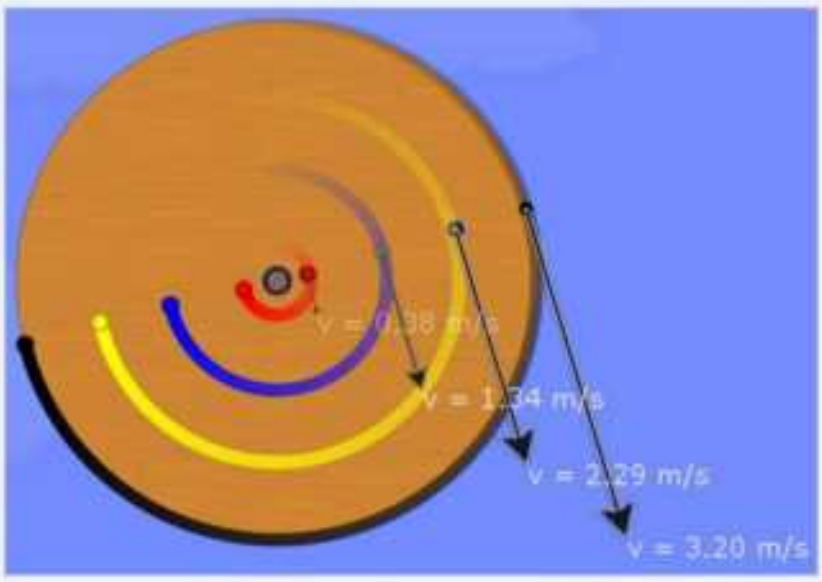


Figura 2.04: Captura de tela do *software Algodoo*: valores de módulos de velocidades lineares no MCU.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264031*

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em: *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

Podemos também, na **Figura 2.05**, observar no *software* que a velocidade angular, em cada ponto do corpo rígido, é constante para um movimento circular uniforme:

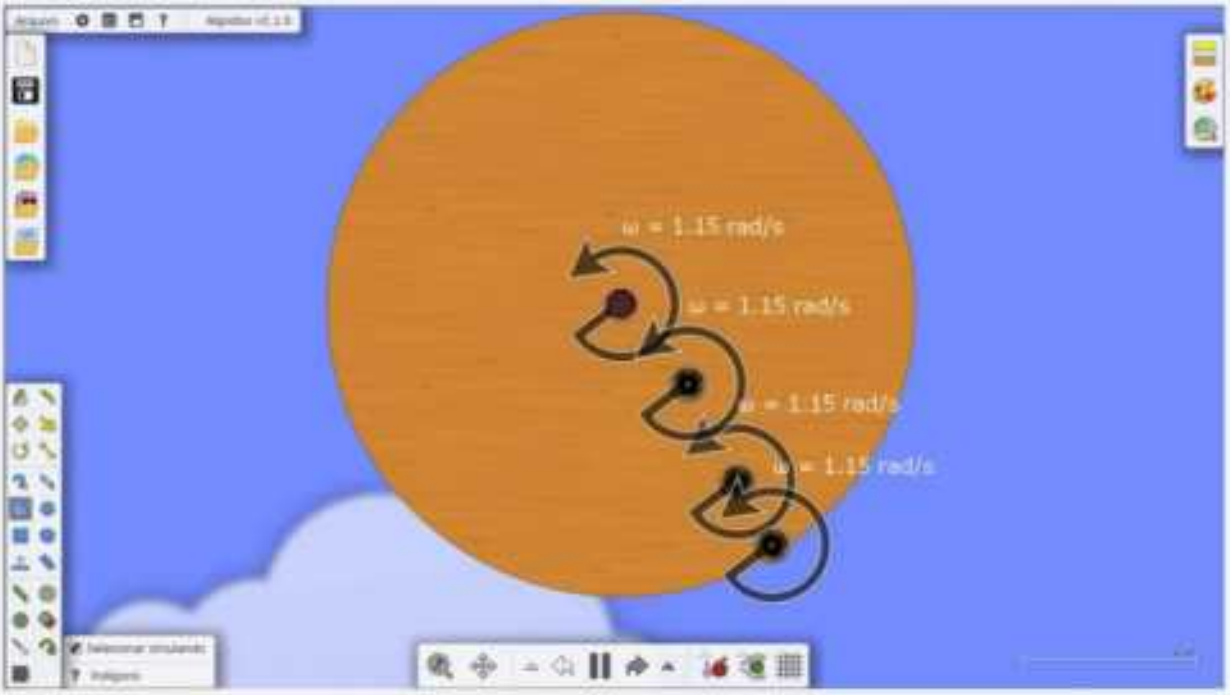


Figura 2.05: Captura de tela do *software Algodoo*: velocidade angular constante no MCU.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264032*.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em: *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

Na simulação da **Figura 2.05**, o corpo rígido está girando com velocidade angular constante $\omega = 1.15\ rad/s$ no sentido anti-horário e, portanto, o sinal do valor dessa grandeza é positivo.

Até agora, para facilitar nosso estudo, utilizamos discos rígidos com eixos fixos de rotações centrais como exemplo, pois, além da simetria ajudar no entendimento, o *Algodoo* é um simulador em duas dimensões. No entanto, todos esses conceitos servem para qualquer tipo de corpo rígido.

A **Figura 2.06** a seguir mostra um formato de corpo diferente, além do deslocamento do centro do eixo de rotação, mantendo as características da rotação. Cada ponto de um corpo rígido descreve um movimento circular em torno do eixo fixo de rotação.

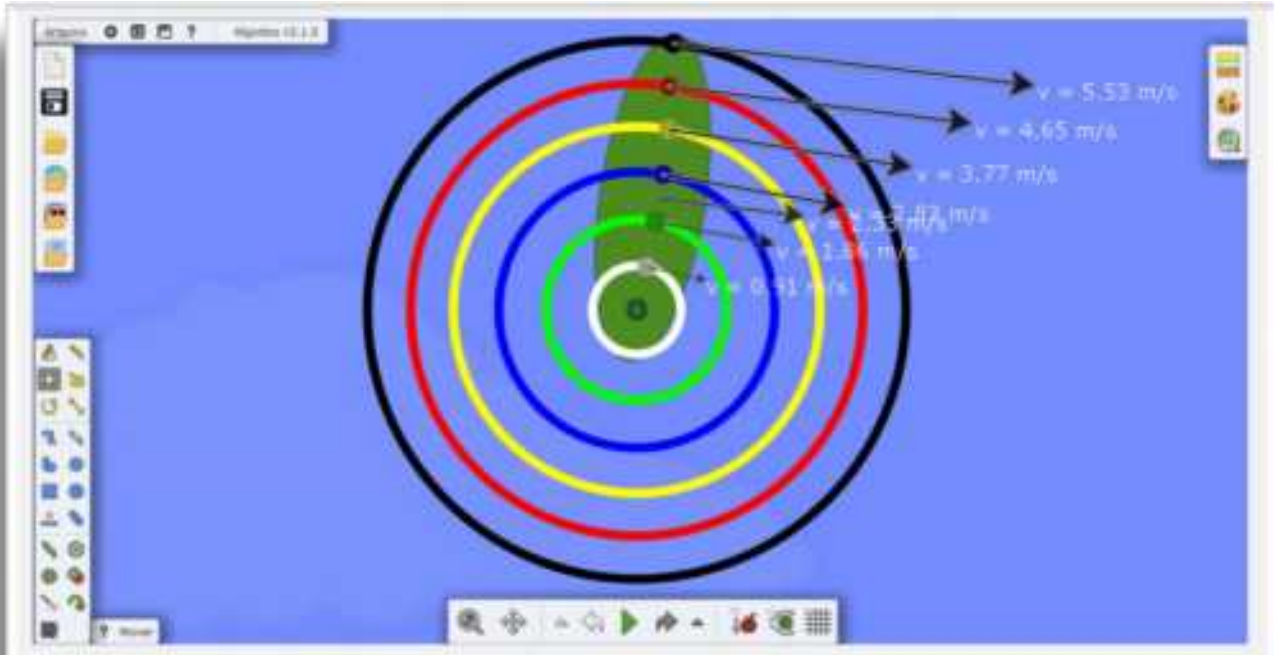


Figura 2.06: Captura de tela do *software Algodoo*: trajetória circular de pontos distintos de um corpo rígido em rotação.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264038*.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Clique no *link https://youtu.be/RU5w3V60Ye8* ou escaneie o *QR code* a seguir para assistir ao vídeo do tutorial da animação.

TAREFA PROPOSTA 2.0

Veja a **Tabela 2.01** a seguir:

Disco	ω (rad/s)	r (m)	$v = \omega r$ (m/s)
A	$\omega_A = 3{,}14\ rad/s$	1,5	
B	$\omega_B = 3{,}14\ rad/s$	1	
C	$\omega_C = 3{,}14\ rad/s$	0,5	
D	$\omega_D = 3{,}14\ rad/s$	0,25	

Tabela 2.01: Tabela para calcular a velocidade escalar linear para diferentes raios da Tarefa Proposta 2.0.

Na **Tabela 2.01**, constam as velocidades angulares e os raios de quatro discos rígidos homogêneos em MCU. Todos eles possuem a mesma velocidade angular. Já as velocidades escalares lineares nas extremidades de cada disco, nesses casos, irão depender, principalmente, dos seus raios.

Utilize os dados apresentados na tabela e realize os cálculos para obter as velocidades escalares lineares dos discos, fazendo uso da equação da última coluna da tabela.

Em seguida, clique **AQUI** para verificar a simulação com os resultados para cada disco.

E aí, acertou!?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2.01 – Um atleta mantém uma velocidade constante de $0{,}5\pi$ *m/s* enquanto corre em uma pista circular, completando uma volta em 40 segundos. Determine a frequência de rotação do corredor, sua velocidade angular e o raio da trajetória circular descrita pelo atleta.

Solução: Vamos usar **a Equação 2.01** para calcular a frequência:

$$f = \frac{1}{T}$$

$$f = \frac{1}{40}$$

$$\boxed{f = 0{,}025\ Hz}$$

Com o valor da frequência, vamos determinar a velocidade angular do atleta, utilizando a **Equação 2.06:**

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = 2\pi \,.\, 0{,}025$$

$$\boxed{\omega = 0{,}05\pi\ rad/s}$$

Para calcular o raio da trajetória, usaremos a **Equação 2.03** ou a **Equação 2.04**. Vamos utilizar a 2.04:

$$v = \omega r$$

$$r = \frac{v}{\omega}$$

$$r = \frac{0{,}5\pi}{0{,}05\pi}$$

$$\boxed{r = 10\ m}$$

Portanto, a frequência de rotação, a velocidade angular e o raio da trajetória circular do atleta são, respectivamente, iguais a 0,025 *Hz*, $0{,}05\pi$ *rad/s* e 10 *m*.

2.02 – Um veículo está em movimento circular e uniforme com velocidade angular de 0,5 *rad/s*. Sendo o raio da trajetória circular é igual 10 *m*, qual o módulo da aceleração desse veículo?

Solução: Apesar de o movimento ser uniforme, existe aceleração centrípeta para o movimento circular. Para calcular a aceleração centrípeta, usaremos a **Equação 2.07**:

$$a_c = \omega^2 r$$
$$a_c = 0{,}5^2 \,.\, 10$$
$$a_c = 0{,}25 \,.\, 10$$
$$\boxed{a_c = 2{,}5\ m/s^2}$$

Logo, o módulo da aceleração centrípeta, intensidade da componente radial da aceleração do veículo, é de 2,5 m/s^2.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2.01 – Um atleta mantém uma velocidade constante de $0{,}8\pi$ *m/s* enquanto corre em uma pista circular, completando uma volta em 50 segundos. Determine a frequência de rotação do corredor, sua velocidade angular e o raio da trajetória circular descrita pelo atleta.

2.02 – Uma partícula está em movimento circular e uniforme com velocidade angular de 4 *rad/s*. Sendo o raio da trajetória dessa partícula é igual a 0,2 *m*, qual o módulo da sua aceleração?

Saiba mais...

Para se demonstrar a equação de se calcular o módulo da **velocidade linear** de um ponto considerado, podemos partir da **Equação 1.01**:

$$\theta = \frac{s}{r}$$
$$\boxed{s = \theta r}$$

A derivada de $\boldsymbol{s}$ em relação ao tempo é o módulo da velocidade linear, assim como a derivada de $\boldsymbol{\theta}$ no tempo é a velocidade angular do ponto em rotação, com *r* constante:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r \qquad (v \leftarrow \frac{ds}{dt},\ \omega \leftarrow \frac{d\theta}{dt})$$
$$\boxed{v = \omega r}$$

Por vezes, falamos em $\boldsymbol{a}$ como sendo a aceleração linear, mas na verdade estamos nos referindo ao módulo da componente da aceleração linear responsável pela variação do módulo da velocidade que é tangente à trajetória circular em cada ponto, ou seja, $\boldsymbol{a_t}$ é a intensidade dessa

componente tangencial da aceleração linear $\vec{a}$.

Assim, derivando a **Equação 2.04** em relação ao tempo, encontraremos a componente da aceleração responsável por variar o módulo da velocidade linear tangencial, ou seja, o módulo da componente tangencial da aceleração, bem como a aceleração angular:

$$v = \omega r$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r$$

($\frac{dv}{dt} \rightarrow a_t$; $\frac{d\omega}{dt} \rightarrow \alpha$)

$$\boxed{a_t = \alpha r}$$

REVISÃO

Conexões entre as Variáveis Lineares e Angulares

Movimento Circular e Uniforme de Rotação

Frequência: No MCU, o tempo necessário para um corpo rígido ou uma partícula completar uma volta em torno de um eixo fixo se chama **período**. A frequência indica o período necessário para uma volta completa. Assim, a frequência é expressa por:

$$f = \frac{1}{T} \ (Hz) \qquad (2.01)$$

- f – frequência;
- T – período.

Velocidade linear escalar e velocidade angular: como a distância percorrida para uma volta completa em um movimento circular uniforme corresponde ao comprimento de uma circunferência, assim como 360º corresponde a 2π em radianos, podemos expressar a velocidade linear escalar e a velocidade angular de um corpo rígido ou uma partícula através das expressões:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \ (m/s) \qquad (2.02)$$

$$v = 2\pi r f \ (m/s) \qquad (2.03)$$

$$v = \omega r \ (m/s) \qquad (2.04)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \ (rad/s) \qquad (2.05)$$

$$\omega = 2\pi f \ (rad/s) \qquad (2.06)$$

Aceleração centrípeta: Mesmo no MCU, o vetor velocidade muda com o passar do tempo em direção e sentido, sendo ele sempre tangente à trajetória. A grandeza responsável pela mudança dessas características é a componente radial da aceleração chamada **aceleração centrípeta**, radial ao movimento de rotação, e seu módulo, em função da velocidade angular, pode ser calculado das seguintes formas:

$$a_c = \omega^2 r \ (m/s^2) \qquad (2.07)$$

$$a_c = \omega v \ (m/s^2) \qquad (2.08)$$

- a_c – módulo da aceleração centrípeta;
- ω – velocidade angular;
- r – raio;
- v – velocidade linear escalar.

Movimento Circular Acelerado

Aceleração tangencial: A componente da aceleração responsável pela variação do módulo da velocidade linear é chamada de **aceleração tangencial**, pois possui a mesma direção da velocidade linear, que também é tangencial à trajetória circular e é expressa por:

$$a_t = \alpha r \ (m/s^2) \qquad (2.09)$$

- a_t – módulo da aceleração tangencial;
- α – aceleração angular;
- r – raio.

Aceleração: A aceleração de um corpo ou uma partícula é a soma vetorial das componentes radial (centrípeta) e tangencial:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c \ (m/s^2) \qquad (2.10)$$

- $\vec{a}$ – aceleração;
- $\vec{a}_t$ – aceleração tangencial;
- $\vec{a}_c$ – aceleração centrípeta.

Modulo da aceleração: A aceleração é o vetor resultante da soma das suas duas componentes, a tangencial e a centrípeta. Essas duas componentes são perpendiculares entre si e o **módulo do vetor aceleração** pode ser calculado usando o teorema de Pitágoras:

$$a^2 = a_t^2 + a_c^2 \ (m/s^2) \qquad (2.11)$$

- a – módulo da aceleração;
- a_t – módulo da aceleração tangencial;
- a_c – módulo da aceleração centrípeta.



CAPÍTULO 3

MOVIMENTOS CIRCULARES ACOPLADOS

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Estabelecer a relação entre a transmissão de movimentos entre polias, catracas ou engrenagens.
- ✓ Diferenciar a transmissão de movimento de polias e/ou engrenagens de mesmo eixo ou não.
- ✓ Usar o *software* de simulação Física *Algodoo* como extensão do aprendizado do capítulo.

Capítulo 3 Movimentos Circulares Acoplados

Em diversas situações, nos deparamos com mecanismos que funcionam em conjunto como partes integrantes de um todo. No contexto dos motores de automóveis, por exemplo, polias e outros componentes rotativos são conectados entre si através de correias, cintas ou mesmo contato direto, utilizando o eixo do motor para criar algum efeito prático. Polias ou engrenagens montadas em eixos distintos transmitem movimento rotativo umas às outras por meio de correias.

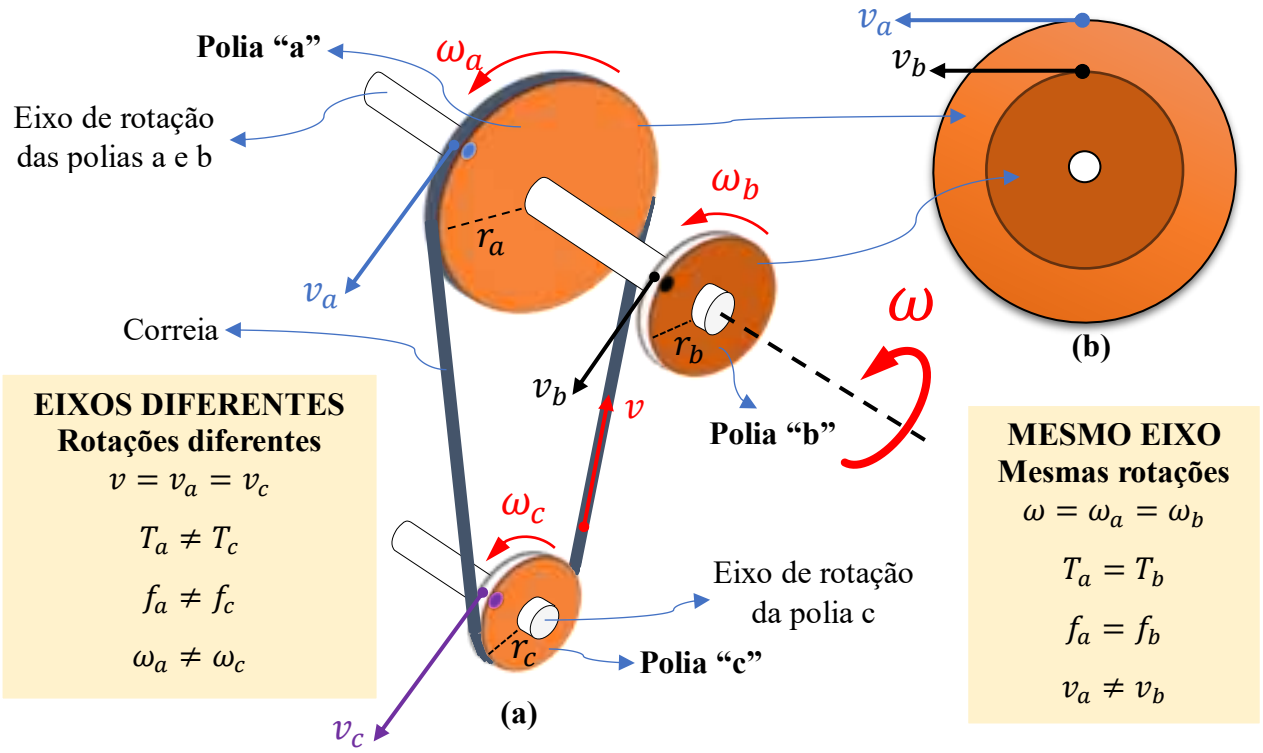


Figura 3.01: Transmissão de rotação entre polias. Em (a) está o sistema completo. Em (b), uma representação das duas polias do mesmo eixo de rotação. Não há escorregamento entre as partes do sistema.

Na **Figura 3.01**, temos um sistema de transmissão de movimentos de rotação entre polias que pertencem ou não ao mesmo eixo, sem escorregamento entre as partes.

As polias "a" e "c" pertencem ao **mesmo eixo**, chamado de **eixo solidário**, e, nesse contexto, elas realizam o **mesmo número de voltas** no mesmo **intervalo de tempo**. Isso significa que suas velocidades angulares são iguais, divergindo em suas velocidades lineares escalares:

$$\omega = \omega_a = \omega_b$$

Como $v = \omega r$, podemos escrever $\omega = \frac{v}{r}$ para pontos nas extremidades de cada uma das polias que pertencem ao mesmo eixo de rotação:

$$\omega_a = \frac{v_a}{r_a} \quad \text{e} \quad \omega_b = \frac{v_b}{r_b}$$

No mesmo eixo, as velocidades angulares das polias são iguais:

$$\omega_a = \omega_a$$

$$\frac{v_a}{r_a} = \frac{v_b}{r_b} \quad \textit{(mesmo eixo)} \qquad (3.01)$$

v_a – velocidade escalar linear em pontos da extremidade da polia a;

v_b – velocidade escalar linear em pontos da extremidade da polia b;

r_a – raio da polia a;

r_b – raio da polia b.

Como as polias de um mesmo eixo de rotação dão o mesmo número de voltas no mesmo intervalo de tempo, conclui-se que:

$$T_a = T_b \quad \rightarrow \quad f_a = f_b \quad \textit{(mesmo eixo)}$$

Para **eixos diferentes** , os pontos nas extremidades das polias, as quais estão em contato com a correia, como é o caso das polias "a" e "c" da **Figura 3.01**, possuem a mesma velocidade escalar linear:

$$v = v_a = v_c$$

Sendo $v = \omega r$, temos que:

$$v_a = \omega_a r_a \quad \text{e} \quad v_c = \omega_c r_c$$

Para os eixos distintos, mas acoplados pela mesma correia, v_a e v_c são iguais:

$$v_a = v_c$$

$$\omega_a r_a = \omega_c r_c \quad \textit{(eixos diferentes)} \qquad (3.02)$$

Com $\omega = 2\pi f$, temos:

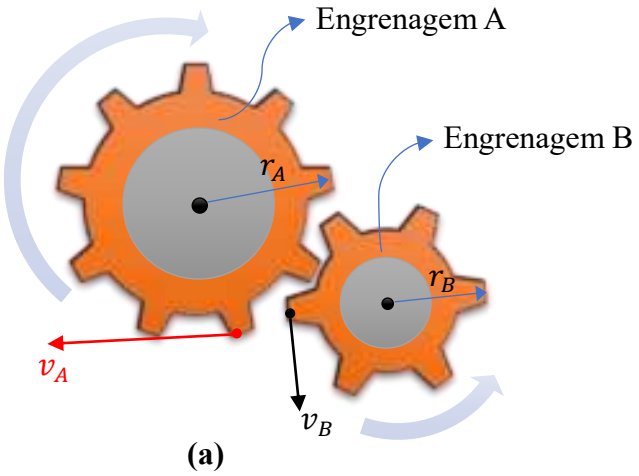
$$2\pi f_a r_a = 2\pi f_c r_c$$

$$f_a r_a = f_c r_c$$

$$\frac{f_a}{f_c} = \frac{r_c}{r_a} \quad \textit{(eixos diferentes)} \qquad (3.03)$$

Para **engrenagens em contato**, mas com **eixos distintos**, como mostra a **Figura 3.02(a)** a seguir, a transmissão do movimento de rotação possui as mesmas características das polias em eixos diferentes, pois, de fato, elas não pertencem ao mesmo eixo.

Já para engrenagens pertencentes ao **mesmo eixo de rotação**, como na **Figura 3.02(b)**, por estarem ligadas ao mesmo eixo, as características da transmissão do movimento de rotação são as mesmas para as polias em eixos solidários.



(a)

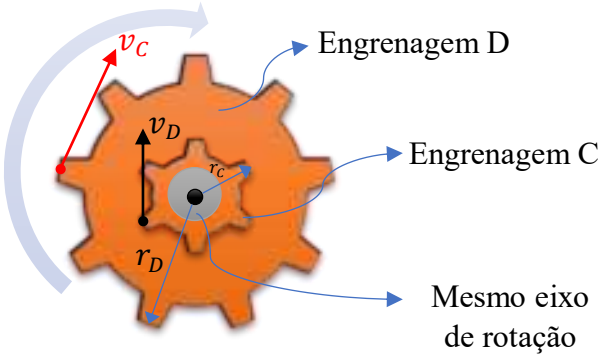
EIXOS DIFERENTES
Rotações diferentes

$v_A = v_B$

$T_A \neq T_B$

$f_A \neq f_B$

$\omega_A \neq \omega_B$



(b)

MESMO EIXO
Mesmas rotações

$\omega_C = \omega_D$

$T_C = T_D$

$f_C = f_D$

$v_C \neq v_D$

Figura 3.02: Transmissão de rotação entre engrenagens. Em (a), temos engrenagens em contato e com eixos de rotações diferentes. Em (b), uma representação de duas engrenagens acopladas ao mesmo eixo de rotação. Não há deslizamento entre as polias e os seus eixos.

Para a **Equação 3.02** e a **Equação 3.03**, temos que:

- ω_a – velocidade angular da polia a;
- ω_c – velocidade angular da polia c;
- r_a – raio da polia a;
- r_c – raio da polia c;
- f_a – frequência de rotação da polia a;
- f_c – frequência de rotação da polia c.

USANDO O *ALGODOO* 3.0

A **Figura 3.03** a seguir ilustra um sistema de engrenagens no *software Algodoo*, onde podemos verificar, de maneira intuitiva, as relações de proporcionalidade entre os raios das engrenagens com suas frequências de giro, tanto para engrenagens de mesmo eixo de rotação quanto para eixos distintos.

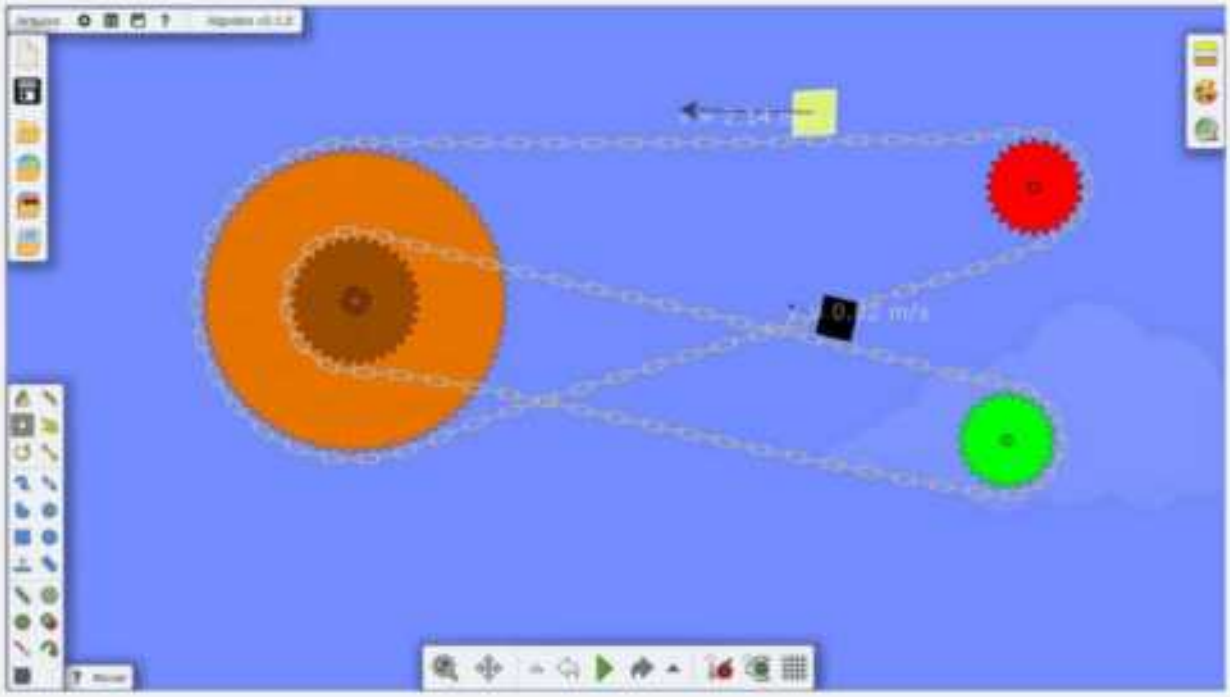


Figura 3.03: Captura de tela do *software Algodoo*: sistema de engrenagens com e sem mesmo eixo de rotação.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264109* .

Faça o *download* do aplicativo Algodoo gratuitamente em *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

A **Figura 3.04,** a seguir**,** reforça o fato de que a velocidade angular é inversamente proporcional ao raio da polia ou engrenagem que pertencem a eixos distintos. **Na Figura 3.03**, temos também uma ilustração de que a velocidade linear escalar é diretamente proporcional ao raio para pontos do mesmo eixo de rotação, ou seja, engrenagens maiores possuem, nas suas extremidades, velocidades lineares escalares maiores do que as velocidades nas extremidades das engrenagens menores pertencentes ao mesmo eixo de rotação.

Tanto na **Figura 3.03** quanto na **Figura 3.04** há pequenas oscilações nos valores das velocidades enquanto a simulação está ocorrendo devido aos encaixes das engrenagens e correntes necessitarem de ajustes extremamente precisos para evitar deslizamentos ou corrosões.

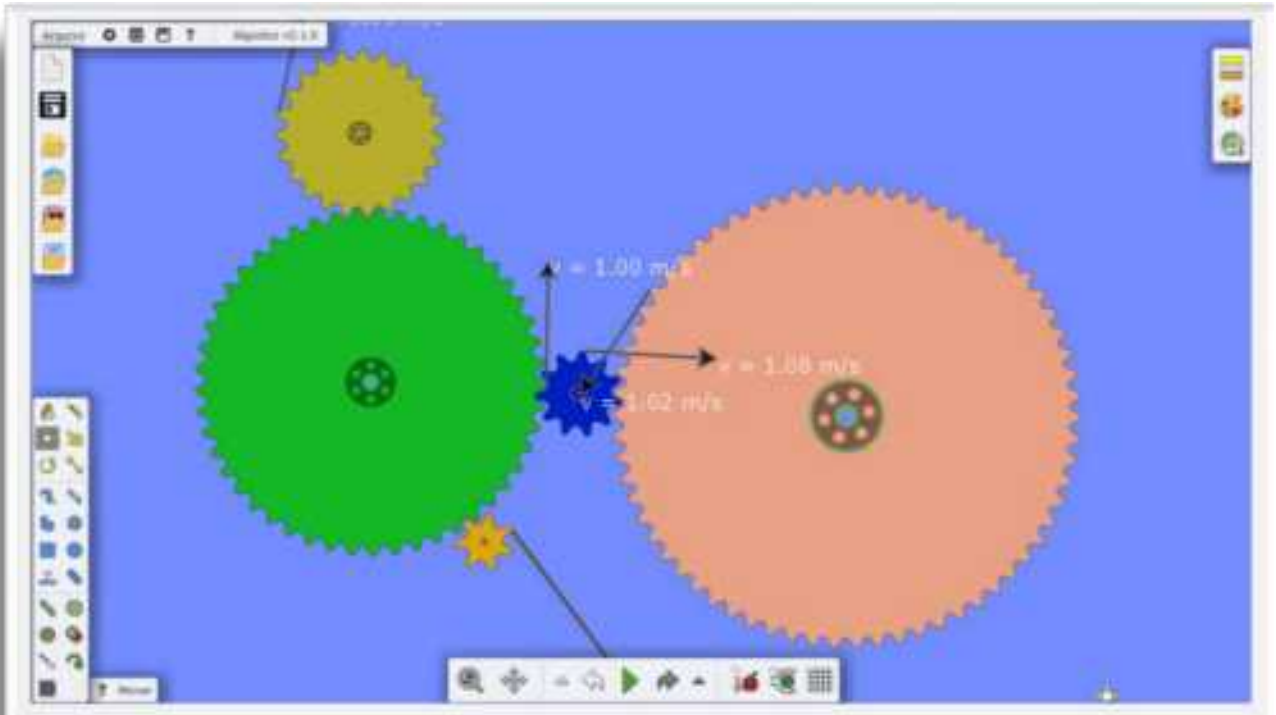


Figura 3.04: Captura de tela do *software Algodoo*: sistema de engrenagens com contato e com diferentes eixos de rotações.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264032*.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

Clique no *link https://youtu.be/AnWE6YXxmk8* ou escaneie o *QR code* ao lado para assistir ao vídeo do tutorial da animação.

TAREFA PROPOSTA 3.0

Dadas as **Tabela 3.01** e **Tabela 3.02** a seguir:

Engrenagem	$f_A\ (Hz)$	$r_A\ (cm)$	$\omega_A = 2\pi r_A\ \ (rad/s)$
A	0,5	40	

Tabela 3.01: Dados para cálculo da velocidade angular da engrenagem A.

Engrenagem	$r_B\ (cm)$	$\omega_A r_A = \omega_B r_B$
B	34,3	

Tabela 3.02: Dados para cálculo da velocidade angular da engrenagem B.

Considere que as engrenagens A e B das tabelas acima estão em contato e com eixos de rotações diferentes.

Na **Tabela 3.01**, considere $\pi = 3{,}14$ e use a equação da última coluna para calcular a velocidade angular da engrenagem A, de acordo com os dados fornecidos nas colunas. **Na Tabela 3.02**, utilize a equação contida na última coluna para encontrar a velocidade angular da engrenagem B, usando os dados das duas colunas.

Não esqueça de que as velocidades angulares de duas engrenagens em contato e com eixos diferentes possuem sentidos de rotações opostos e, portanto, sinais opostos.

Em seguida, clique **AQUI** para verificar a simulação com os resultados para cada engrenagem.

E aí, acertou!?

EXERCÍCIO RESOLVIDO

3.01 – Duas engrenagens A e B estão em contato, mas com eixo de rotações diferentes. A engrenagem A tem raio 0,2 *m* e frequência de rotação de 8 *Hz*. Já a engrenagem B possui 0,4 *m* de raio. Ambas estão fixas nos seus eixos respectivos.

Adote $\pi = 3$ e determine:

a) a frequência de rotação da engrenagem B;

b) a velocidade angular de A;

c) a velocidade angular de B;

d) A velocidade escalar linear das extremidades das duas engrenagens.

Solução: O exercício trata de um sistema de engrenagens em contatos com eixos distintos. Então, vamos usar as equações para esse tipo de problema.

Letra a: Para calcular a frequência da engrenagem B, vamos usar a **Equação 3.03**:

$$\frac{f_A}{f_B} = \frac{r_B}{r_A}$$

$$f_B r_B = f_A r_A$$

$$f_B = \frac{8\,.\,0{,}2}{0{,}4}$$

$$f_B = \frac{1{,}6}{0{,}4}$$

$$\boxed{f_B = 4\ Hz}$$

Letra b: Para a velocidade angular da engrenagem A, usaremos a **Equação 2.06**:

$$\omega_A = 2\pi f_A$$

$$\omega_A = 2\,.\,3\,.\,8$$

$$\boxed{\omega_A = 48\ rad/s}$$

Letra c: A velocidade angular da engrenagem B também pode ser encontrada usando a **Equação 2.06**:

$$\omega_B = 2\pi f_B$$

$$\omega_B = 2\,.\,3\,.\,4$$

$$\boxed{\omega_B = 24\ rad/s}$$

Letra d: Como as engrenagens não possuem o mesmo eixo de rotação, suas extremidades, que estão em contato, possuem a mesma velocidade escalar linear. Assim, vamos usar a **Equação 2.04:**

$$v_A = \omega_A r_A \qquad\qquad v_B = \omega_B r_B$$

$$v_A = 48\,.\,0{,}2 \qquad\qquad v_B = 24\,.\,0{,}4$$

$$\boxed{v_A = 9{,}6\ m/s} \qquad\qquad \boxed{v_B = 9{,}6\ m/s}$$

Portanto, provamos que as velocidades escalares lineares são as mesmas ($v_A = v_B = 9{,}6\ m/s$) para engrenagens em contato, mas com eixos fixos de rotações distintos.

É importante observar que todos as medidas usadas estão no Sistema Internacional – SI.

EXERCÍCIO PROPOSTO

3.01 – Duas engrenagens A e B pertencem ao mesmo eixo fixo de rotação. A engrenagem A tem raio 0,6 *m* e frequência de rotação de 3 *Hz*. Já a engrenagem B possui 0,15 *m* de raio e 18 *rad/s* de velocidade angular.

Adote π = 3 e determine:

a) a frequência de rotação da engrenagem B;

b) a velocidade angular de A;

c) As velocidades escalares lineares das extremidades das duas engrenagens.

REVISÃO

Movimentos Circulares Acoplados

Polias ou **engrenagens**, em sistemas mecânicos, podem transmitir movimentos uma para outra com a finalidade de ganhar uma certa vantagem mecânica, compartilhando ou não o mesmo eixo de rotação. As grandezas lineares e angulares para esse tipo de sistema se relacionam da seguinte forma:

MESMO EIXO **Mesmas rotações**	**EIXOS DIFERENTES** **Rotações diferentes**
$\omega_A = \omega_B$	$v_A = v_B$
$T_A = T_B$	$T_A \neq T_B$
$f_A = f_B$	$f_A \neq f_B$
$v_A \neq v_B$	$\omega_A \neq \omega_B$

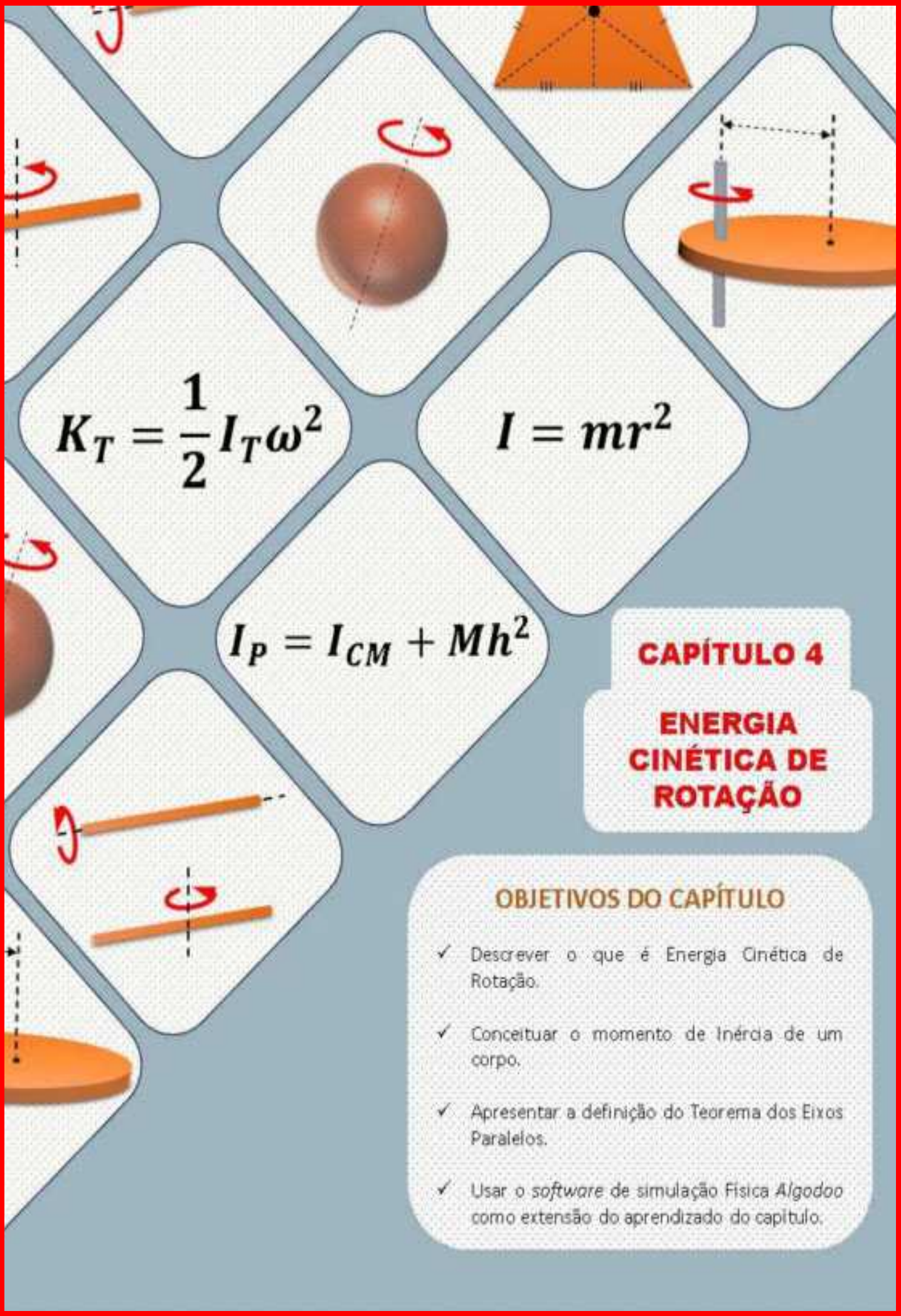
E essas grandezas, considerando duas polias (ou engrenagens) "a" e "b", que pertencem ao mesmo eixo de rotação, e uma terceira polia "c" com eixo de rotação diferente, se relacionam da seguinte forma:

$$\frac{v_a}{r_a} = \frac{v_b}{r_b} \quad \textit{(mesmo eixo)} \qquad \textit{(3.01)}$$

$$\omega_a r_a = \omega_c r_c \quad \textit{(eixos diferentes)} \qquad \textit{(3.02)}$$

$$\frac{f_a}{f_c} = \frac{r_c}{r_a} \quad \textit{(eixos diferentes)} \qquad \textit{(3.03)}$$

- v_a – módulo da velocidade linear escalar da extremidade da polia ou engrenagem "a";
- v_b – módulo da velocidade linear escalar da extremidade da polia ou engrenagem "b";
- r_a – raio da polia ou engrenagem "a";
- r_b – raio da polia ou engrenagem "b";
- r_c – raio da polia ou engrenagem "c";
- ω_a – velocidade angular da polia ou engrenagem "a";
- ω_c – velocidade angular da polia ou engrenagem "c";
- f_a – frequência da polia ou engrenagem "a";
- f_c – frequência da polia ou engrenagem "c".



CAPÍTULO 4

ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Descrever o que é Energia Cinética de Rotação.
- ✓ Conceituar o momento de Inércia de um corpo.
- ✓ Apresentar a definição do Teorema dos Eixos Paralelos.
- ✓ Usar o *software* de simulação Física *Algodoo* como extensão do aprendizado do capítulo.

Capítulo 4 Energia Cinética de Rotação

A **energia cinética de rotação**, na Física, é um conceito fundamental, que descreve objetos em rotação, sendo uma extensão da energia cinética linear que lida com movimentos de translação.

Esse tipo de energia depende da forma e de como a massa de um corpo é distribuída em um movimento circular. Se considerarmos um corpo com densidade distribuída uniformemente em toda a sua extensão, a sua energia cinética de rotação será influenciada, principalmente, pela distância do ponto em que desejamos calcular essa energia em relação ao eixo de giro. Quanto mais afastado desse eixo, maior será a energia rotacional.

Para calcular esse tipo de energia, não podemos usar, de maneira direta, e equação para cálculo da energia cinética linear para o corpo como um topo, pois cada partícula que o compõe possui uma energia cinética linear correspondente. Então, podemos usar essa equação individualmente para cada partícula e fazer a soma de todas elas para encontrar a energia cinética total do objeto em rotação.

Para apenas uma partícula, temos uma massa pontual m associada e com energia cinética:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Como a velocidade linear da partícula é variável e depende da sua distância para o eixo de rotação, é mais conveniente escrever a energia cinética em termos da velocidade angular por ser constante.

Sendo $v = \omega r$,

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

Acima, o termo $\boldsymbol{mr^2}$ é o **momento de inércia** (I) de uma partícula que compõe o corpo rígido, onde m é a sua massa, ω é sua velocidade angular e r (raio) é a distância perpendicular da partícula ao eixo de rotação. Logo:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \textit{(joule - J)} \qquad \textit{(4.01)}$$

- K – energia cinética de rotação da partícula;

- I – momento de inércia da partícula;
- ω – velocidade angular da partícula.

Generalizando, para calcular a energia cinética de rotação de todo o corpo rígido; precisamos calcular o seu o momento de inércia em relação ao eixo de rotação, já que a velocidade angular de cada partícula que o compõe é constante em qualquer outro ponto.

Assim, podemos escrever:

$$K_T = \frac{1}{2} I_T \omega^2 \quad \textit{(joule - J)} \qquad (4.02)$$

- K_T – energia cinética de rotação do corpo rígido;
- I_T – momento de inércia do corpo rígido;
- ω – velocidade angular.

A **Equação 4.02** serve para calcular a energia cinética de um corpo rígido com um número de partículas relativamente pequeno, onde o momento de inercia total do corpo rígido é o resultado da soma de todos os momentos de inércia das partículas que o compõe:

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n = m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + \ldots + m_n r_n$$

A **Figura 4.01** a seguir mostra um mesmo objeto sendo girado de formas distintas. O momento de inércia de um corpo depende da distribuição da massa contida nele em relação ao eixo de rotação. Quanto maior próximo os átomos que compõe o corpo rígido estão do eixo de rotação, maior a facilidade de fazê-lo girar.

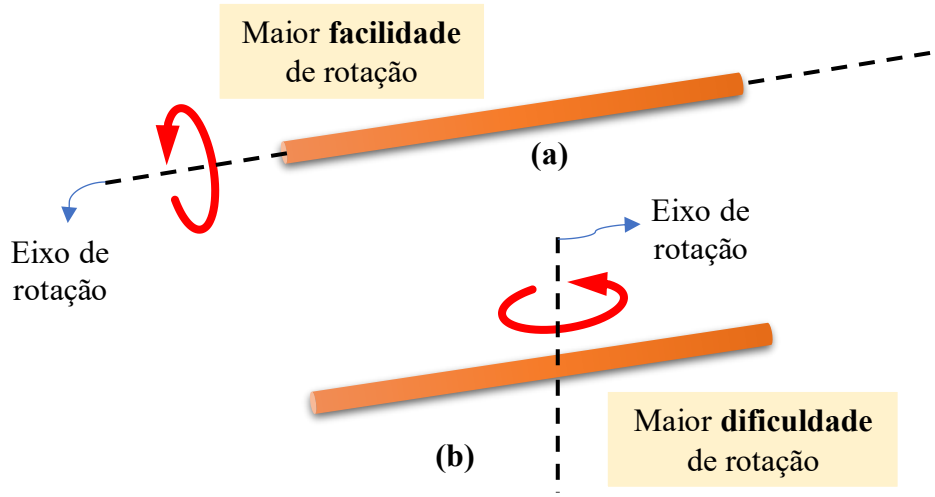


Figura 4.01: Momentos de inércia diferentes para corpos idênticos. Mudou o eixo de rotação, mudou o momento de inércia. Em (a), o eixo de rotação da barra está mais próximo da distribuição de sua massa (menor momento de inércia). Em (b), mais distante (maior momento de inércia).

4.1 - Momento de Inércia - Distribuição Contínua de Massa

Quando um corpo rígido é **contínuo**, como um disco, e possui um grande número de partículas localizadas em proximidade, a aplicação da **Equação 4.02** se torna inviável. A **Tabela 4.01** mostra o momento de inércia de alguns corpos obtidos por meio de cálculos avançados.

Corpo	Momento de Inércia *(kg . m^2)*
Esfera maciça em relação a um diâmetro	$I = \frac{2}{5}Mr^2$
Disco em relação ao seu eixo central	$I = \frac{1}{2}Mr^2$
Anel fino em relação ao eixo central	$I = Mr^2$

Tabela 4.01: Momento de inércia de alguns corpos rígidos com densidade uniforme. *M* representa a massa do objeto e *r*, o raio.

4.1.1 - Centro de Massa

O ponto de um corpo, ou um sistema de corpos, onde se pode considerar que toda a concentração de massa se concentra sobre ele é chamado de **centro de massa *CM***, comumente chamado de centro de gravidade.

Em objetos com densidade uniforme (homogêneos), como uma esfera, por exemplo, esse ponto está no seu centro geométrico, equidistante de todas as suas partes ou superfícies.

O centro geométrico de objetos não homogêneos pode não ser o mesmo do seu *CM* devido às suas características irregulares., dificultando a sua análise para cálculos envolvendo essa distribuição de massa.

O *CM* é um ponto importante para a análise da dinâmica rotacional. A torção de um corpo rígido é (veremos adiante) descrita, principalmente, em relação ao centro de massa.

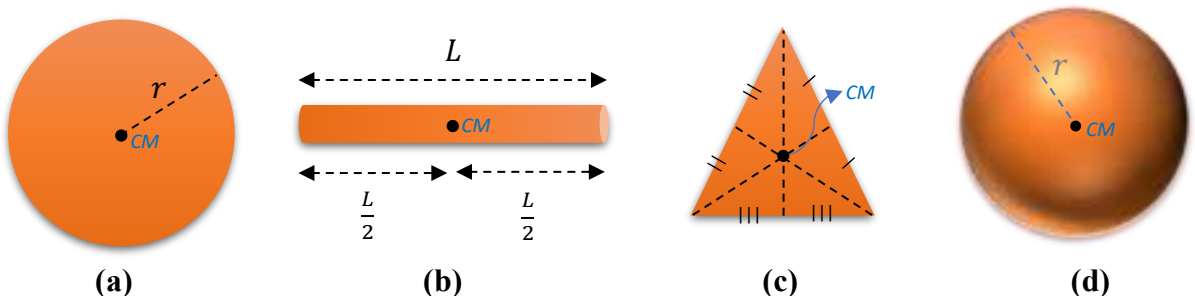


Figura 4.02: Representação de corpos rígidos homogêneos (densidades constantes). Em (a), um disco com centro de massa no centro. Em (b), uma barra com centro de massa no ponto que a divide ao meio. Em (c), uma placa triangular com centro de massa no ponto de encontro das suas três medianas. Em (d), uma esfera maciça com centro de massa em seu centro.

A **Figura 4.02** mostra o centro de massa de alguns corpos rígidos com distribuição de massa constante.

Iremos dar a uma atenção maior em estudar o momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de massa. Quando precisaremos calcular o momento de inércia em outro eixo, vamos calculá-lo em função do momento de inércia que passa pelo *CM*. No segundo caso, utilizamos o teorema dos eixos paralelos.

4.1.2 - Teorema dos Eixos Paralelos

O **teorema dos eixos paralelos** é um modelo matemático que serve para calcular o momento de inércia de um corpo em relação a um ponto localizado em um eixo não passa pelo seu centro de massa, desde que conheçamos o momento de inércia em relação a outro ponto localizado no eixo que passa pelo seu *CM*.

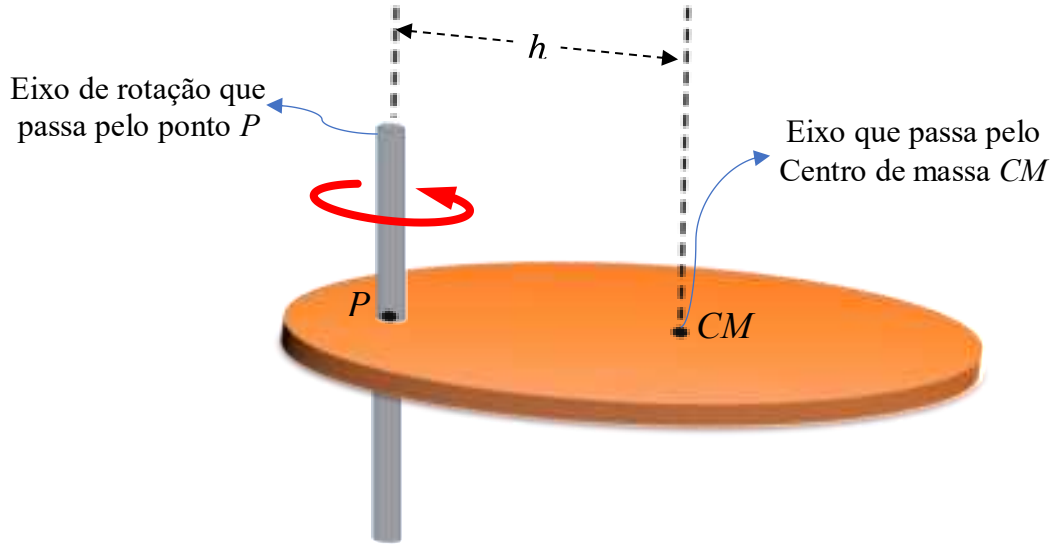


Figura 4.03: Momento de inércia de um *P* de um corpo rígido em um eixo a uma distância *h* a outro eixo paralelo a ele que passa pelo centro de massa desse corpo.

A **Figura 4.03** mostra o eixo de rotação de um corpo que é paralelo ao eixo que passa pelo seu centro de massa, sendo *h* a distância perpendicular entre os eixos.

Nesse caso, o momento de inércia no ponto *P* em função do momento de inércia do centro de massa, o qual precisaríamos demonstrar por meio de cálculos avançados, é:

$$I_P = I_{CM} + Mh^2 \ (kg \cdot m^2) \qquad (4.03)$$

- I_P – momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa pelo ponto *P*;
- I_{CM} – momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa;

- M – massa total do corpo rígido;
- h – distância perpendicular entre os dois eixos (do ponto P e do CM).

IMPORTANTE

É preciso saber qual o valor do momento de inércia de um corpo em relação ao eixo que passa pelo seu **centro de massa** para o uso do **teorema dos eixos paralelos**, objetivando o cálculo do momento de inércia de um corpo rígido em relação a um eixo que passa por um ponto arbitrário desse corpo. Ademais, como o próprio nome do teorema sugere, os dois eixos (o do centro de massa e o que se deseja calcular o momento de inércia) precisam ser **paralelos** entre si e a distância de um em relação ao outro ser perpendicular.

USANDO O *ALGODOO* 4.0

A **Figura 4.04** a seguir ilustra quatro corpos idênticos com momentos de inércia diferentes para seus respectivos eixos de rotação, mostrando que quanto mais próximo esse eixo ficar do seu centro de massa, maior será a facilidade em girar o corpo.

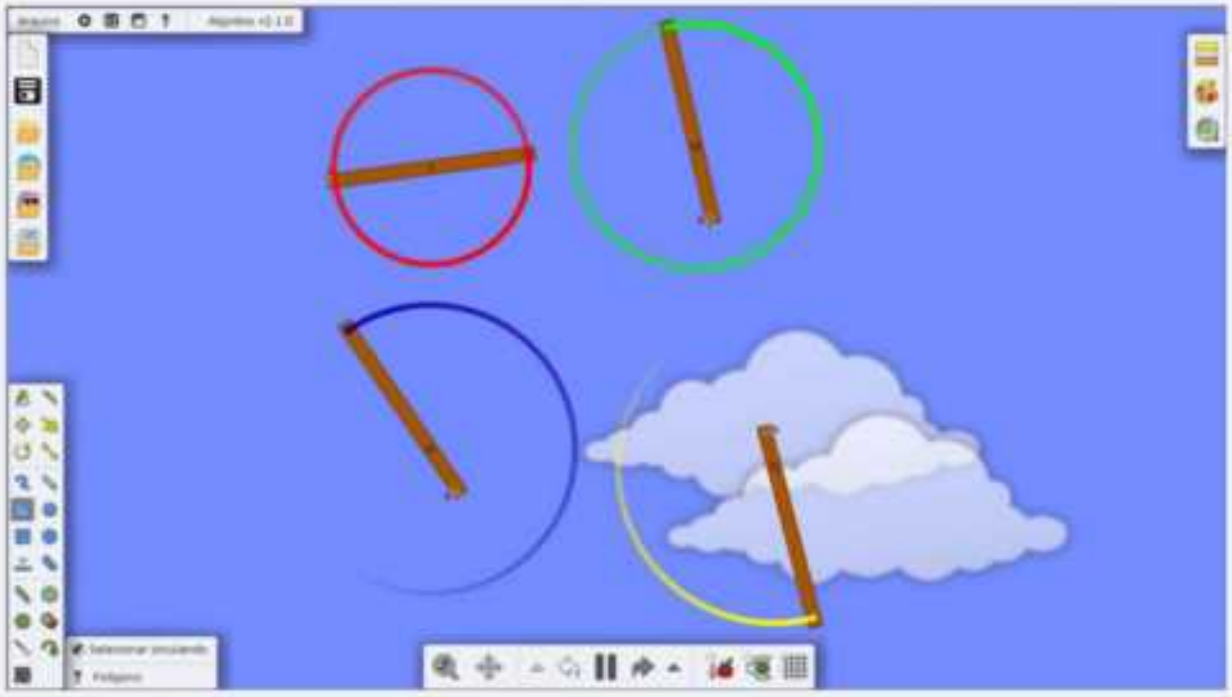


Figura 4.04: Captura de tela do *software Algodoo*: momento de inércia distintos para corpos idênticos.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264173.*

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

Na **Figura 4.05,** está descrito o gráfico **energia angular x velocidade angular** referente

a uma simulação semelhante à representada na **Figura 4.04**. Nela, está ilustrada uma parábola que descreve a energia de rotação do corpo variando com o quadrado da velocidade angular, pois foi aplicada uma força constante para fazer a barra girar e, assim, configurando um movimento circular uniformemente acelerado.

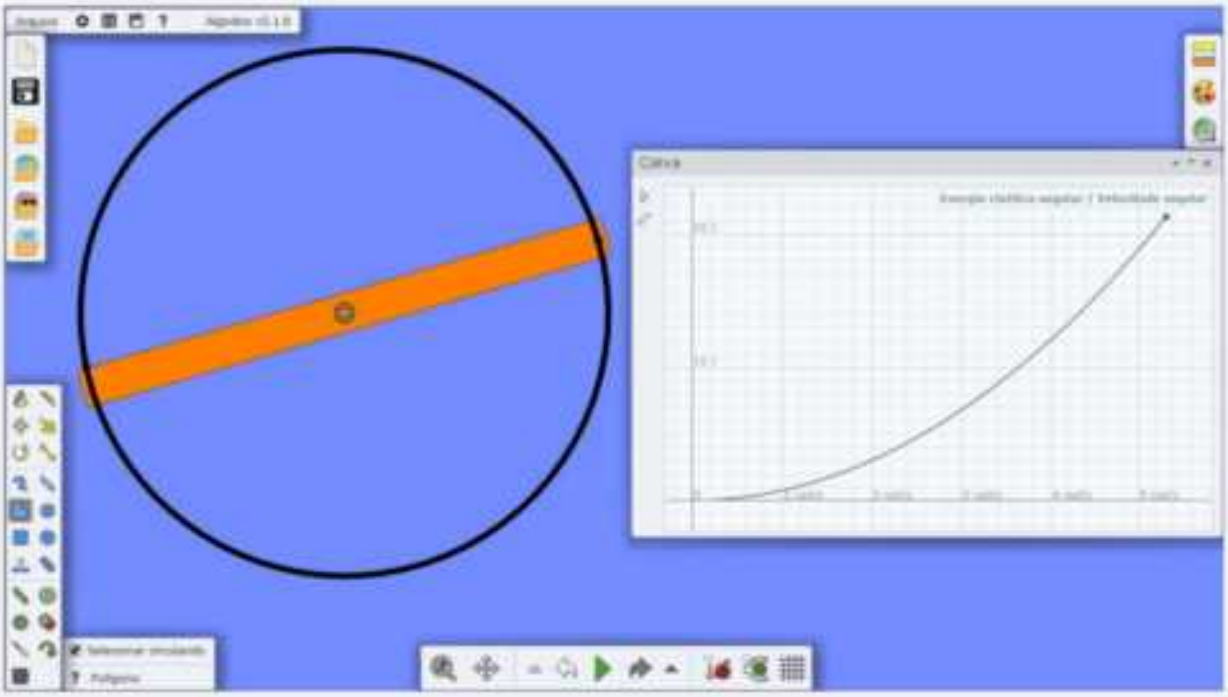


Figura 4.05: Captura de tela do *software Algodoo*: gráfico *energia angular x velocidade angular* para um corpo com densidade constante.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobx/details.php?id=264175.*

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

Clique no *link https://youtu.be/dqFJggYWbOY* ou escaneie o *QR code* ao lado para assistir ao vídeo do tutorial da animação.

TAREFA PROPOSTA 4.0

Dada a **Tabela 4.02:**

Disco	f (Hz)	m (kg)	r (m)	$\omega = 2\pi f$ (rad/s)	$I = \frac{mr^2}{2}$ (kgm^2)	$K = \frac{I\omega^2}{2}$ (J)
A	1	16	4			
B	2	8	3			
C	3	4	2			
D	4	2	1			

Tabela 4.02: Tabela para cálculo da velocidade angular, momento de inércia e energia angular cinética dos discos homogêneos da Tarefa Proposta 4.0.

Na **Tabela 4.02**, constam os dados de quatro discos rígidos homogêneos. Considere $\pi = 3{,}14$ e utilize esses dados nas equações da tabela para calcular as velocidades angulares, os momentos de inércia e as energias cinéticas de rotação, também chamada de energia angular cinética.

Depois dos cálculos, clique **AQUI** para conferir na simulação os resultados.

Veja abaixo na **Figura 4.06** como verificar a massa, a velocidade angular, o momento de inércia e a energia angular cinética do objeto, além de outros dados:

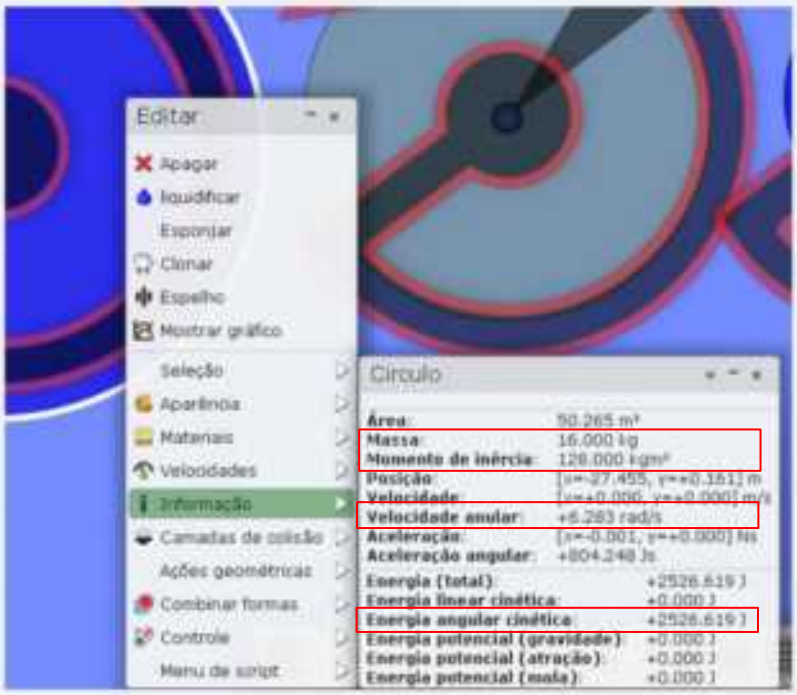


Figura 4.06: Captura de tela do *software Algodoo*: verificação das informações dos resultados da simulação.
Fonte: os autores.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar as animações.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

No *Algodoo*, clique com o botão direito do mouse sobre o objeto e vá até a aba **"*informações*"** para conseguir consultar os dados.

É importante mencionar que os objetos da simulação no *software* foram construídos de acordo com os dados da tabela para, além de buscar uma maior interatividade, comprovar a precisão do aplicativo.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

4.01 – Qual é a energia cinética de rotação de uma partícula, de um corpo rígido, com um momento de inércia de 0,1 $kg \cdot m^2$ em relação ao seu eixo de rotação e uma velocidade angular de 5 rad/s?

Solução: Para calcular a energia cinética de rotação de uma partícula do corpo rígido, podemos usar a **Equação 4.01**:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

Substituindo os valores dados na questão:

$$K = \frac{1}{2} 0{,}1 \,.\, 5^2$$

$$K = 0{,}05 \,.\, 25$$

$$\boxed{K = 1{,}25 \text{ J}}$$

Portanto, a energia cinética de rotação da partícula é de 1,25 *joules*.

4.02 – O momento de inercia de um corpo rígido, de massa 2 *kg*, em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa, é de 0,02 $kg.m^2$. Qual o momento de inercia em relação a um ponto *P* desse corpo por onde passa outro eixo de rotação, distante 0,1 metros perpendicularmente do eixo que passa pelo centro de massa?

Solução: Vamos usar o teorema dos eixos paralelos para resolver esse problema, pois se trata de dois eixos em um corpo rígido, sendo um deles passando pelo seu centro de massa. Para isso, vamos usar a **Equação 4.03:**

$$I_P = I_{CM} + Mh^2$$

Substituindo os valores dados na questão:

$$I_P = 0{,}02 + 2 \,.\, 0{,}1^2$$

$$I_P = 0{,}02 + 2 \,.\, 0{,}01$$

$$I_P = 0{,}02 + 0{,}02$$

$$\boxed{I_P = 0{,}04 \text{ kg.m}^2}$$

Portanto, o momento de inércia do corpo rígido em relação ao ponto *P* por onde passa o novo eixo é 0,04 $kg \,.\, m^2$.

4.03 – Um ponto material com uma massa de 0,5 *kg* está em rotação ao redor de um eixo perpendicular a ele. A distância entre o eixo e o ponto material é de 0,2 metros. Determine o momento de inércia desse ponto material em relação ao eixo de rotação.

Solução: Para calcular o momento de inércia de uma partícula em relação ao seu eixo de rotação, usaremos $I = mr^2$:

$$I = mr^2$$

Substituindo os dados fornecidos no comando da questão:

$$I = 0{,}5 \,.\, 0{,}2^2$$

$$I = 0{,}5 \,.\, 0{,}04$$

$$\boxed{I = 0{,}02 \text{ kg.m}^2}$$

Portanto, o momento de inércia do ponto material em relação ao eixo de rotação é de 0,02 *kg.m²*.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

4.01 – Qual é a energia cinética de rotação de uma partícula contida em um corpo rígido com um momento de inércia de 0,15 *kg . m²* em relação ao seu eixo de rotação, quando ela gira com uma velocidade angular de 7 *rad/s*?

4.02 – O momento de inércia de um corpo rígido, com uma massa de 3 *kg*, em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa, é de 0,015 *kg·m²*. Qual é o momento de inércia em relação a um ponto Q desse corpo, por onde passa outro eixo de rotação, que está a uma distância de 0,2 metros perpendicularmente ao eixo que passa pelo seu centro de massa?

4.03 – Um ponto material de massa 1 *kg* gira em torno de um eixo perpendicular a ele. A distância entre o eixo de rotação e o ponto material é de 0,5 metros. Determine o momento de inércia deste ponto material em relação ao eixo de rotação.

Saiba mais...

Como já vimos, para se calcular a energia cinética de rotação de apenas uma partícula de um corpo rígido usamos a **Equação 4.01:**

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I\omega^2}$$

No entanto, para uma quantidade limitada de partículas, definimos que bastaria somar as energias cinéticas de rotação de todas as partículas que compõe o corpo rígido, conforme a **Equação 4.02:**

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I_T\omega^2}$$

O momento de inércia total das partículas também pode ser escrito da seguinte forma:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i$$, com $n = 1, 2, 3, 4, 5, ...$

Reescrevendo a equação da energia cinética de rotação para o corpo rígido com um número de partículas baixa e limitada:

$$K = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i\right)\omega^2$$

Para um corpo rígido com um número muito grande de partículas muito próximas umas das outras, nos deparamos com uma **distribuição contínua** de massa. Nesse caso, trocamos o somatório por uma integral:

$$I = \int r^2 dm \quad \textit{(corpo contínuo)}$$

Sendo *dm* um elemento infinitesimal de massa que compõe o corpo rígido.

É a partir da equação do momento de inércia para corpos contínuos que se chega as equações para outas formas geométricas, como anéis, discos, esferas, por exemplo.

REVISÃO

Energia Cinética de Rotação

Energia Cinética de Rotação: Uma partícula ou um corpo rígido como um todo, em movimento circular, possui **Energia Cinética de Rotação**, que pode ser calculada por meio das equações:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \quad (J) \qquad (4.01)$$

$$K_T = \frac{1}{2} I_T\omega^2 \quad (J) \qquad (4.02)$$

- K – energia cinética de rotação da partícula;
- I – momento de inércia da partícula;
- ω – velocidade angular da partícula ou do corpo rígido;
- K_T – energia cinética de rotação total do corpo rígido;
- I_T – momento de inercia total do corpo rígido.

Teorema dos eixos paralelos: O momento de inércia de uma partícula é calculado através do produto da sua massa pelo quadrado do raio da trajetória de rotação ($\boldsymbol{I = mr^2}$). Para um corpo rígido, a equação para se obter seu momento de inércia vai depender do formato do corpo, da distribuição de sua massa, além da distância do ponto onde se deseja calcular o momento de inércia para o eixo de rotação. Esse eixo pode ou não passar pelo centro de massa do corpo. O **teorema dos eixos paralelos** nos permite calcular o momento de inércia de um corpo em relação a qualquer ponto P que pertença a ele, desde que se possua o momento de inércia em relação a outro ponto que esteja em um eixo que passe pelo seu centro de massa por meio da equação:

$$I_P = I_{CM} + Mh^2 \quad (kgm^2) \qquad (4.03)$$

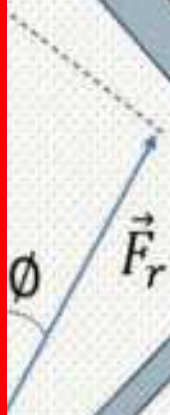
- I_P – momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa pelo ponto P;
- I_{CM} – momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa pelo centro de massa;
- M – Massa total do corpo rígido;
- h – distância perpendicular entre os dois eixos (do ponto P e do CM).

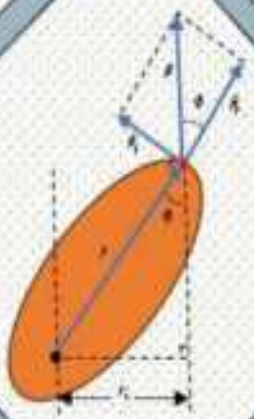
$\tau = I\alpha$

$\tau = r \cdot F_t$

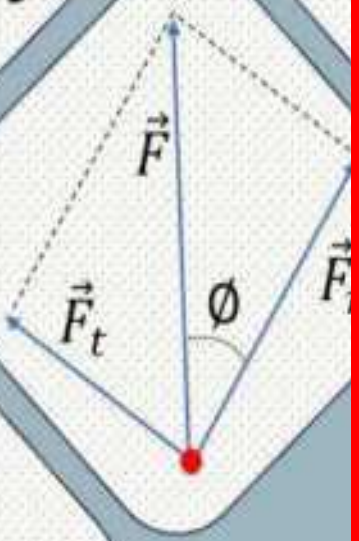
$\tau = r \cdot F sen\emptyset$

$\tau = r_\perp \cdot F$

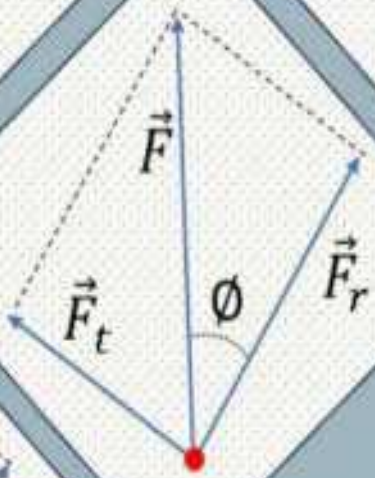














CAPÍTULO 5

TORQUE

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Definir o que é torque.
- ✓ Estudar apenas a intensidade do torque.
- ✓ Fazer a conexão entre as grandezas lineares e rotacionais para calcular o torque produzido por uma força.
- ✓ Usar o *software* de simulação Física *Algodoo* como extensão do aprendizado do capítulo.

Capítulo 5 Torque

O **torque** ($\vec{\tau}$) ou **momento de uma força** é uma grandeza vetorial (iremos tratar essa grandeza como vetor no mais adiante), definido como a tendência de rotação sofrida por um corpo que está sujeito a uma força e descreve a capacidade dessa força aplicada fazer o objeto girar ao redor de um ponto onde existe um eixo de rotação.

Para um bom desempenho no movimento de rotação, é importante considerar que a força aplicada para girar o corpo deve ter uma intensidade adequada para vencer a resistência à rotação do objeto; que quanto maior a **distância** do ponto de rotação (eixo), maior a eficácia do torque; e que o **ângulo** entre a força aplicada e o vetor posição que vai do eixo de rotação ao ponto de aplicação da força influência no torque produzido.

Assim, o módulo do torque depende da intensidade da força aplicada, da distância do ponto de rotação e do ângulo de aplicação dessa força.

A **Figura 5.01** a seguir mostra um corpo rígido que está livre para girar, ou seja, não há resistência a sua rotação e, consequentemente, não há força de resistência ao seu giro em relação a um eixo.

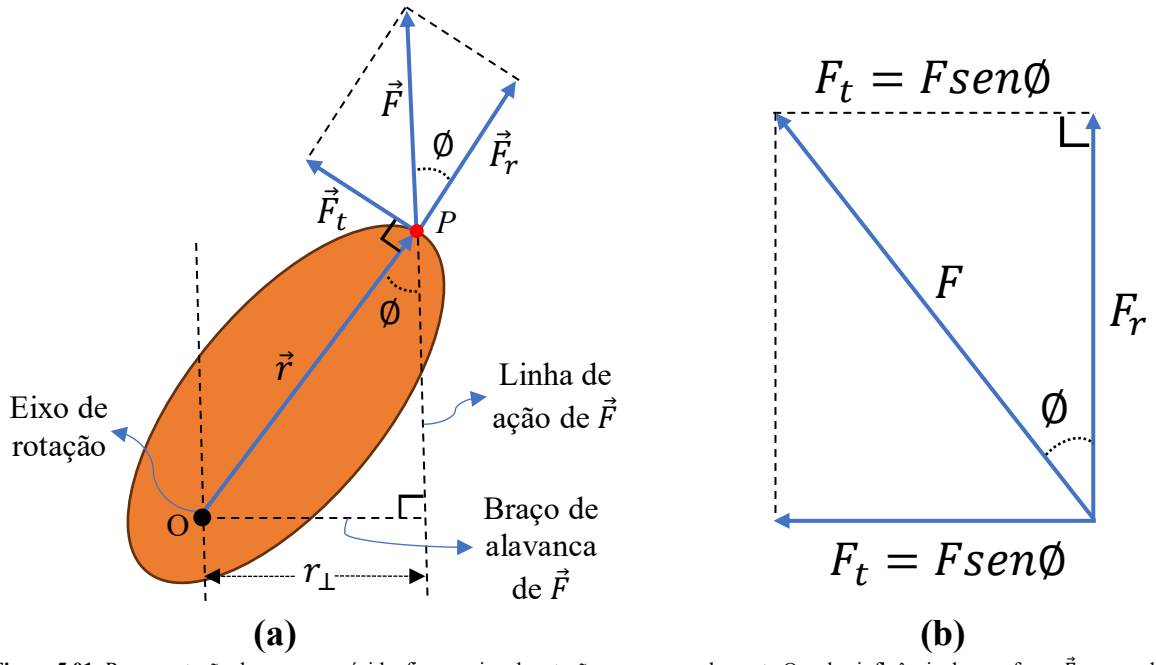


Figura 5.01: Representação de um corpo rígido, fixo no eixo de rotação que passa pelo ponto O, sob a influência de uma força $\vec{F}$ que produz um torque. Em (a), o corpo sob a influência da força que produz o torque. Em (b), o módulo das componentes perpendiculares da força $\vec{F}$.

O torque gerado pela força $\vec{F}$ induz a rotação do corpo rígido representado na **Figura 5.01(a)** em torno do eixo fixo de rotação que passa pelo ponto O, que se encontra perpendicular ao plano da superfície e se estende para fora da dela. Na realidade, apenas a **componente**

tangencial da força provoca a rotação. A componente radial $\vec{F}_r$ não produz rotação, visto que ela tem a mesma direção da reta que passa pelo ponto O.

Para calcular o módulo do torque, ou seja, a capacidade de uma força $\vec{F}$ fazer um corpo girar, precisamos levar em consideração não apenas o módulo da componente tangencial da força, mas também a distância entre o ponto de aplicação dessa força e o ponto que está sobre o eixo de rotação. Quanto maior a força aplicada e quanto maior a distância de aplicação dessa força em relação ao eixo de rotação, maior será o torque, ou seja, o módulo do torque é diretamente proporcional a esses dois fatores:

$$\tau = r \,.\, F_t \ (N \,.\, m) \qquad (5.01)$$

- τ – módulo do torque produzido pela força $\vec{F}$;
- r – distância entre o eixo de rotação e a força $\vec{F}$ aplicada;
- F_t – módulo componente tangencial da força $\vec{F}$;

Como $\vec{F}_t$, $\vec{F}_r$ e $\vec{F}$ formam um triângulo retângulo, conforme mostrado na **Figura 5.01(b)**, podemos calcular o módulo de $\vec{F}_t$ em função do módulo de $\vec{F}$ usando as relações trigonométricas de um triângulo retângulo:

$$sen\emptyset = \frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \emptyset}{hipetenusa}$$

O cateto oposto a $\emptyset$ é F_t e a hipotenusa é a diagonal do polígono formado pelo pelas retas simétricas e paralelas às componentes, ou seja, a hipotenusa é F. Assim:

$$sen\emptyset = \frac{F_t}{F} \qquad \rightarrow \qquad F_t = F sen\emptyset$$

Substituindo F_t na **Equação 5.01**:

$$\tau = r \,.\, F sen\emptyset \quad (N \,.\, m) \qquad (5.02)$$

- τ – módulo do torque produzido pela força $\vec{F}$;
- r – distância entre o eixo de rotação e a força $\vec{F}$ aplicada;
- F – módulo da força $\vec{F}$;
- $\emptyset$ – ângulo formado entre o vetor $\vec{r}$ e a força $\vec{F}$.

O ângulo $\emptyset$ formado entre os vetores $\vec{F}$ e $\vec{F}_r$ é o mesmo ângulo formado entre os vetores $\vec{F}$ e $\vec{r}$, pois, além de esses dois ângulos serem opostos pelo mesmo vértice, $\vec{F}_r$ e $\vec{r}$ estão na mesma direção radial.

Outra forma equivalente de se calcular o módulo do torque é usar o módulo da componente de $\vec{r}$ que é perpendicular às retas paralelas que passam pelo eixo de rotação e a que coincide com a direção do vetor $\vec{F}$ (linha de ação de $\vec{F}$). Essa distância é chamada de **braço de alavanca** $r_\perp$.

Sendo $r_\perp = rsen\emptyset$:

$$\tau = r\,.Fsen\emptyset = rsen\emptyset\,.F = r_\perp F$$

$$\tau = r_\perp\,.F \quad (N\,.\,m) \qquad (5.03)$$

$$\tau = rsen\emptyset\,.F \quad (N\,.\,m) \qquad (5.04)$$

- τ – módulo do torque produzido pela força $\vec{F}$;
- r – distância entre o eixo de rotação e a força $\vec{F}$ aplicada;
- F – módulo da força $\vec{F}$;
- $r_\perp$ – braço de alavanca (módulo da componente de $\vec{r}$ ortogonal à linha de ação de $\vec{F}$);
- $\emptyset$ – ângulo formado o vetor $\vec{r}$ e a força $\vec{F}$.

Usamos, até o momento, apenas uma forma para definir o módulo do torque. Mas se várias forças forem aplicadas ao corpo rígido com o objetivo de fazê-lo girar? Para esse caso, basta calcular a intensidade da força resultante e encontrar o módulo da componente tangencial dessa força.

De acordo com a segunda lei de Newton:

$$(F_t)_R = ma_t$$

em que $(F_t)_R$ é o módulo da componente tangencial da força resultante $\vec{F}_R$, e a_t, o módulo da aceleração tangencial.

Conforme a **Equação 5.01:**

$$\tau_R = r\,.(F_t)_R = r\,.ma_t$$

Acontece que $a_t = \alpha r$ (**Equação 2.09**). Então:

$$\tau_R = r \,.\, m \,.\, \alpha r = mr^2 \,.\, \alpha$$

A expressão mr^2 corresponde ao momento de inércia do corpo rígido ou de uma partícula. Assim:

$$\tau_R = I\alpha \quad (N \,.\, m) \qquad (5.05)$$

- τ_R – módulo do torque resultante produzido por $\vec{F}_R$;
- I – momento de Inércia;
- α – aceleração angular produzida pelo torque.

Para uma única força, podemos usar:

$$\tau = I\alpha \quad (N \,.\, m) \qquad (5.06)$$

O torque devido à componente tangencial de $\vec{F}$ produz uma aceleração angular do corpo rígido em volta do eixo fixo de rotação.

IMPORTANTE

Apesar de termos usado, basicamente, o módulo do torque para análise das situações deste tópico, ele é uma grandeza vetorial. Discutiremos sua natureza vetorial mais adiante.

No caso do não uso do torque como grandeza vetorial, atribuímos um valor positivo ou negativo para ele, dependendo sentido da rotação do corpo ou partícula. No sentido anti-horário, o torque é positivo. No horário, negativo.

USANDO O *ALGODOO* 5.0

A **Figura 5.02** a seguir ilustra seis discos rígidos homogêneos idênticos, ou seja, possuem o mesmo raio, a mesma massa, a mesma distribuição de massa (densidade constante) e, consequentemente, possuem centro de massa nos seus centros geométricos. Cada disco possui um eixo fixo de rotação no seu *CM* e estão submetidos à mesma força tangencial, mas aplicadas a distâncias diferentes do eixo em cada disco.

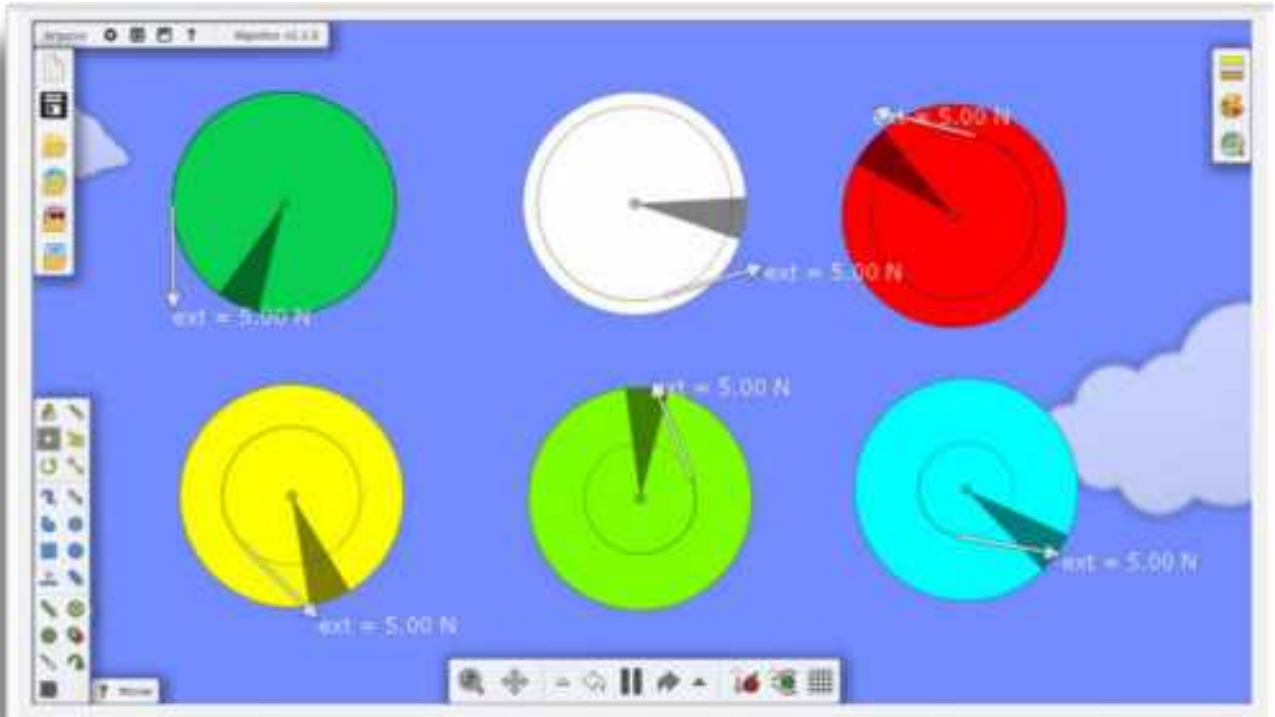


Figura 5.02: Captura de tela do *software Algodoo*: torques diferentes para forças iguais aplicadas em corpos idênticos.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264329*.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

Clique no *link https://youtu.be/WgqG2CuJgBY* ou escaneie o *QR code* ao lado para assistir ao vídeo do tutorial da animação.

Ao acessar a simulação, você pode observar que quanto mais distante uma mesma força for aplicada do eixo de rotação, maior será a tedência desse corpo girar, ou seja, maior será o torque.

TAREFA PROPOSTA 5.0

Dada a **Tabela 5.01:**

Barra	$r\ (m)$	$F_t\ (N)$	$\tau = r.F_t\ (N\ .\ m)$
A	4	30	
B	3	32	
C	2	45	
D	1	75	

Tabela 5.01: Dados para cálculo do torque de quatro barras homogêneas da Tarefa Proposta 5.0.

Na **Tabela 5.01** constam os dados de quatro barras homogêneas idênticas para se calcular

os torques exercidos sobre elas. As forças aplicadas correspondem apenas as suas componentes tangenciais. Utilize a equação da última coluna da tabela e calcule o torque exercido sobre cada barra e descubra qual delas receberá a maior indução à rotação.

Com posse dos resultas, responda: foi a barra A? Foi a B? Será a C? Ou foi a D?

Clique **AQUI** e descubra se você acertou.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5.01 – Uma força de 50 *N* é aplicada perpendicularmente à linha que liga o centro de um disco ao ponto onde foi submetida à força, o qual está localizado na extremidade do disco. Essa linha mede 20 *cm* e o disco está fixo a um eixo de rotação que passa pelo seu centro, fazendo-o girar no sentido horário. De acordo com o enunciado, calcule o torque produzido por essa força.

Solução: A linha que liga o centro do disco ao ponto em que a força foi aplicada corresponde à medida do raio. Além disso, o fato de a força ser perpendicular ao raio representa a componente tangencial da força. Com os dados da questão, podemos usar a **Equação 5.01** para calcular o torque:

Antes de iniciar os cálculos, devemos nos atentar às unidades. Observe que 20 *cm* é igual a 0,2 m.

$$\tau = r \,.\, F_t$$

$$\tau = 0{,}2 \,.\, 50$$

$$\tau = 10\ Nm$$

Como o torque faz o corpo girar no sentido horário, o seu valor é negativo:

$$\boxed{\tau = -10\ Nm}$$

Portando, o torque exercido pela força no disco é de $-10\ Nm$.

5.02 – A **Figura 5.03** a seguir mostra um corpo rígido fixo a um eixo de rotação (ponto O) e submetido a uma força $\vec{F}$ de intensidade 40 *N* no ponto *P*. O eixo de rotação é perpendicular ao plano do papel e o raio da trajetória circular a que o corpo está submetido mede 1,5 *m*, formando um ângulo de *30º* com a força aplicada. Dessa forma, calcule o torque realizado pela força $\vec{F}$.

Dado: sen30º = 0,5.

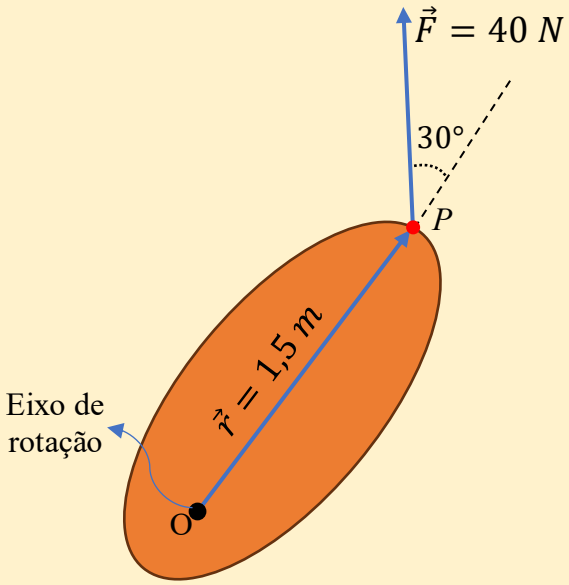


Figura 5.03: Exercício Resolvido 5.02.

Solução: O problema trata de uma força sendo aplicada em um ponto do corpo rígido que está fixo a um eixo de rotação. Com os dados da questão, podemos usar a **Equação 5.02** para calcular o torque:

$$\tau = r\ .\ Fsen\emptyset$$

$$\tau = 1{,}5\ .\ 40\ .\ 0{,}5$$

$$\boxed{\tau = 30\ N.m}$$

Se fizermos a decomposição da força $\vec{F}$ nas suas componentes ortogonais, veremos que a componente tangencial da força, responsável pelo torque, fará o corpo girar no sentido anti-horário e, portanto, o torque é positivo e igual a $30\ Nm$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5.01 – Uma força de 130 N é aplicada perpendicularmente à linha que liga o centro de um disco ao ponto onde foi submetida à força, o qual está localizado na extremidade do disco. Essa linha mede 15 cm e o disco está fixo a um eixo de rotação que passa pelo seu centro, fazendo-o girar no sentido anti-horário. De acordo com o enunciado, calcule o torque produzido por essa força.

5.02 – A **Figura 5.04** a seguir ilustra um disco rígido fixo a um eixo de rotação (ponto O) e submetido a uma força $\vec{F}$ de intensidade 12 N no ponto P. O eixo de rotação é perpendicular ao plano do papel e o raio da trajetória circular a que o corpo está submetido mede 15 cm e forma um ângulo de 45º com a força aplicada. Considere $sen45° = 0{,}7$ e calcule o torque realizado pela força $\vec{F}$.

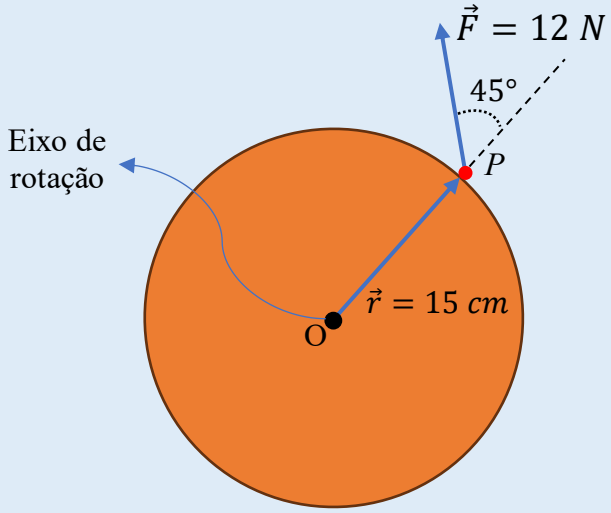


Figura 5.04: Exercício Proposto 5.02.

Saiba mais...

O módulo do torque se dá pelo produto da intensidade da força aplicada sobre um ponto do corpo rígido com o módulo do vetor posição que vai do eixo de rotação a esse ponto, além do seno do ângulo formado entre esses dois vetores. Essa equação já foi dada anteriormente, conforme a **Equação 5.02**.

O torque também é um vetor e seu sentido se dá pela regra da mão direita, a qual veremos mais adiante.

REVISÃO

Torque

Torque: A capacidade de uma força $\vec{F}$ de fazer um corpo girar é chamado de **torque**, que, por sua vez, depende da intensidade dessa força, da distância entre ela e o eixo de rotação, além do ângulo formado entre a força e o vetor posição $\vec{r}$ que vai do eixo de rotação ao ponto onde está sendo aplicada a força. Para calcular o módulo do torque, podemos usar as seguintes equações:

$$\tau = r.F_{\perp} \quad (N.m) \qquad (5.01)$$

$$\tau = r.Fsin\emptyset \quad (N.m) \qquad (5.02)$$

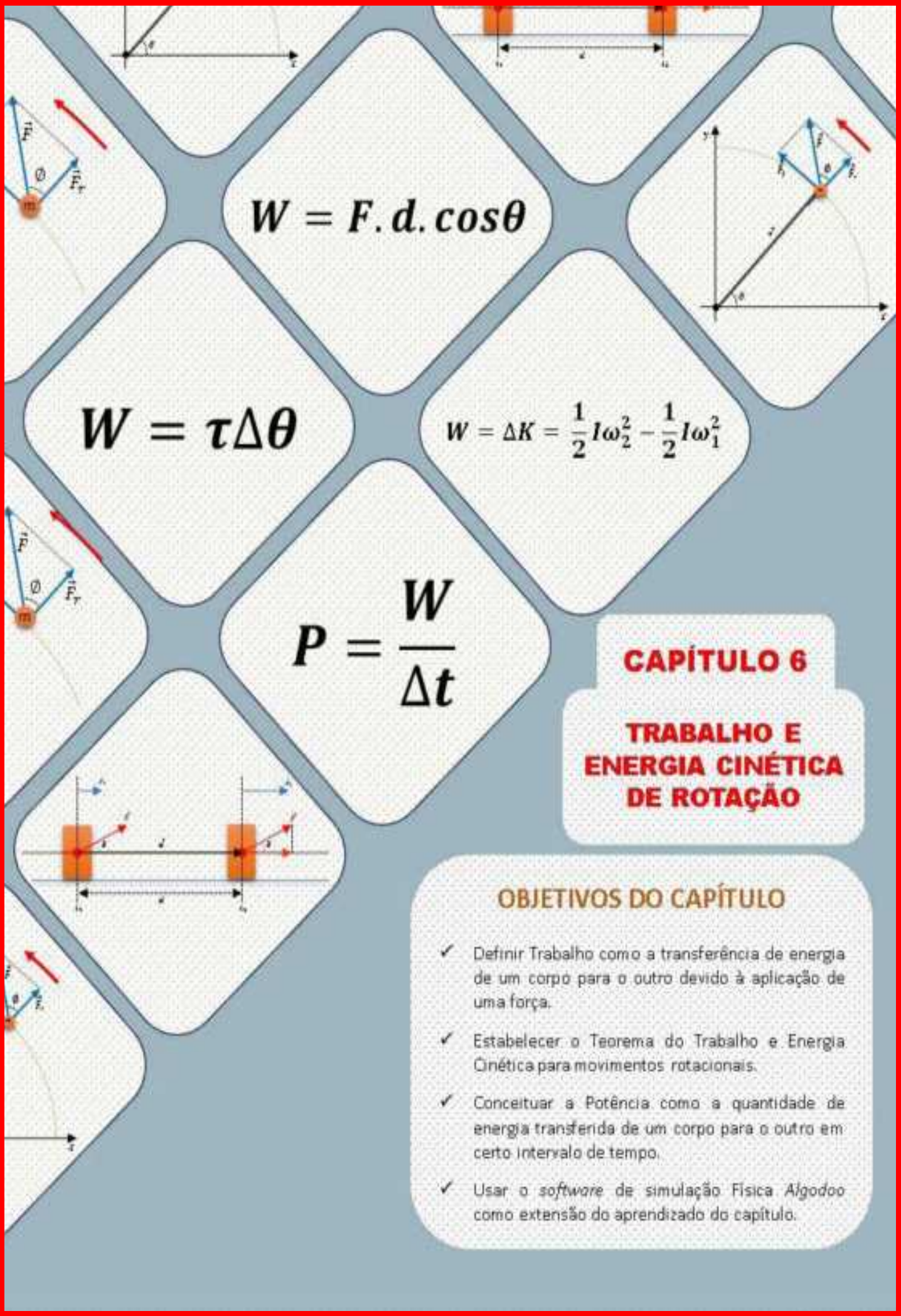
$$\tau = r_{\perp}.F \quad (N.m) \qquad (5.03)$$

$$\tau = rsin\emptyset.F \quad (N.m) \qquad (5.04)$$

$$\tau_R = I\alpha \quad (N.m) \qquad (5.05)$$

$$\tau = I\alpha \quad (N.m) \qquad (5.06)$$

- τ – módulo do torque produzido pela força $\vec{F}$;
- r – distância entre o eixo de rotação e a força $\vec{F}$ aplicada;
- $F_{\perp}$ – módulo da componente tangencial da força $\vec{F}$;
- F – módulo da força $\vec{F}$;
- $\emptyset$ – ângulo formado entre o vetor $\vec{r}$ e a força $\vec{F}$;
- $r_{\perp}$ – braço de alavanca (módulo da componente de $\vec{r}$ que é ortogonal à linha de ação de $\vec{F}$;
- I – momento de inércia;
- α – aceleração angular;
- τ_R – torque resultante (se houver mais de uma força aplicada).



CAPÍTULO 6

TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Definir Trabalho como a transferência de energia de um corpo para o outro devido à aplicação de uma força.
- ✓ Estabelecer o Teorema do Trabalho e Energia Cinética para movimentos rotacionais.
- ✓ Conceituar a Potência como a quantidade de energia transferida de um corpo para o outro em certo intervalo de tempo.
- ✓ Usar o *software* de simulação Física *Algodoo* como extensão do aprendizado do capítulo.

Capítulo 6 Trabalho e Energia Cinética de Rotação

Trabalho (W) é a grandeza física escalar responsável por transferir energia de um corpo para o outro devido à atuação de uma força $\vec{F}$. Quando um corpo rígido de massa m é acelerado em consequência dessa força, ela realiza um trabalho sobre ele, ou seja, o trabalho mede quanto de força foi capaz de mudar a posição de um corpo de um ponto para o outro, independentemente da sua trajetória.

Para um movimento linear, como o trabalho depende da força aplicada sobre o corpo rígido e do deslocamento ocasionado por ela, para calcular sua intensidade devemos levar em consideração a intensidade da força aplicada, o módulo do deslocamento sofrido pelo corpo enquanto submetido à força, além do ângulo formado entre a força e o deslocamento.

Vamos supor um corpo rígido de massa m, sob ação de uma força **constante** $\vec{F}$, percorre uma trajetória retilínea, sofrendo um deslocamento $\vec{d}$, formando um ângulo θ ente $\vec{F}$ e $\vec{d}$, conforme a **Figura 6.01** a seguir:

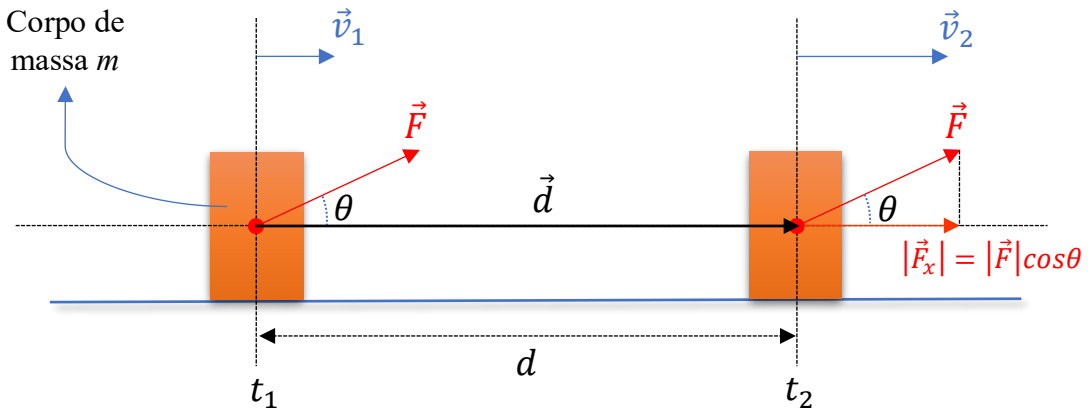


Figura 6.01: Corpo rígido de massa m em trajetória retilínea do instante t_1 a t_2, submetido a uma força constante $\vec{F}$ e descrevendo um deslocamento $\vec{d}$, formando um ângulo θ com a força aplicada.

Para que o corpo de massa m da **Figura 6.01** sofra esse deslocamento paralelo ao seu plano de apoio, mesmo submetido a uma força constante com direção diferente da sua, é necessário que a força resultante tenha a mesma direção e o sentido do deslocamento, visto que há outras forças atuando sobre o corpo, como a força peso e a força de atrito, por exemplo.

Assim, como já mencionado, o trabalho realizado sobre um corpo depende da intensidade da força aplicada, do módulo do deslocamento sofrido pelo corpo enquanto submetido à força, além do ângulo formado entre a força e o deslocamento e é diretamente proporcional a eles:

$$W = F.d.cos\theta \quad (J) \qquad (6.01)$$

- W – trabalho realizado sobre o corpo;
- F – módulo da força aplicada sobre o corpo;
- d – módulo do deslocamento sofrido pelo corpo;
- θ – ângulo formado entre $\vec{F}$ e $\vec{d}$.

A unidade do trabalho é o joule (J) e, de fato, trabalho é energia. Não qualquer energia, mas a energia útil capaz de realizar um deslocamento em um corpo.

Na **Equação 6.01**, $Fcos\theta$ é o módulo da componente da força aplicada sobre o corpo que tem a mesma direção e sentido do deslocamento.

Supondo que $\vec{F}$ e $\vec{d}$, agora, possuem **mesma direção e sentido**. O ângulo formado sobre eles é $\theta = 0º$, sendo $cos0º = 1$. Nesse caso, a **Equação 6.01** se reduz a:

$$W = F.d \quad (J)\ (mesmo\ sentido) \qquad (6.02)$$

Vamos considerar que, na **Equação 6.02**, F seja o módulo da única força que atua sobre um corpo e, portanto, ela é a força resultante. Pela segunda lei de Newton, $F_R = ma$. Assim:

$$W = F_R d$$

$$W = m\,.\,a\,.\,d$$

De acordo com a equação de Torricelli ($v_1^2 = v_2^2 + 2ad$), podemos isolar o termo (ad),

$$v_1^2 = v_2^2 + 2ad$$

$$ad = \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2$$

Fazendo a substituição:

$$W = m\left(\frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2\right)$$

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Acontece que $\frac{1}{2}mv^2$ corresponde à energia cinética linear. Então, podemos concluir que o trabalho corresponde à variação da energia cinética de um corpo, o qual definimos como **Teorema do Trabalho e Energia Cinética**.

$$W = K_2 - K_1 = \Delta K$$

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \text{ (J) (Teorema do Trabalho e Energia Cinética)} \quad (6.03)$$

- W – trabalho realizado sobre o corpo;
- ΔK – variação da energia cinética;
- m – massa do corpo;
- v_1 – velocidade linear escalar inicial do corpo;
- v_2 – velocidade linear escalar final do corpo.

Analogamente, quando um torque acelera um corpo fazendo-o girar, esse torque realiza um trabalho sobre ele e, consequentemente, há uma variação na energia cinética de rotação desse corpo. Vamos considerar também que a única energia que muda nesse corpo é a energia cinética de rotação. Podemos relacionar, agora, a variação da energia cinética ΔK ao trabalho por meio do Teorema do Trabalho e Energia Cinética, sendo que, nesse caso, a energia cinética é a de rotação.

$$W = \Delta K = K_2 - K_1$$

De acordo com a **Equação 4.01**, $K = \frac{1}{2}I\omega^2$. Logo:

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \text{ (J) (Teorema do Trabalho e Energia Cinética)} \quad (6.04)$$

- W – trabalho realizado sobre o corpo;
- ΔK – variação da energia cinética de rotação;
- I – momento de inércia do corpo;
- ω_1 – velocidade angular inicial do corpo;
- ω_2 – velocidade angular final do corpo.

A **Equação 6.04** é para o trabalho realizado sobre uma partícula, mas podemos generalizar para um corpo rígido como um topo, basta usar o momento de inercia do corpo.

Quando uma partícula se desloca ao longo de uma trajetória circular e percorre uma distância que corresponde a um arco de circunferência igual a *s*, apenas a componente tangencial da força executa um torque sobre ela. Assim, a componente F_t realiza trabalho sobre a partícula.

Então, podemos escrever o trabalho da seguinte maneira:

$$W = F_t \,.\, d$$

Para uma pequena distância percorrida, o arco descrito pela trajetória coincide com o seu deslocamento. Logo:

$$W = F_t \,.\, s$$

De acordo com a **Equação 1.01**, $\theta = \frac{s}{r}$ e, portando, $s = r \,.\, \theta$. Entende-se que θ é o ângulo formado entre uma posição angular inicial e uma posição angular final. Logo $\Delta\theta = \theta - \theta_0$. Assim:

$$W = F_t \,.\, r \,.\, \Delta\theta$$

Conforme a **Equação 5.01**, $\tau = F_t \,.\, r$. Portanto, podemos escrever o trabalho realizado sobre uma partícula em função de um torque constante aplicado sobre ela do seguinte modo:

$$W = \tau\Delta\theta \ (J) \qquad (6.05)$$

- W – trabalho realizado sobre a partícula;
- τ – torque realizado sobre a partícula;
- $\Delta\theta$ – deslocamento angular;

A **Figura 6.02** a seguir mostra um corpo rígido simples, de massa *m*, livre para girar em torno de um eixo fixo que passa pelo ponto O. O corpo está preso na extremidade de uma barra de massa desprezível e está submetido a uma força $\vec{F}$, que gera um torque sobre ele, fazendo-o girar.

Vamos considerar que apenas a energia cinética de rotação varia. Durante a rotação, essa força realizará um trabalho sobre o corpo rígido, ocasionando em um deslocamento angular.

O torque associado à componente tangencial da força aplicada sobre o corpo de massa m faz o corpo girar, adquirindo energia cinética de rotação e, assim, realizando um trabalho sobre ele.

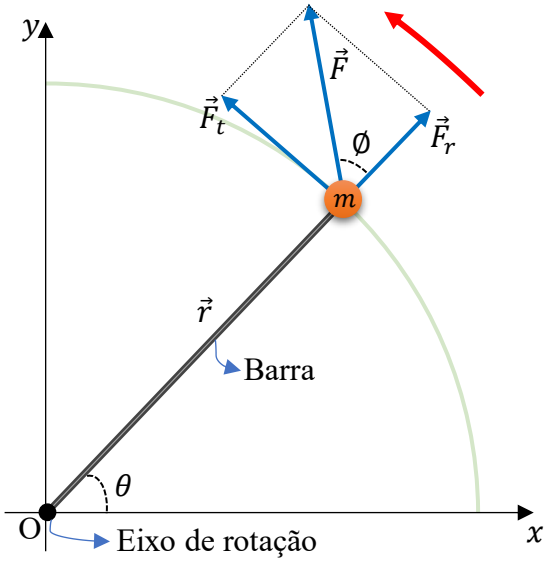


Figura 6.02: Corpo rígido de massa *m em rotação* preso à extremidade de uma barra fina de comprimento *r* e de massa desprezível.

Concluímos, assim, que o trabalho realizado sobre um objeto fixo em um eixo de rotação produz um deslocamento angular sobre ele. Confirmamos também, de acordo com a **Tabela 1.02**, que o módulo do deslocamento (d) é o equivalente linear do deslocamento angular $\Delta\theta$.

6.1 - Potência

A **Potência (*P*)** está relacionada com a quantidade de energia que é recebida ou cedida por um corpo em certo intervalo de tempo, ou seja, ela mensura o quão rápido ocorre essa transferência de energia.

Como o trabalho é energia útil, a taxa de variação da energia com o qual o trabalho é realizado é a caracterização da potência. Podemos calcular a potência mecânica de um corpo em movimento, submetido a uma força constante, da seguinte forma:

$$P = \frac{W}{\Delta t} \quad (W - watt) \qquad (6.06)$$

- P – potência;
- W – trabalho cedido ou recebido;
- Δt – intervalo de tempo.

A potência relacionada à energia mecânica, que, no nosso caso, estamos trabalhando com a energia cinética de rotação; só se aplica a sistemas **dissipativos**, uma vez que não existindo força dissipativa de energia, como o atrito, por exemplo, haverá conservação da energia e, portanto, não existirá trabalho realizado.

Podemos também calcular a potência apresentada por um corpo em movimento de rotação a partir da **Equação 6.06**:

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

$$P = \frac{\tau \Delta \theta}{\Delta t}$$

$$P = \tau \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

Conforme a **Equação 1.03**, para um pequeno intervalo de tempo, podemos considerar a velocidade angular média como a velocidade angular instantânea em determinado instante. Logo, $\frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \omega$ e, portanto:

$$P = \tau \omega \quad (W) \qquad (6.07)$$

- P – potência;
- τ – torque;
- ω – velocidade angular.

A potência, de fato, mostra o quão eficiente um objeto é capaz de converter uma energia recebida em outra forma de energia o mais rápido possível. Quanto mais rápido isso ocorrer, maior é a sua potência.

IMPORTANTE

No SI, a unidade da potência é o *watt*, representando pela letra "*W*" em homenagem ao inventor escocês James Watt (1736 a 1819) pelas suas contribuições científicas. Com isso, é importante não confundir a unidade de potência com a grandeza escalar trabalho, também representada pela letra "*W*", a qual é derivada do inglês (*work*).

USANDO O *ALGODOO* 6.0

A **Figura 6.03** e a **Figura 6.04** a seguir mostram a mesma simulação no *Algogoo* de um corpo de massa *m* preso na extremidade de uma barra fina de 40 *cm* e massa desprezível. Em cada situação, o corpo apresenta uma posição angular diferente, destacando que houve a realização de um trabalho feito por uma força constante.



Figura 6.03: Captura de tela do *software Algodoo*: corpo de massa *m* preso à extremidade de uma barra fina de massa desprezível, submetido a uma força tangencial de 0,05 N e com velocidade angular de 3,09 rad/s.
Fonte: os autores.

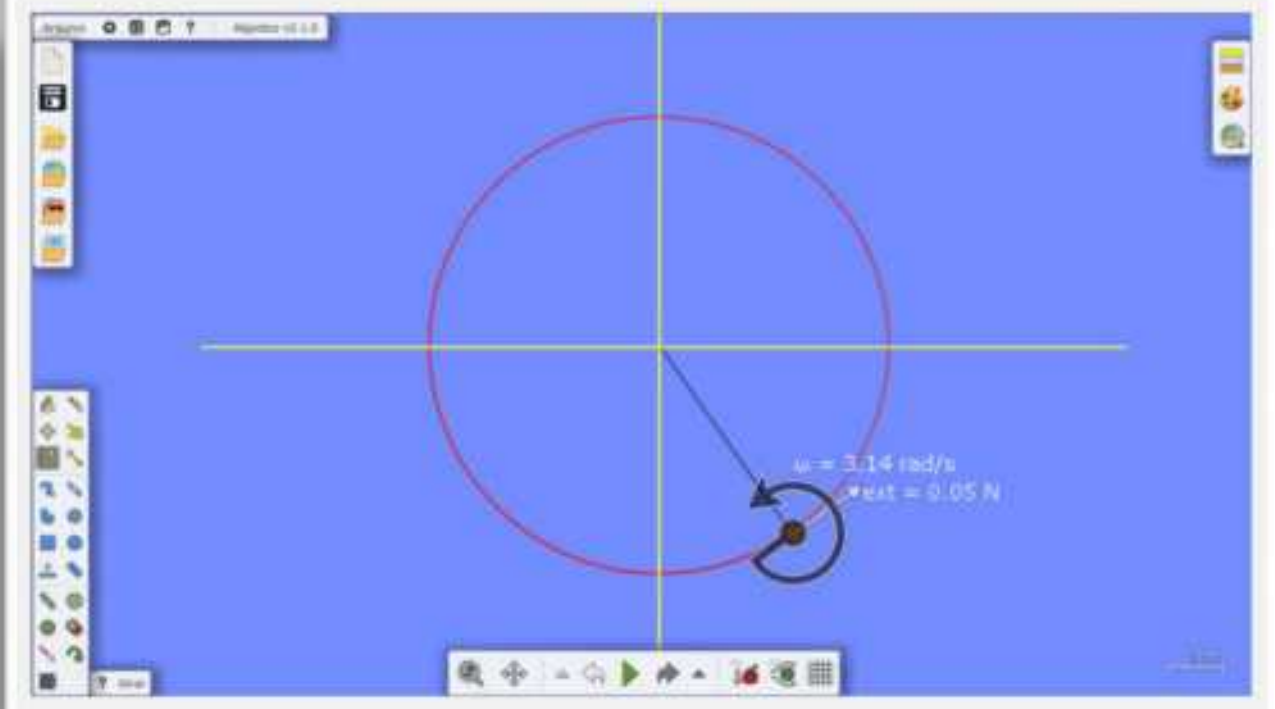


Figura 6.04: Captura de tela do *software Algodoo*: mesmo corpo de massa *m* da **Figura 6.03** em uma posição angular diferente, preso à extremidade de uma barra fina de massa desprezível, submetido a uma força tangencial de 0,05 *N* e com velocidade angular de 3,14 *rad/s*.
Fonte: os autores.

Simulações disponíveis em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264384*.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

Clique no *link https://youtu.be/MUGqLNPCdSE* ou escaneie o *QR code* ao lado para assistir ao vídeo do tutorial da animação.

A partir dessas duas situações descritas, podemos extrair os dados e usar a **Equação 6.04** ou a **Equação 6.05** para calcular o trabalho realizado sobre o corpo, considerando que não exista efeitos gravitacionais agindo sobre ele.

TAREFA PROPOSTA 6.0

Uma barra homogênea e muito fina de 500 g de massa e 3 m de comprimento está fixa em um eixo de rotação em uma de suas extremidades e livre para girar. A barra está submetida a uma força constante que a faz girar, variando a sua energia cinética de rotação. A única energia que muda na barra é a sua energia angular.

A equação para calcular o momento de inércia de uma barra fina homogênea é $I = \frac{mL^2}{12}$, em que m é a massa da barra e L, o seu comprimento (ou a distância do eixo de rotação ao ponto onde se deseja calcular o momento de inércia).

Use a **Tabela 6.01** a seguir e calcule o momento de inércia na extremidade da barra fina homogênea em que não se encontra o eixo de rotação.

$m\ (kg)$	$L\ (m)$	$I = \frac{mL^2}{12}\ (kgm^2)$
0,5	3	

Tabela 6.01: Dados para cálculo do momento de inércia da barra fina homogênea.

Em seguida, com posse do momento de inércia da barra fina, calcule a energia cinética de rotação para dois pontos da trajetória de acordo com a velocidade angular de cada ponto, conforme dados da **Tabela 6.02** (Lembre-se que o momento de inércia é constante para pontos de uma mesma trajetória circular):

Ponto	$I\ (kgm^2)$	$\omega\ (rad/s)$	$K = \frac{1}{2}I\omega^2\ (J)$
A		3,52	
B		4,18	

Tabela 6.02: Dados para cálculo da energia cinética de rotação para dois pontos da trajetória circular da extremidade da barra fina homogênea.

Depois de calcular a energia cinética de rotação de cada ponto, acesse a simulação clicando **AQUI**, dê *play* na simulação e pause exatamente quando a velocidade angular corresponder ao valor no ponto A, ou seja, 3.52 *rad/s*. Se passou do valor, aperte no seu teclado *ctrl+z* para voltar a simulação e repetir o processo até conseguir parar no valor pretendido. Parado no valor exato, clique com o botão direito sobre a barra e acesse às informações para verificar se você acertou os cálculos. Repita o mesmo processo para ter o resultado da energia cinética de rotação no ponto B.

Coloque os valos das energias cinéticas na **Tabela 6.02** e use a **Tabela 6.03** para calcular o trabalho realizado sobre a barra através do Teorema do Trabalho e Energia Cinética:

$K_A\ (J)$	$K_B\ (J)$	$W = K_B - K_A\ (J)$

Tabela 6.03: Dados para cálculo do trabalho realizado sobre a barra fina homogênea.

A **Figura 6.05** a seguir mostra, mais uma vez, como verificar o guia ***informações*** para verificação dos dados:

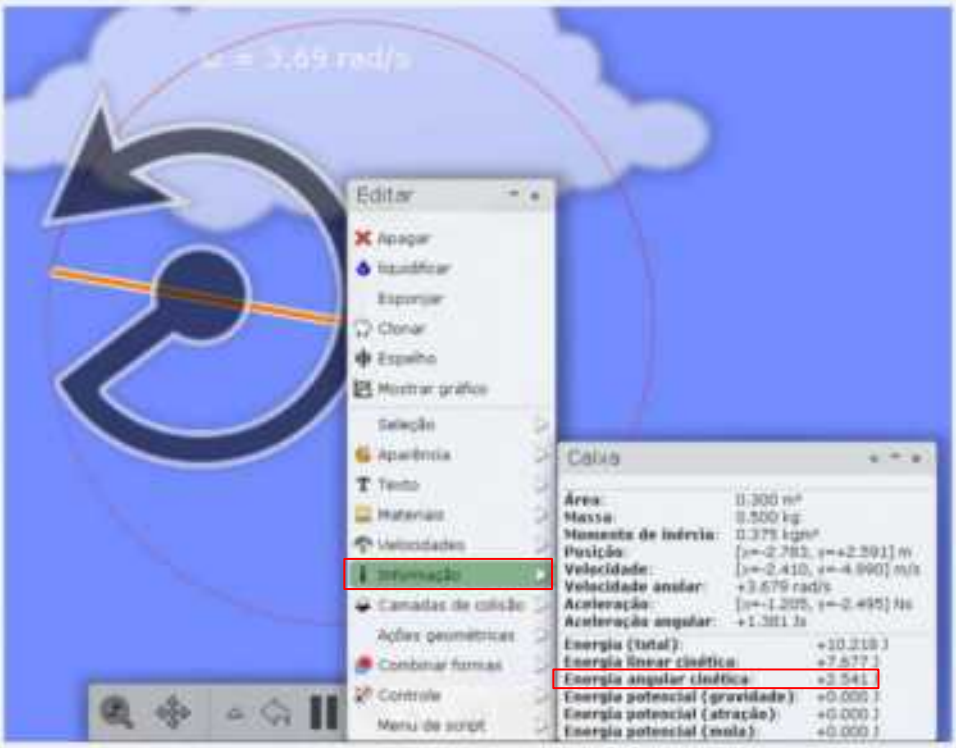


Figura 6.05: Captura de tela do *software Algodoo*: como obter acesso aos dados físicos de um objeto em simulação. Fonte: os autores.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em: *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

E aí, conseguiu fazer o passo a passo do experimento e acertar os resultados?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

6.01 – Uma partícula de massa 5 g está em movimento circular distante 20 cm do seu eixo fixo de rotação. Em certo instante, a partícula se encontra em um ponto A com velocidade angular de 4 *rad/s* e, depois de um certo tempo, ela estará em um ponto B com velocidade angular de 7 *rad/s*. Considere que a força aplicada sobre a partícula seja constante, como também a única energia que varia no corpo seja a energia cinética de rotação e calcule o trabalho realizado para a partícula ir de A até B.

Solução: A questão nos fornece a velocidade angular da partícula em cada ponto, além da sua massa associada à sua distância do eixo de rotação. Podemos calcular o trabalho realizado sobre a partícula usando a **Equação 6.04** (Teorema do Trabalho e Energia Cinética):

$$W = \Delta K$$

$$W = K_B - K_A$$

$$W = \frac{1}{2} I\omega_B^2 - \frac{1}{2} I\omega_A^2$$

O momento de inércia de uma partícula igual a mr^2:

$$W = \frac{1}{2} mr^2\omega_B^2 - \frac{1}{2} mr^2\omega_A^2$$

Sendo $m = 5\ g = 5\,.\,10^{-3}\ kg$ e $r = 20\ cm = 2\,.\,10^{-1}\ m$:

$$W = \frac{1}{2}.5\,.\,10^{-3}\,.(2\,.\,10^{-1})^2\,.\,7^2 - \frac{1}{2}\,.\,5\,.\,10^{-3}\,.\,(2\,.\,10^{-1})^2\,.\,4^2$$

$$W = \frac{1}{2}.5\,.\,10^{-3}\,.\,4\,.\,10^{-2}\,.\,49 - \frac{1}{2}\,.\,5\,.\,10^{-3}\,.\,4\,.\,10^{-2}\,.\,16$$

$$W = 490\,.\,10^{-5} - 160\,.\,10^{-5}$$

$$W = 330\,.\,10^{-5}$$

$$\boxed{W = 3{,}3\ 10^{-3}\ J}$$

Portanto, considerando que a única energia que muda seja a energia cinética de rotação, o trabalho realizado sobre a partícula para ela ir do ponto A até o ponto B foi de $3{,}3\ 10^{-3}\ J$.

6.02 – A **Figura 6.06** ilustra uma partícula de massa m, presa em uma barra fina de massa desprezível, distante 40 cm do seu eixo fixo de rotação. Em certo instante, a partícula encontra-se sobre o eixo positivo de x e uma força de 30 N, com inclinação de 30º sobre o eixo em que ela se encontra, começa a agir sobre ela, fazendo-a girar no sentido anti-horário. Considere que a força aplicada sobre a partícula seja constante, como também a única energia que varia no corpo seja a energia cinética de rotação, calcule o trabalho realizado para a partícula sofrer um deslocamento angular de 45º, conforme ilustra a figura a seguir.

Dado: $sen30° = 0{,}5$

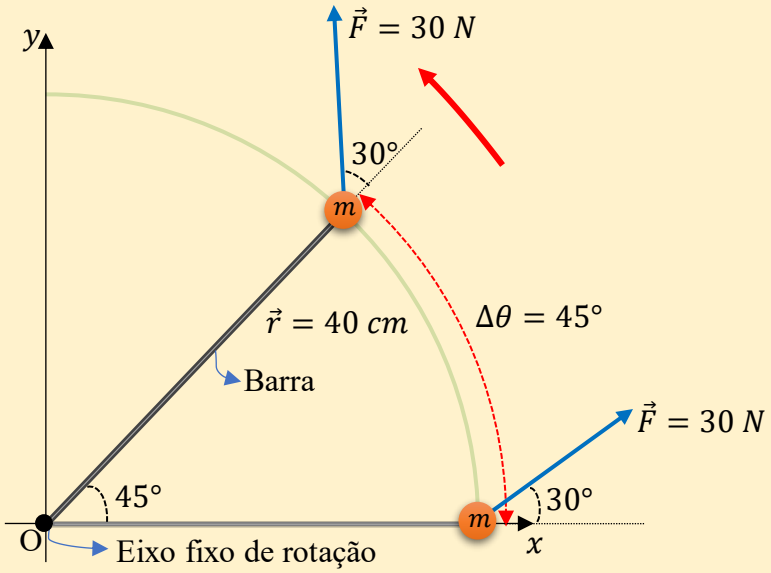


Figura 6.06: Exercício Resolvido 6.02 - Corpo rígido em rotação preso na extremidade de uma barra fina de massa desprezível.

Solução: Como a questão nos fornece o raio da trajetória circular, a força aplicada e o ângulo entre o vetor $\vec{r}$ e $\vec{F}$, além do deslocamento angular sofrido pela partícula, podemos calcular o trabalho sofrido por ela usando a **Equação 6.05**:

$$W = \tau\Delta\theta$$

Como $\tau = r\,.\,Fsen\theta$ e 45º corresponde a 0,785 em radianos:

$$W = r\,.\,Fsen30°\,.\,\Delta\theta$$

Sendo $r = 40\ cm = 4\,.\,10^{-1}\ m$ e $sen30° = 0{,}5$:

$$W = 4\,.\,10^{-1}\,.\,30\,.\,0{,}5\,.\,0{,}785$$

$$W = 47{,}1\,.\,10^{-1}$$

$$\boxed{W = 4{,}71\ J}$$

Portanto, considerando que a única energia que muda seja a energia cinética de rotação, o trabalho realizado fazer um deslocamento angular de 45º é de 4,71 J.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

6.01 – Uma partícula de massa 8 g está em movimento de rotação distante 25 cm do seu eixo fixo de giro. Numa posição angular A, a partícula se encontra com velocidade angular de 2 *rad/s* e, depois de um certo tempo, ela estará em uma posição angular B com velocidade angular de 9 *rad/s*. Considere que a força aplicada sobre a partícula seja constante, como também a única energia que varia no corpo seja a energia cinética de rotação e calcule o trabalho realizado para a partícula fazer esse deslocamento.

6.02 – A seguir, a **Figura 6.07** representa uma partícula de massa m, presa em uma barra fina de massa desprezível, distante 30 cm do seu eixo fixo de rotação. Em certo instante, a partícula encontra-se sobre o eixo positivo de x e uma força constante de 50 N, com inclinação de 45º sobre o eixo em que ela se encontra, começa a agir sobre ela, fazendo-a girar no sentido anti-horário. Considere que a única energia que varia no corpo seja a energia cinética de rotação e calcule o trabalho realizado para a partícula sofrer um deslocamento angular de 50º, conforme ilustra a figura a seguir. (Dado: $sen45° = 0{,}71$) e que 50º corresponda a 0,87 radianos.

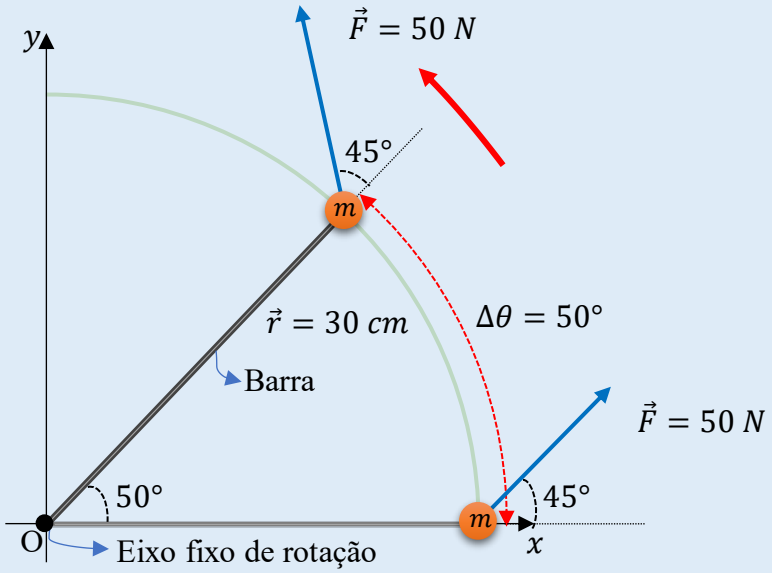


Figura 6.07: Exercício Proposto 6.02 - Corpo rígido em rotação preso na extremidade de uma barra fina de massa desprezível.

Saiba mais...

Para um eixo restrito a uma direção, como o eixo x, por exemplo, podemos calcular o trabalho, para força variável ou não, utilizando a seguinte equação:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

A taxa com a qual o trabalho é realizado é a potência:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Se a força que realiza o trabalho for constante e tenha a mesma direção do deslocamento, o trabalho se reduz a:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

$$W = F\int_{x_1}^{x_2} dx$$

$$W = Fd$$

Para a potência com força constante:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$P = \frac{d}{dt}Fd$$

$$P = F\frac{d}{dt}d$$

A derivada do deslocamento em relação ao tempo é a velocidade:

$$P = Fv$$

Quando uma partícula se desloca de uma distância infinitesimal ds ao longo de uma trajetória circular, apenas a componente tangencial da força é que realiza o torque sobre ela. Assim, o trabalho infinitesimal dW poderá ser escrito da seguinte maneira:

$$dW = F_t.ds$$

Sendo ds o deslocamento infinitesimal devido a um trabalho infinitesimal associado.

Para um deslocamento ds, temos um deslocamento $d\theta$ e, conforme a **Equação 1.01**, $ds = r\ d\theta$.

Logo:

$$dW = F_t.rd\theta$$

Sendo $\tau = F_t.r$:

$$dW = \tau d\theta$$

Integrando dos dois lados:

$$\int dW = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta$$

$$\boxed{W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta}$$

Essa equação é válida para qualquer corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo.

Para um torque gerado por uma força constante:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta$$

$$W = \tau \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta$$

$$W = \tau\ .\theta|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$W = \tau\ .(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\boxed{W = \tau\Delta\theta}$$

Como a potência é a derivada do trabalho em relação ao tempo, para um torque constante:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$P = \tau\frac{d\theta}{dt}$$ (ω)

Sendo $\frac{d\theta}{dt} = \omega$:

$$\boxed{P = \tau\omega}$$

Essa é a potência mecânica associada ao movimento de rotação.

REVISÃO

Trabalho e Energia Cinética de Rotação

Trabalho: O **Trabalho** mecânico é a energia útil capaz de mudar a posição de um corpo de um ponto para o outro, independentemente da sua trajetória, ou seja, ele mede o quanto de força foi capaz de realizar esse deslocamento. Para calcular o trabalho, usaremos a equação:

$$W = F.d.cos\theta \quad (J) \qquad (6.01)$$

- W – trabalho realizado sobre o corpo;
- F – módulo da força aplicada sobre o corpo;
- d – módulo do deslocamento sofrido pelo corpo;
- θ – ângulo formado entre $\vec{F}$ e $\vec{d}$.

Quando $\vec{F}$ **e** $\vec{d}$ possuírem o mesmo sentido:

$$W = F.d \quad (J) \qquad (6.02)$$

Teorema do Trabalho e Energia Cinética: O trabalho também pode ser calculado pelo **Teorema do Trabalho e Energia Cinética** por meio das equações:

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (J)\ (Teorema\ do\ Trabalho\ e\ Energia\ Cinética) \qquad (6.03)$$

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \quad (J)\ (Teorema\ do\ Trabalho\ e\ Energia\ Cinética) \qquad (6.04)$$

- W – trabalho realizado sobre o corpo;
- ΔK – variação da energia cinética de rotação;
- m – massa do corpo;
- v_1 – velocidade linear escalar inicial do corpo;
- v_2 – velocidade linear escalar final do corpo;
- I – momento de inércia;
- ω_1 – velocidade angular inicial do corpo;
- ω_2 – velocidade angular final do corpo.

Trabalho e Torque: Também podemos escrever o **trabalho** em função do **torque** e do **deslocamento angular**:

$$W = \tau \Delta\theta \quad (J) \qquad (6.05)$$

- W – trabalho realizado sobre o corpo;
- τ – módulo do torque produzido pela força $\vec{F}$;
- $\Delta\theta$ – deslocamento angular.

Potência: A **potência** mecânica está relacionada com a quantidade de trabalho realizado pelo corpo em certo intervalo de tempo. Para uma força constante, a potência pode ser calculada por meio das equações:

$$P = \frac{W}{\Delta t} \quad (W - watt) \qquad (6.06)$$

$$P = \tau\omega \quad (W - watt) \qquad (6.07)$$

- P – trabalho realizado sobre o corpo;
- W – trabalho realizado sobre o corpo;
- Δt – intervalo de tempo;
- τ – módulo do torque produzido por uma força constante $\vec{F}$;
- ω – velocidade angular.

IMPORTANTE: A grandeza trabalho é representada pela letra "*W*" do inglês "*work*". Já a unidade de potência, no SI, a letra "*W*" significa "*watt*" em homenagem ao inventor escocês James Watt (1736 a 1819), devido as suas contribuições científicas.



CAPÍTULO 7

ROLAMENTO

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Definir o que é um movimento de rolagem.
- ✓ Mostrar que o movimento de rolamento é uma combinação dos movimentos de rotação pura e translação pura.
- ✓ Destacar o cálculo do movimento de rolamento como um movimento de rotação pura.
- ✓ Usar o *software* de simulação Física *Algodoo* como extensão do aprendizado do capítulo.

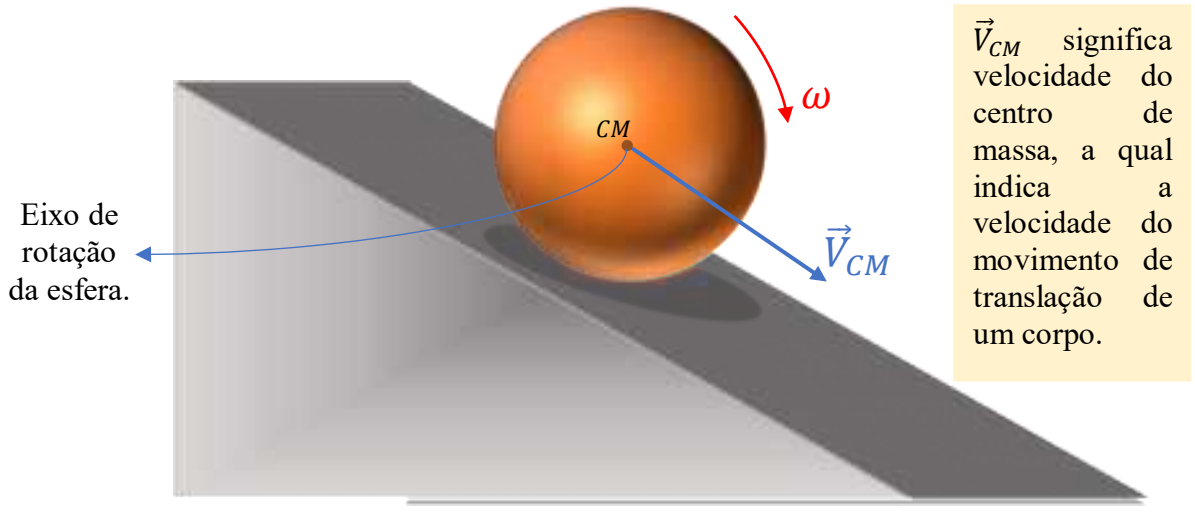
Capítulo 7 Rolamento

7.1 - O que é Rolamento?

Nos capítulos anteriores, observamos a importância, na Física, do estudo das rotações. Em relação às aplicações desse estudo, a mais importante é, provavelmente, o estudo do **rolamento** de corpos rígidos, que possuem características de movimento idênticas aos das rodas. Talvez, a roda seja uma das principais invenções de toda a história. Com ela, foi possível tornar o transporte muito mais rápido, contribuindo para a evolução de cidades e da tecnologia humana ao longo dos tempos. É fácil perceber que, hoje em dia, é impossível de imaginar um mundo sem o uso delas. Basta observar bicicletas, motocicletas, carros, caminhões, ônibus e muitos outros veículos sobre rodas em nossa volta.

Apesar de o transporte sobre rodas ser bastante antigo, muito de novo pode ser criado usando essa engenharia, como o *Segway*, por exemplo, que consiste em um veículo elétrico semelhante a um patinete. Nele, é possível uma pessoa se movimentar linearmente e girar rapidamente em torno do seu próprio eixo ao mesmo tempo. O uso do rolamento vem sendo praticado pelo homem ao longo dos séculos e, certamente, muitas invenções ainda surgirão usando esse princípio. Assim, quando um corpo está, ao mesmo tempo, descrevendo os movimentos de **translação** e **rotação**, ele está descrevendo um movimento de **rolamento**.

A **Figura 7.01** a seguir ilustra uma esfera homogênea descrevendo um movimento de rolagem sobre um plano inclinado. Observe que a esfera possui um movimento de giro enquanto descreve um movimento linear.



$\vec{V}_{CM}$ significa velocidade do centro de massa, a qual indica a velocidade do movimento de translação de um corpo.

Figura 7.01: Esfera homogênea de massa *m* em movimento de rolamento sobre um plano inclinado.

7.2 – Rolamento: uma combinação de Rotação e Translação

Como vimos, rolamento é a combinação do movimento linear de um corpo, chamado de **translação**, com o de movimento de giro em torno de um eixo fixo, chamado de **rotação**. Em outras palavras, rolamento é uma associação dos movimentos simultâneos de rotação com o movimento de rotação de um corpo, como um pneu de uma bicicleta em movimento retilíneo, por exemplo.

Neste capítulo, vamos considerar apenas corpos que **rolam suavemente** em uma superfície, ou seja, objetos que descrevem movimento de rolagem sem escorregar (deslizar) ou quicar nela. Esse movimento é chamado de **rolamento suave**.

Nesse tipo de rolamento, apesar de o centro dos objetos se moverem em linha reta paralela à superfície, um outro ponto do corpo diferente desse centro não realiza o mesmo movimento. Todavia, vamos estudar a combinação desses movimentos tratando o movimento linear de translação do centro de massa e rotação do resto do corpo em torno desse centro de massa.

A **Figura 7.02** ilustra as linhas que descrevem as trajetórias de dois pontos distintos de um objeto em rolamento.

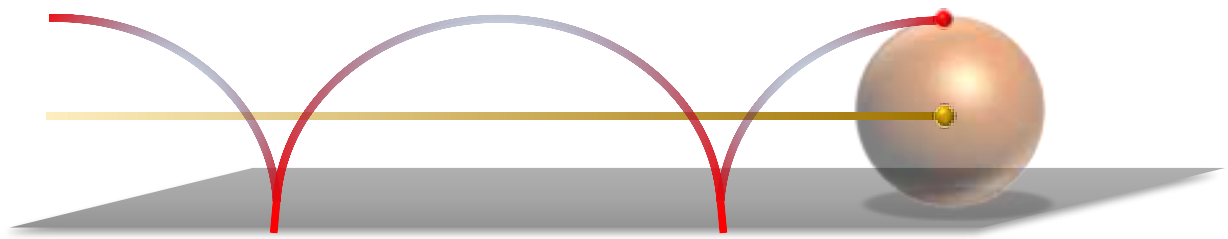


Figura 7.02: Esfera maciça homogênea rolando da esquerda para direita em um movimento combinado de rotação e translação sem deslizamento.

Observe que na **Figura 7.02**, o ponto de cor "amarelado", que se encontra no centro da esfera, realiza um movimento de translação, enquanto o ponto de cor vermelha, posicionado na extremidade superior da esfera, realiza uma trajetória extremamente distinta. Como o movimento descrito pela esfera não sofreu deslizamento, se trata de um rolamento suave, o que pode não ser tão simples de ser analisado.

Para entender melhor o movimento de rolamento, observe a seguir a **Figura 7.03** e perceba que um ponto O, contido no centro de massa da roda, se move com velocidade constante $\vec{V}_{CM}$. Por outro lado, um ponto P, que está sempre em contato com o solo, também se move com a velocidade $\vec{V}_{CM}$, uma vez que esses dois pontos caminham juntos no mesmo sentido no movimento de translação.

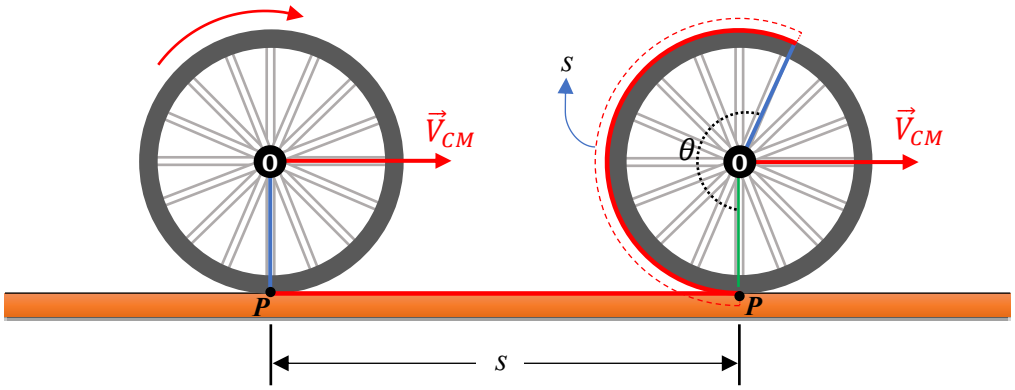


Figura 7.03: Roda descrevendo um movimento de rolamento com velocidade do centro de massa $\vec{V}_{CM}$.

Na **Figura 7.03**, o movimento da roda pode ser visto de várias perspectivas, dependendo do referencial adotado. Vamos considerar uma pessoa parada na calçada, olhando um ciclista passar como um dos referenciais, e o próprio ciclista como o outro referencial. Durante um intervalo de tempo Δt, o observador da calçada enxerga os pontos O e P se deslocarem em linha reta a uma distância s. Já o ciclista observa apenas a roda girar, descrevendo um ângulo θ com o ponto P que está tocando o solo, descrevendo, no mesmo intervalo de tempo Δt, um arco de circunferência com a mesma medida s observada pela pessoa na calçada.

Como já vimos anteriormente, um arco de circunferência pode ser relacionado com o ângulo de rotação e o raio da trajetória circular (**Equação 1.01**), que, nesse caso, é o raio R da roda da bicicleta:

$$s = \theta R \ (m) \qquad (7.01)$$

- s – arco de circunferência da trajetória;
- θ – ângulo de giro da roda;
- R – raio da roda.

Como as distâncias descritas pelos movimentos de rotação e translação são as mesmas *(s)*, podemos relacionar a velocidade linear escalar do centro de massa "V_{CM}" de uma roda homogênea com a velocidade linear escalar da extremidade dessa mesma roda para movimentos constantes. De acordo com a **Equação 3.03**, $v = \omega R$. Logo:

$$V_{CM} = \omega R \ \ (m/s) \qquad (7.02)$$

- V_{CM} – velocidade do centro de massa da roda;
- ω – velocidade angular da roda;
- R – raio da roda.

A **Figura 7.04** a seguir mostra que o movimento de rolamento é, de fato, a combinação dos movimentos individuais dos dois tipos de movimentos que vimos até então: o movimento de **translação puro** e o movimento **de rotação puro**. Na rotação pura, todos os pontos da roda se movem com a mesma velocidade angular e todos os pontos da sua borda se movem à mesma velocidade linear escalar. Na translação pura, todos os pontos da roda se movem com a mesma velocidade linear escalar, que é a mesma velocidade do seu centro de massa.

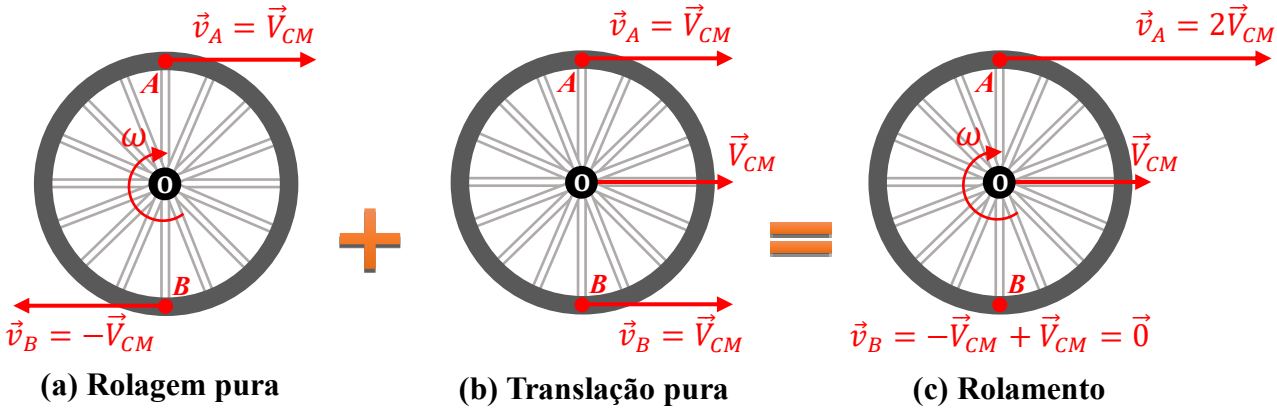


Figura 7.04: Movimento de rolagem de uma roda como a combinação dos movimentos de rotação e translação puros. Em (a), a roda gira apenas em torno do seu eixo. Em (b), a roda não gira e faz apena o movimento de translação. Em (c), a combinação entre (a) e (b), ou seja, a roda gira em torno do próprio eixo enquanto se move linearmente em um movimento de translação.

Podemos observar as características de um movimento apenas de giro da roda (rotação pura) na **Figura 7.04(a)**. Nela, é como se o eixo estivesse estacionário e todos os pontos da roda possuem a mesma velocidade angular, enquanto a velocidade linear, em pontos dessa roda, depende da distância desse eixo de rotação. Para pontos que descrevem a mesma trajetória circular, o módulo da velocidade linear permanece constante com o passar do tempo, mas sua direção e sentido muda a cada instante.

Na **Figura 7.04(b)**, a roda não gira, faz apenas um movimento linear (translação pura) para direita. Nela, observamos que todos os pontos da roda possuem a mesma velocidade linear, que é a velocidade do centro de massa $\vec{V}_{CM}$.

Já na representação da **Figura 7.04(c)**, é ilustrada a combinação entre os movimentos em (a) e (b). Como resultado, temos que a roda descreve um movimento linear para direita enquanto gira em torno do seu centro de massa no sentido horário. Esse é o movimento de rolamento, que, como já conceituamos várias vezes, consiste na junção dos movimentos de rotação e translação.

Observe que nas três representações da **Figura 7.04**, existem três pontos posicionados no mesmo lugar a serem considerados: o ponto A, o qual faz parte da extremidade superior da roda; o ponto B, que se localiza na extremidade inferior; e o ponto O, que está no centro da roda e, portanto, no seu centro de massa, pois estamos considerando uma roda homogênea. Como

resultado algébrico dessa combinação, as velocidades do ponto A dos movimentos de rotação pura e translação pura possuem mesmo módulo direção e sentido, tendo como resultante no movimento de rolagem $\vec{v}_A = 2\vec{V}_{CM}$. No ponto B, as velocidades possuem mesmo módulo, mas sentidos opostos; o que resulta em uma velocidade nula $\vec{v}_B = \vec{0}$ no movimento de rolamento. Como no centro da roda (ponto O) a velocidade linear é nula na rotação pura, a velocidade de rolamento, nesse ponto, é apenas $\vec{V}_{CM}$.

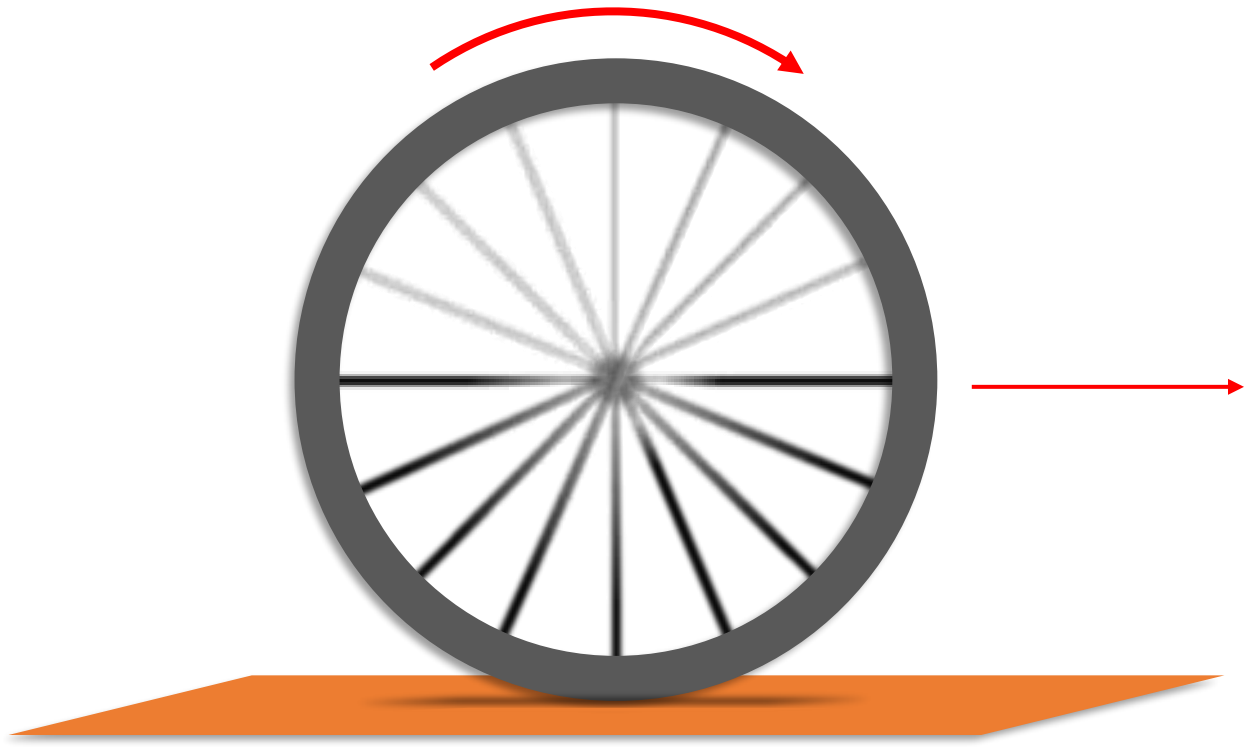


Figura 7.05: Roda de uma bicicleta em movimento para a direita. Os raios de cima estão menos nítidos porque estão se movendo mais devagar.

Na **Figura 7.05**, podemos confirmar os resultados da **Figura 7.04**, em que os raios de cima de uma roda de bicicleta em movimento estão menos nítidos do que os raios de baixo pelo fato da diferença de velocidade entre eles em um movimento de rolamento.

7.3 – Rolamento como uma Rotação Pura

O movimento de rolagem de uma roda também pode ser descrito como um movimento de rotação pura em que o eixo de rotação passa pelo ponto da roda que está em contato com o solo. Como exemplo, vamos usar a **Figura 7.04(c)**: o ponto de contato entre a roda e o solo é o ponto B. Nesse exemplo, a velocidade linear em qualquer ponto da roda é perpendicular à linha que liga esse ponto ao ponto "B", sendo a velocidade angular da roda constante em todos os pontos da roda, os quais descrevem arcos de circunferências cujos centros é o ponto de contato

entre a roda e o solo, ou seja, o ponto “B”.

A **Figura 7.06** a seguir ilustra as velocidades instantâneas em alguns pontas da roda, os quais seus valores podem ser obtidos combinando os movimentos de rotação e translação puros, como mostrado na **Figura 7.04**.

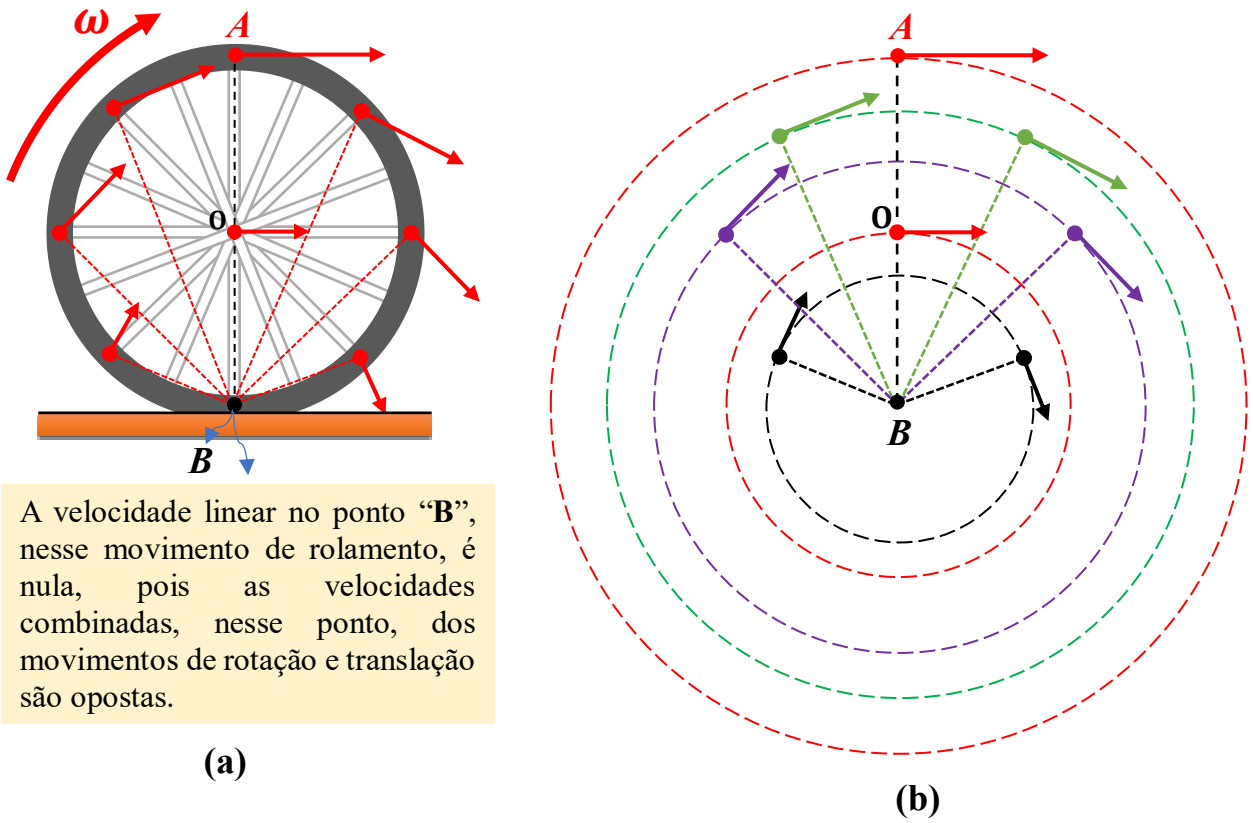


Figura 7.06: Representação do movimento de rolagem como uma rotação pura, com eixo de rotação de passa pelo ponto B. Em (a), a representação dos vetores velocidades em diversos pontos da roda. Em (b), a trajetória circular que esses pontos descreveriam se analisados como rotação pura.

Nas duas ilustrações da **Figura 7.06**, as velocidades lineares estão representadas nos mesmos pontos da roda em movimento de rolamento. Em (b), as linhas tracejadas revelam as trajetórias circulares do movimento com a análise de uma rotação pura, mesmo o movimento não sendo desse tipo. Como a velocidade angular é constante em cada ponto, podemos provar os valores para as velocidades do movimento de rolamento descrito na Figura **7.04(c)**.

Como o módulo da velocidade linear escalar em cada ponto é $v = \omega r$, vamos calcular as velocidades nos pontos conhecidos da **Figura 7.04(c)** com base nas informações da **Figura 7.06(b):**

Para o Ponto A:

$$v_A = \omega r_A$$

Acontece que o ponto O é o centro da roda, o qual divide ao meio a distância entre o ponto B e o ponto A, ou seja, o raio da trajetória do ponto A é igual a duas vezes o raio da roda

$(r_A = 2R)$:

$$v_A = \omega . 2R$$

De acordo com a **Equação 7.02**, ωR representa a velocidade do centro de massa. Logo, podemos escrever:

$$\boxed{v_A = 2V_{CM}}$$

Para o ponto O, a distância para o ponto B é o próprio raio da roda. Assim:

$$\boxed{v_O = V_{CM}}$$

Para o ponto B, a distância para o eixo de rotação é zero, tendo em vista que ele está no eixo de rotação. Logo:

$$\boxed{v_B = 0}$$

USANDO O *ALGODOO* 7.0

A **Figura 7.07** abaixo mostra um objeto circular com densidade constante (centro de massa localizado no seu centro geométrico) com movimento de rolagem enquanto desce uma rampa. Nesse movimento, podemos observar que o corpo possui tanto velocidade angular, referente a sua rotação, quanto velocidade linear do seu centro de massa, referente ao seu movimento de translação.

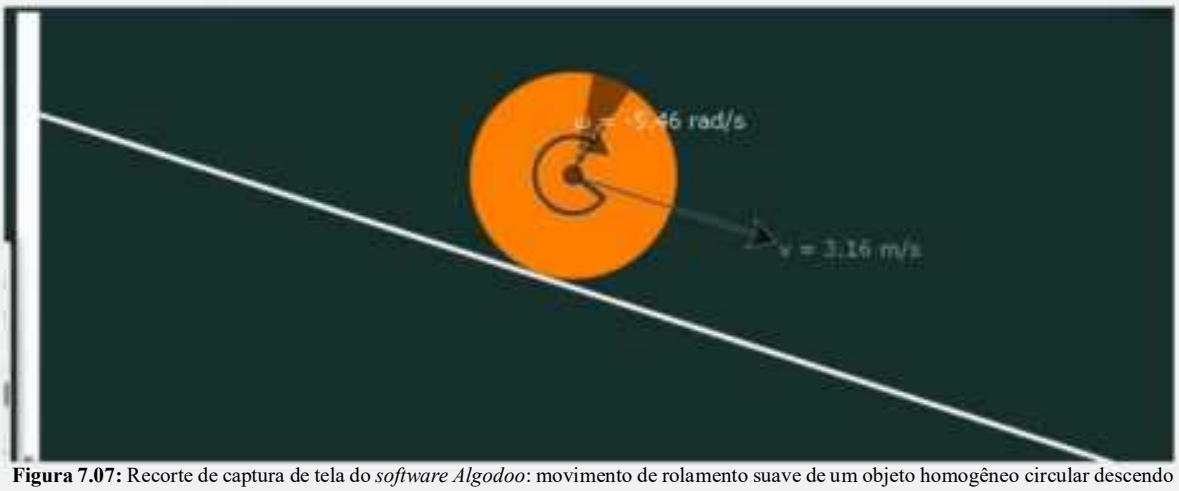


Figura 7.07: Recorte de captura de tela do *software Algodoo*: movimento de rolamento suave de um objeto homogêneo circular descendo uma rampa.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264516*.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

Na **Figura 7.08** a seguir, você pode visualizar as trajetórias de dois pontos de um objeto circular homogêneo: um no centro do objeto e outro na sua extremidade. Você vai observar que a trajetória do ponto localizado no centro de massa fará uma trajetória retilínea, enquanto o outro ponto fará uma trajetória extremamente distinta.

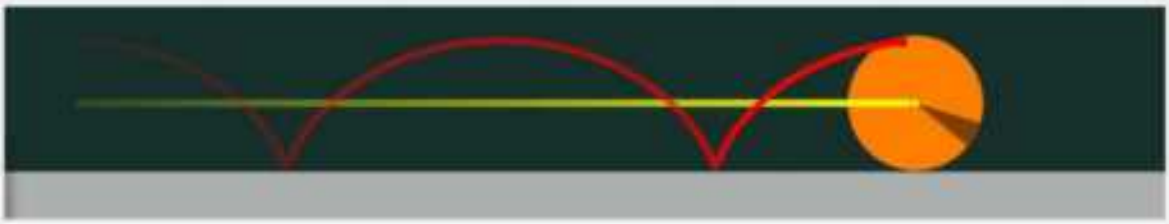


Figura 7.08: Recorte de captura de tela do *software Algodoo*: trajetórias de dois pontos distintos em um movimento de rolamento.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264517*.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

Podemos também verificar, no *software*, que o movimento de rolamento pode ser visto como um movimento de rotação pura, em que o eixo de rotação é o ponto de contato entre o objeto circular e o solo. Observe que, na **Figura 7.09**, os pontos da trajetória em vermelho possuem o dobro da velocidade linear escalar de que pontos que estão na trajetória em preto, confirmando que pontos da extremidade são duas vezes mais rápidos que o centro de massa.

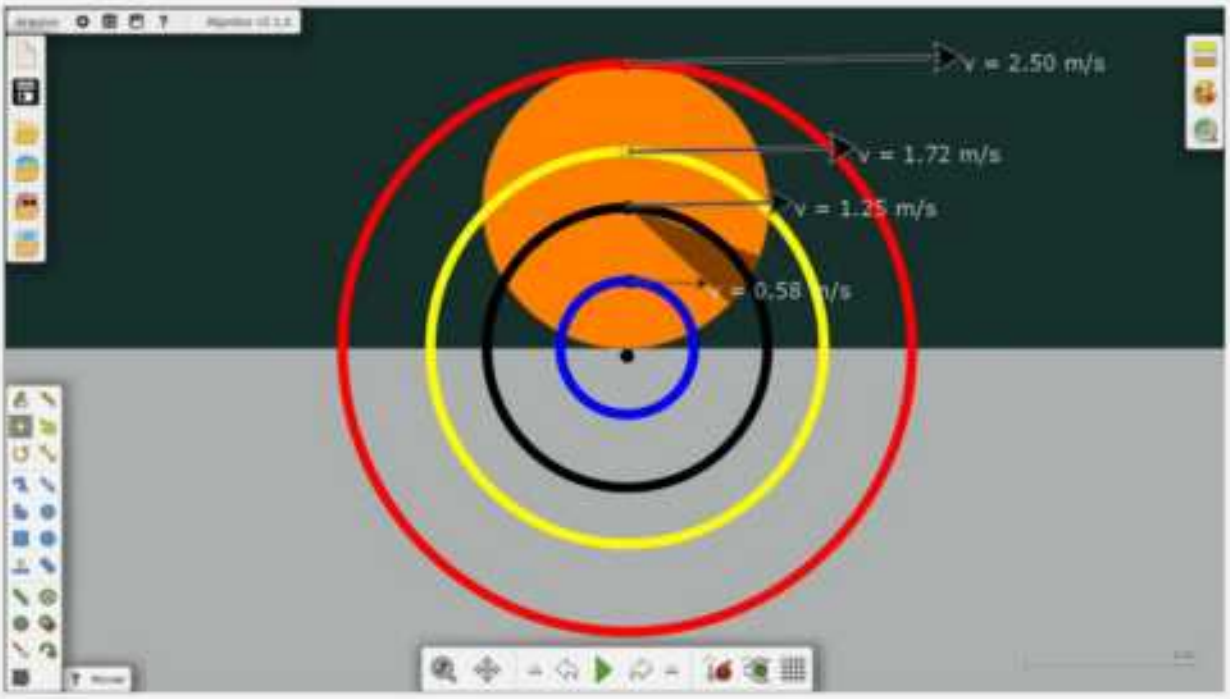


Figura 7.09: Captura de tela do *software Algodoo*: rolamento como uma rotação pura.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264518* .

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em: *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

Como já vimos, o movimento de rolamento é a combinação dos movimentos individuais de rotação e translação. A **Figura 7.10** e a **Figura 7.11** mostram as simulações desses movimentos individuais e suas características. Na **Figura 7.10**, há apenas o movimento de translação, em que podemos observar que a velocidade angular em todos os pontos do corpo é nula (deslizamento total), enquanto a velocidade linear é constante para qualquer ponto.

Já a **Figura 7.11**, reforça a ideia de que em um movimento de rotação pura, a velocidade angular é constante em todos os pontos do corpo e as velocidades lineares em pontos opostos são simétricas, ou seja, possuem o mesmo módulo e direção, mas sentidos opostos. Também é importante lembrar que nesse tipo de movimento o módulo da velocidade linear varia de acordo com a distância do ponto a ser analisado com o eixo fixo de rotação.

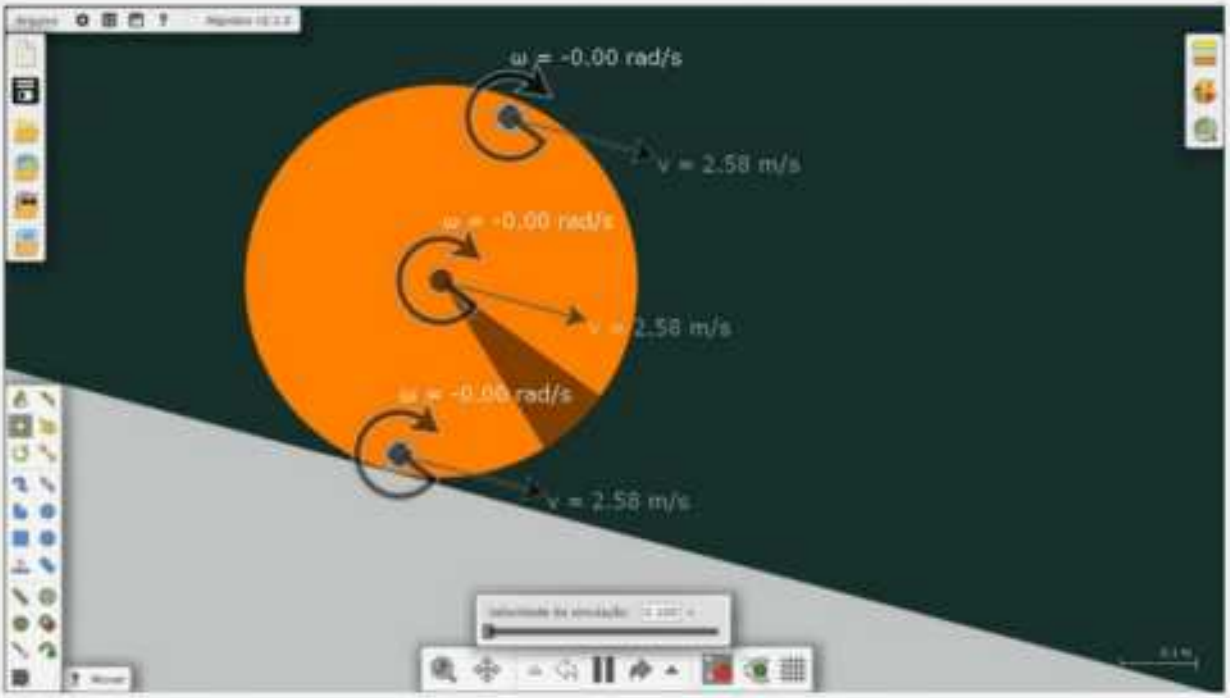


Figura 7.10: Captura de tela do *software Algodoo*: movimento de translação pura.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264540*.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

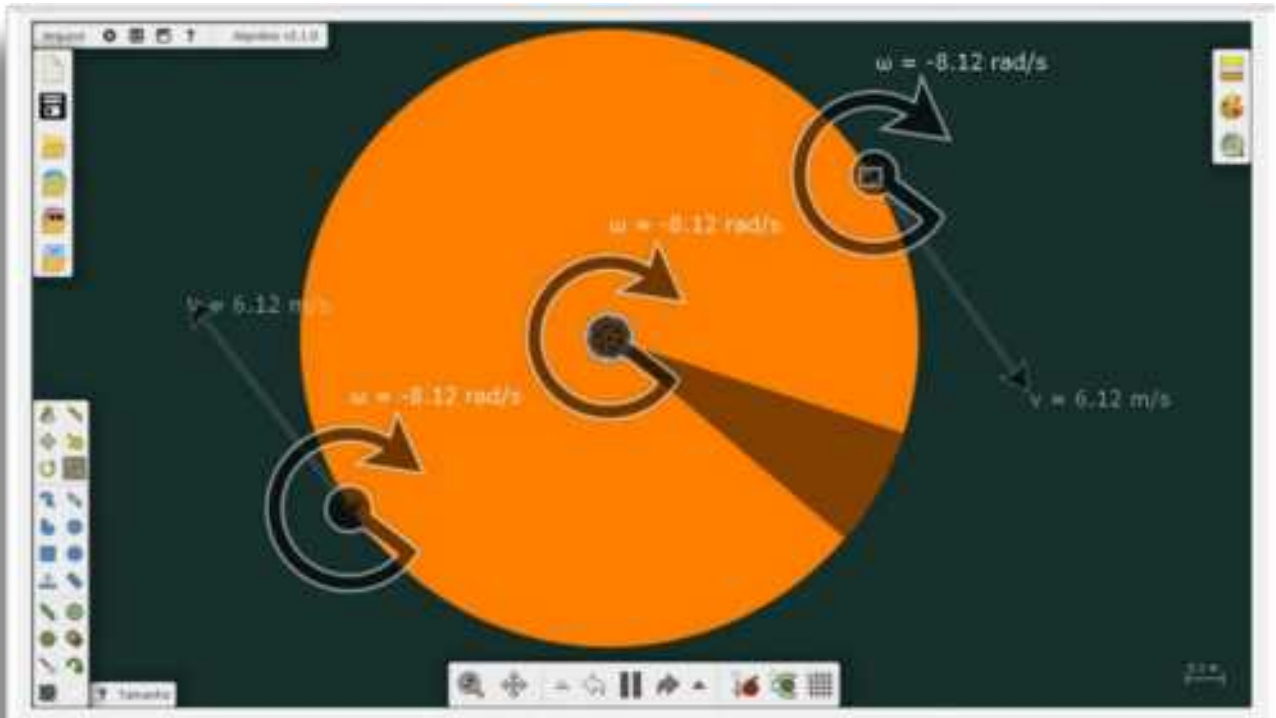


Figura 7.11: Captura de tela do *software Algodoo*: rotação pura com velocidades angulares constantes e velocidades lineares simétricas.
Fonte: o autor.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264541*.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

Clique no *link https://youtu.be/rj3gIA2DJ9s* ou escaneie o *QR code* ao lado para assistir ao vídeo do tutorial das animações.

TAREFA PROPOSTA 7.0

Uma roda homogênea de 40 *cm* de raio R está em movimento de rolamento suave (sem deslizamento) com velocidade angular constante e frequência de giro de 4 *Hz*, conforme a **Figura 7.12** abaixo.

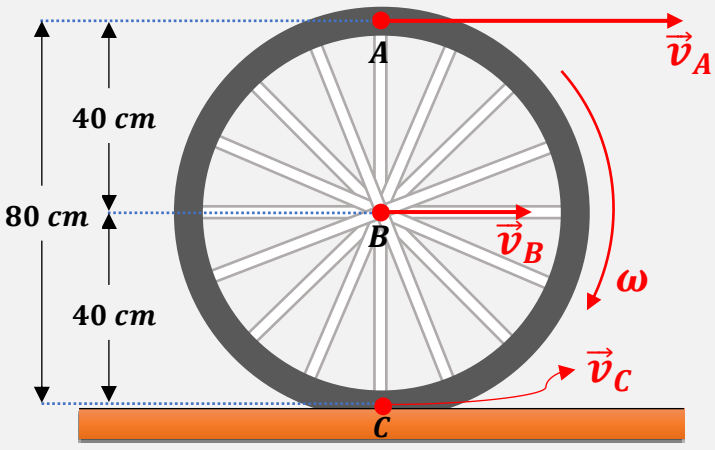


Figura 7.12: Tarefa Proposta 7.0 – Roda de raio 40 *cm* descrevendo um movimento de rolamento.

Utilize a **Tabela 7.01** a seguir, que contém os dados deste problema, e calcule as velocidades angulares, além das velocidades lineares para os pontos **A**, **B** e **C**. Não deixe de observar que o ponto **A**"está localizado na extremidade superior da roda, bem como o ponto **B** está no centro de massa, além do ponto **C** estabelecer contato entre a roda e o solo.

Dica: utilize o fato de o movimento de rolamento poder ser calculado como um movimento de rotação pura.

CÁLCULO DO ROLAMENTO COMO ROTAÇÃO PURA				
Ponto	Distância para o ponto C (Contato com o solo)	Frequência (*Hz*)	Velocidade Angular *(rad/s)* $(\omega = 2\pi f)$	Velocidade Linear (*m/s*) $(v = 2\pi r f)$
A	$2R$	0,5		
B	R	0,5		
C	0	0,5		

Tabela 7.01: Tarefa Proposta 7.0 – Dados para cálculo das velocidades angulares e lineares de três pontos distintos de uma roda em movimento de rolagem.

Depois dos cálculos, você deve perceber que, por possuir frequência de giro constante, as velocidades angulares de todos os pontos são iguais e a velocidade linear do ponto A tem o dobro da velocidade linear do ponto B, além da velocidade do ponto C ser nula.

Em seguida, clique **AQUI** para conferir a simulação que constam os resultados.

E aí, acertou?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

7.01 – A **Figura 7.13** a seguir mostra uma roda homogênea de raio $R = 30\ cm$ em movimento de rolagem com velocidade angular constante. Considere a frequência de giro da roda igual $2\ Hz$, $\pi = 3{,}14$ e calcule a velocidade angular da roda, além da velocidade linear para os pontos **A**, **B** e **C** da imagem.

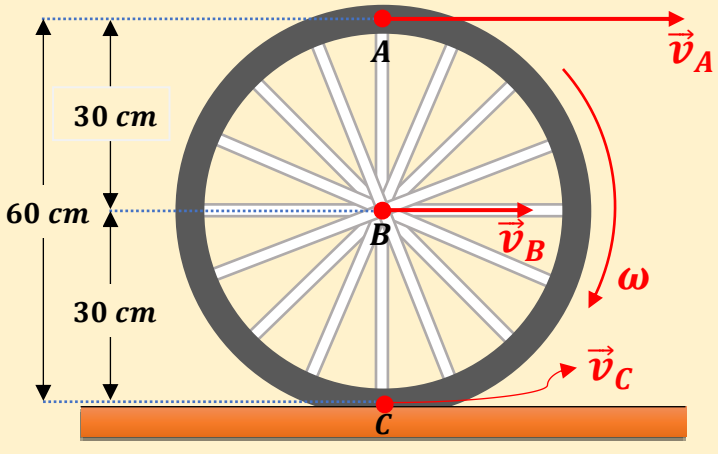


Figura 7.13: Exercício Resolvido 7.01 – Roda homogênea de raio 30 *cm* descrevendo um movimento de rolamento.

Solução: Para calcular a velocidade angular em de cada ponto, vamos utilizar a **Equação 2.06**:

$$\omega = 2\pi f$$

Para o ponto **A**, temos:

$$\omega_A = 2\pi f_A$$

Substituindo os dados:

$$\omega_A = 2\,.\,3{,}14\,.\,2$$

$$\boxed{\omega_A = 12.56\ rad/s}$$

Como visto, essa velocidade angular é constante para todos os pontos do corpo. Basta observar que a velocidade angular, de acordo com a **Equação 2.06**, depende da frequência e, como as frequências nos três pontos são iguais, as velocidades angulares nos pontos **B** e **C** também são as mesmas do ponto **A**. Logo:

$$\boxed{\omega_A = \omega_B = \omega_C = 12.56\ rad/s}$$

Portanto, as velocidades angulares para todos os pontos da roda são constantes e iguais a $12.56\ rad/s$.

Para calcular as velocidades lineares nos pontos em questão, podemos calcular a velocidade do centro de massa, que corresponde ao ponto **B** e, em seguida, calcular dos outros dois pontos. Podemos também usar o conceito de rolamento como rotação pura. Vamos calcular primeiro usando esse último conceito. Para isso, vamos fazer uso da **Equação 2.03**, lembrando que o (r) dessa equação corresponde à distância do ponto onde se deseja calcular a velocidade ao ponto de contato da roda com o solo, que, no caso, é o ponto **C**:

Para o ponto **A**:

$$v_A = 2\pi r_A f_A$$

Sendo $r_A = 2R$ - $R = 30\ cm = 0{,}3\ m$ - $f_A = 2\ Hz$:

$$v_A = 4\pi R f_A$$

Substituindo os dados:

$$v_A = 4\,.\,3{,}14\,.\,0{,}3\,.\,2$$

$$\boxed{v_A = 7{,}54\ m/s}$$

Para o ponto **B**, temos que $r_B = R$ - $R = 30\ cm = 0{,}3\ m$ - $f_B = 2\ Hz$. Logo:

$$v_B = 2\pi r_B f_B$$

$$v_B = 2\pi R f_B$$

$$v_B = 2\,.\,3{,}14\,.\,0{,}3\,.\,2$$

$$v_B = 2\,.\,3{,}14\,.\,0{,}3\,.\,2$$

$$\boxed{v_B = 3{,}77\ m/s}$$

Para o ponto **C**, não há distância para o ponto de contato da roda com o solo, visto que esse é o próprio ponto de contato. Logo:

$$v_c = 2\pi r_c f_c$$

$$v_c = 2\,.\,3{,}14\,.\,0\,.\,2$$

$$\boxed{v_c = 0}$$

Usando **a Equação 7.02**:

$$V_{CM} = \omega R$$

Substituindo os dados:

$$V_{CM} = 12{,}56\,.\,0{,}3$$

$$\boxed{V_{CM} = 3{,}77\ m/s}$$

O Ponto **B** está no centro de massa da roda, logo:

$$\boxed{v_B = V_{CM} = 3{,}77\ m/s}$$

O ponto **A** está na extremidade superior da roda, logo:

$$\boxed{v_A = 2V_{CM} = 2\,.\,3{,}77 = 7{,}54\ m/s}$$

No ponto **C**, a velocidade é nula por se tratar do ponto de contato entre a roda e o solo em um movimento de rolagem.

Portanto, todos os cálculos para as intensidades das velocidades lineares nos três pontos foram os mesmos para os dois casos e seus valores para os pontos **A**, **B** e **C** são, respectivamente, iguais a $7{,}54\ m/s$, $3{,}77\ m/s$ e 0.

7.02 – Uma roda homogênea, de raio igual a 25 *cm,* está em movimento de rolamento suave com velocidade angular constante de 15 *rad/s*. Determine o módulo da sua velocidade do centro de massa, além das suas velocidades das extremidades superior e inferior.

Solução: Para calcular a intensidade da velocidade do centro de massa, usaremos a **Equação 7.02**:

$$V_{CM} = \omega R$$

Substituindo os dados na questão:

$$V_{CM} = 15\,.\,0{,}25$$

$$\boxed{V_{CM} = 3{,}75\ m/s}$$

Para a extremidade superior, temos que:

$$v_{superior} = 2V_{CM}$$

$$v_{superior} = 2\,.\,3{,}75$$

$$\boxed{v_{superior} = 7{,}5\ m/s}$$

A extremidade inferior corresponde ao ponto de contato da roda com a superfície na qual ela está deslocando-se. Assim, sua a velocidade neste ponto é zero.

Portanto, os módulos das velocidades do centro de massa, da extremidade superior e o da inferior da roda são, respectivamente, iguais a $3{,}75\ m/s$, $7{,}5\ m/s$ e 0.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7.01 – A **Figura 7.14** a seguir mostra uma roda homogênea de raio $R = 50\ cm$ em movimento de rolagem com velocidade angular constante. Considere a frequência de giro da roda igual 1,5 *Hz*, $\pi = 3{,}14$ e calcule a velocidade angular da roda, além da velocidade linear para os pontos **A**, **B** e **C** da imagem.

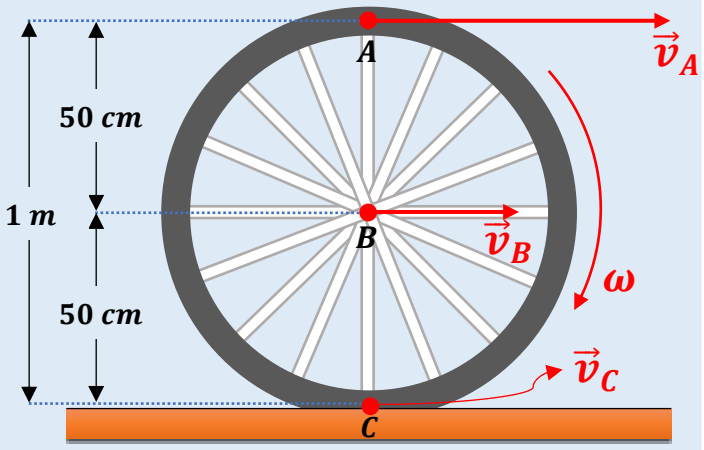


Figura 7.14: Exercício Proposto 7.01 – Roda homogênea de raio 50 cm descrevendo um movimento de rolamento.

7.02 – Uma roda homogênea, de raio igual a 28 *cm,* está em movimento de rolamento suave com velocidade angular constante de 20 *rad/s*. Determine o módulo da sua velocidade do centro de massa, além das suas velocidades das extremidades superior e inferior.

Saiba mais...

A distância percorrida por um objeto circular com densidade constante, como uma roda homogênea, por exemplo, em um movimento de rolamento é igual ao arco descrito pelo seu movimento de giro. Assim, podemos estabelecer a relação entre o arco e o ângulo de giro:

$$s = \theta R$$

A velocidade linear do centro de massa V_{CM} da roda é obtida derivando-se s em relação ao tempo, ao passo que para se obter a velocidade angular em qualquer ponto do corpo, é preciso derivar o ângulo de giro θ também em relação ao tempo. Assim:

$$\overset{V_{CM}}{\frac{ds}{dt}} = \overset{\omega}{\frac{d\theta}{dt}} R$$

$$\boxed{V_{CM} = \omega R}$$

REVISÃO

Rolamento

O que é Rolamento

Quando um corpo está, ao mesmo tempo, descrevendo os movimentos de **translação** e **rotação**, ele está descrevendo um movimento de **rolamento.**

Quando não há deslizamento no movimento de rolagem, chamamos esse movimento de **rolamento suave**.

Rolamento: uma combinação de Translação e Rotação

A combinação dos movimentos individuais de rotação (**rotação pura**) com o movimento de translação (**translação pura**) resulta no movimento de **rolamento**.

Nesse tipo de movimento, a distância percorrida por uma roda, por exemplo, tem a mesma medida que o arco de circunferência descrito por ela no mesmo intervalo de tempo. Esse arco de circunferência é dado por:

$$s = \theta R \ (m) \qquad (7.01)$$

- s – arco de circunferência da trajetória;
- θ – ângulo de giro da roda;
- R – raio da roda.

Como as medidas das da distância e do arco descritos são iguais, podemos relacioná-los e calcular a velocidade do centro de massa da roda por meio da seguinte equação:

$$V_{CM} = \omega R \quad (m/s) \qquad (7.02)$$

- V_{CM} – velocidade do centro de massa da roda;
- ω – velocidade angular da roda;
- R – raio da roda.

É importante observar que, no movimento de rolamento suave, a velocidades angular ω, em qualquer ponto da roda (ou de um corpo em rolamento) é constante:

$$\omega = constante$$

A velocidade linear tem valores distintos para distâncias diferentes em relação ao centro da roda, sendo a velocidade linear da sua extremidade superior dada por:

$$\vec{v}_{superior} = 2\vec{V}_{CM}$$

- $\vec{v}_{superior}$ – velocidade da extremidade superior da roda;
- $\vec{V}_{CM}$ – velocidade do centro de massa da roda.

Já para a extremidade inferior (contato com o solo), a velocidade linear é nula:

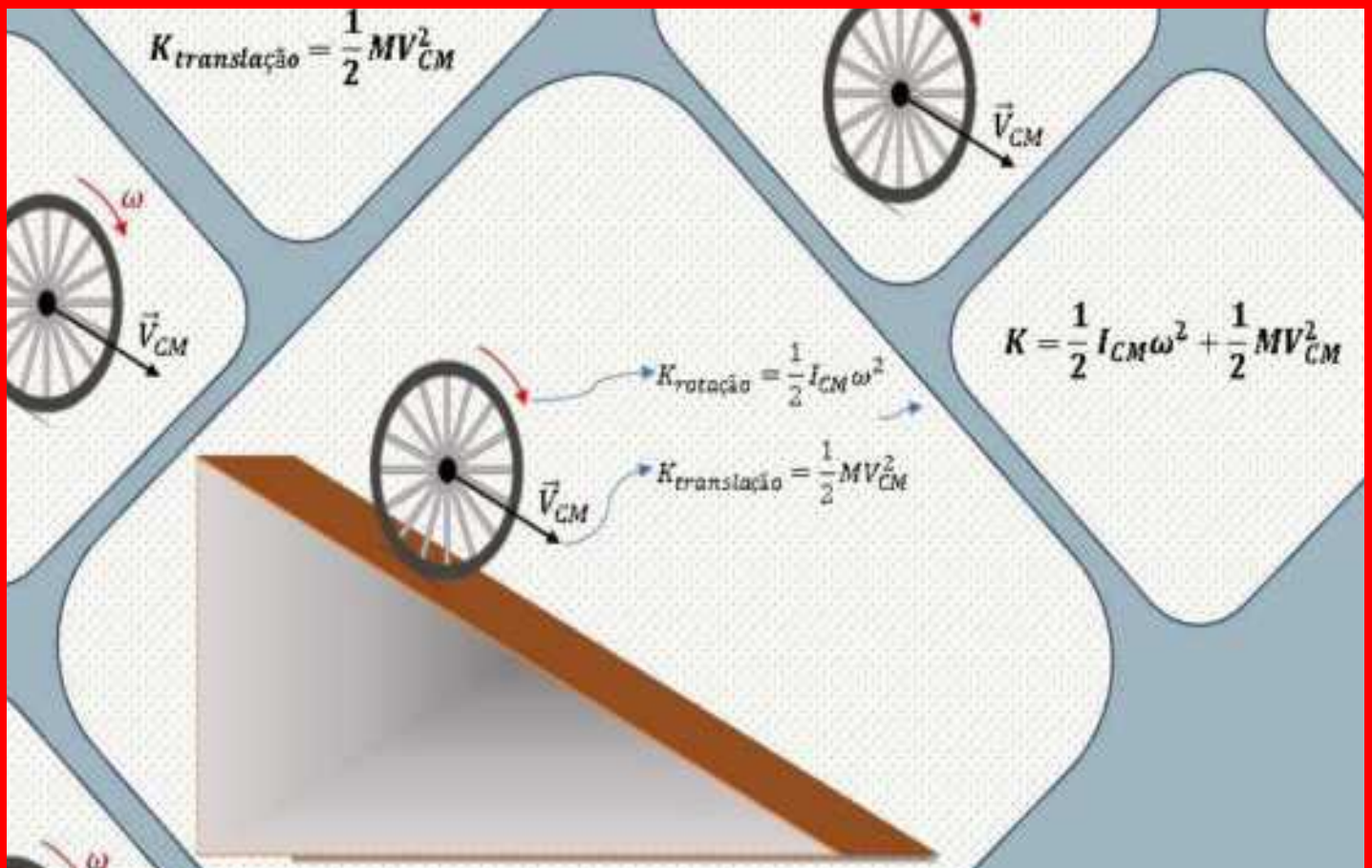
$$\vec{v}_{inferior} = \vec{0}$$

Rolamento como uma Rotação Pura

Os resultados acima referentes aos valores das velocidades lineares em pontos distintos de um corpo rígido em rolamento podem ser obtidos tratando o movimento de rolamento como se fosse um movimento de **rotação pura**, considerando o ponto de contato entre o corpo e a superfície como se fosse o eixo de rotação (veja a **Figura 7.06**).

$$K_{translação} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$



$$K_{rotação} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

CAPÍTULO 8

ENERGIA CINÉTICA DE ROLAMENTO

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Definir Energia Cinética de Rolamento como a combinação das energias cinéticas de rotação e translação.
- ✓ Demonstrar a equação para cálculo da Energia Cinética de Rolamento por meio do Teorema dos Eixos Paralelos.
- ✓ Usar o *software* de simulação Física *Algodoo* como extensão do aprendizado do capítulo.

Capítulo 8 Energia Cinética de Rolamento

A **energia cinética de rolamento** de um corpo corresponde à soma das suas energias cinéticas de rotação e de translação, pois já sabemos que o movimento de rolagem é a combinação desses dois tipos de movimentos.

Para calcular a energia cinética de rolamento, vamos considerar o movimento de rolagem de uma roda homogênea em relação a um observador estacionário. Encarando o movimento dessa roda como o de uma rotação pura em torno de um eixo que passa pelo ponto **B** da **Figura 7.06**, o qual não representa o seu centro de massa, a sua energia cinética é calculada de acordo com a **Equação 4.02**:

$$K = \frac{1}{2} I_B \omega^2$$

em que I_B é o momento de inércia da roda em relação ao eixo que passa pelo ponto **B** e ω, a velocidade angular da roda.

Para calcular o momento de inércia de qualquer ponto de um corpo, nesse caso o da roda, basta sabermos o momento de inercia desse corpo em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa por meio do Teorema dos Eixos paralelos (**Equação 4.03**):

$$I_B = I_{CM} + Mh^2$$

sendo I_{CM} o momento de inércia da roda em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa, M a massa da roda e h a distância perpendicular entre os dois eixos (o que passa pelo centro de massa e o que passa pelo ponto ***P***), que, para a roda, representa a medida do seu raio R.

$$I_B = I_{CM} + MR^2$$

Substituindo I_B na equação da energia cinética de rotação:

$$K = \frac{1}{2}(I_{CM} + MR^2)\omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} MR^2\omega^2$$

De acordo com a **Equação 7.02**, $V_{CM} = \omega R$. Logo:

$$K = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} M \underbrace{\omega R}_{V_{CM}} \cdot \underbrace{\omega R}_{V_{CM}} \rightarrow V_{CM}^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2 \quad (J) \qquad (8.01)$$

- K – energia cinética de rolamento;
- I_{CM} – momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de massa;
- ω – velocidade angular;
- M – massa do corpo;
- V_{CM} – velocidade do centro de massa.

Para a roda, podemos interpretar a **Equação 8.01** como $\frac{1}{2} \boldsymbol{I_{CM} \omega^2}$ sendo a sua energia cinética associada ao seu movimento de rotação em torno do eixo que passa pelo seu centro de massa (**Figura 7.04(a)**), e o termo $\frac{1}{2} \boldsymbol{M V_{CM}^2}$ como a energia cinética associada ao movimento de translação do centro de massa da roda (**Figura 7.04(b)**).

IMPORTANTE

Um corpo em movimento de rolamento possui dois tipos de energias cinéticas: uma associada ao movimento de rotação $\left(\frac{1}{2} \boldsymbol{I_{CM} \omega^2}\right)$ em torno do eixo que passa pelo centro de massa e uma associada ao movimento de translação do centro de massa $\left(\frac{1}{2} \boldsymbol{M V_{CM}^2}\right)$.

A **Figura 8.01** a seguir ilustra uma roda homogênea com velocidade angular ω e velocidade do seu centro de massa $\vec{V}_{CM}$ descendo uma rampa. Associada a essas velocidades, temos as energias cinéticas de rotação e translação correspondentes, resultando na sua energia cinética de rolamento.

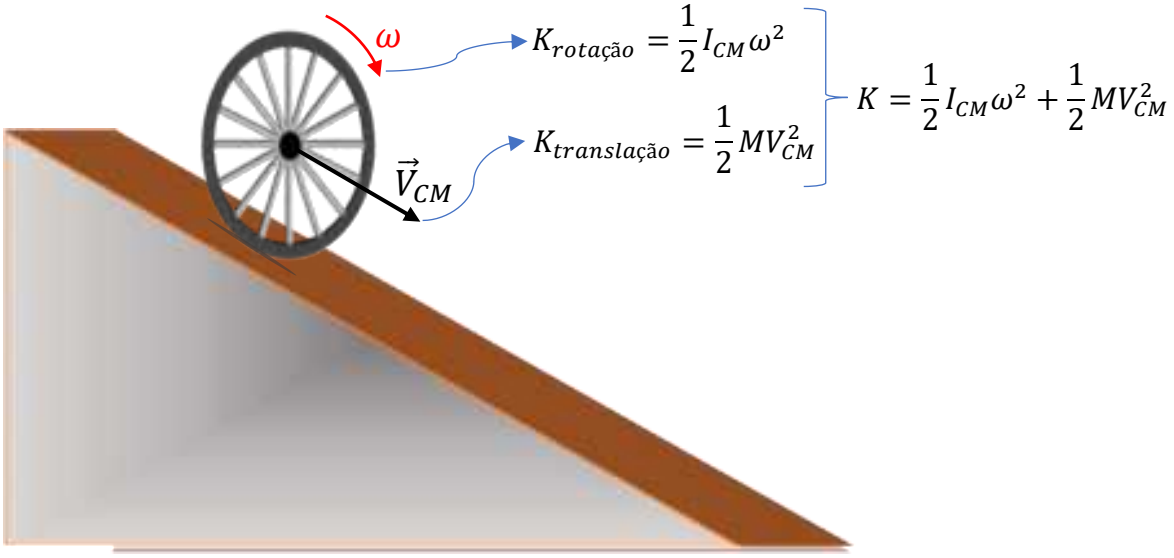


Figura 8.01: Roda homogênea descrevendo um movimento de rolamento em um plano inclinado, com energia cinética de rotação $K_{rotação} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$, energia cinética de translação $K_{translação} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2$ e energia cinética de rolamento $K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$ sendo a soma das duas primeiras.

USANDO O *ALGODOO* 8.0

A **Figura 8.02** abaixo mostra a simulação de um ônibus em MRU.

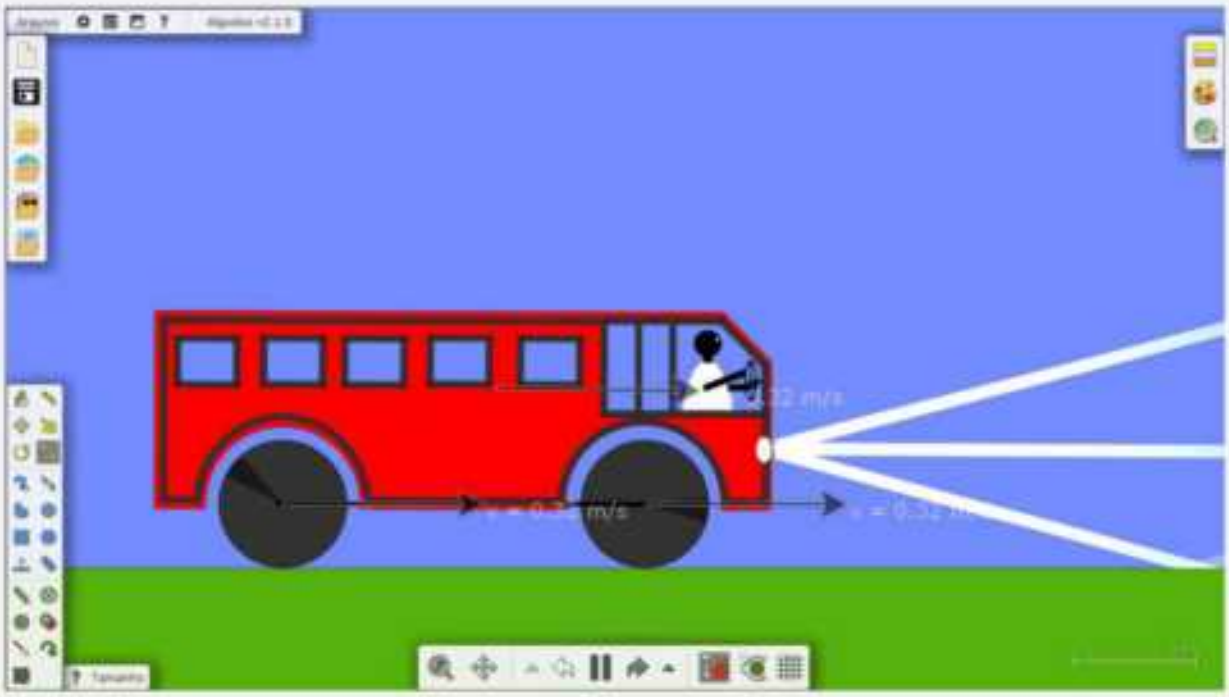


Figura 8.02: Captura de tela do *software Algodoo*: Ônibus em movimento retilíneo uniforme (MRU) com rodas em movimento de rolagem.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264563*.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

Clique no *link https://youtu.be/oTs1tM5xmzE* ou escaneie o *QR code* ao lado para assistir ao vídeo do tutorial da animação.

Na **Figura 8.02**, a velocidade linear escalar do ônibus é a mesma da velocidade do centro de massa da roda, pois a roda é homogênea e tem seu centro de massa no seu centro geométrico. A roda também possui energia cinética de rotação, sendo sua energia cinética de rolamento podendo ser calculada por meio da **Equação 8.01**.

TAREFA PROPOSTA 8.0

Vamos utilizar a **Figura 8.02** para esta tarefa. Vamos calcular a energia cinética de rolamento de uma das rodas do ônibus (as duas são idênticas e possuem a mesma energia cinética de rolamento). Para isso, considere os dados da **Tabela 8.01** a seguir para calcular o momento de inércia que passa pelo centro de massa da roda:

$m\ (kg)$	$R\ (m)$	$I_{CM} = \frac{1}{2}mR^2\ (kg.m^2)$
1,5	0,5	

Tabela 8.01: Tabela para calcular o momento de inércia de uma roda homogênea da Tarefa Proposta 8.0.

Agora, use $\pi = 3{,}14$ e calcule a velocidade angular da roda usando a **Tabela 8.02** abaixo (lembre-se de que o movimento em sentido horário corresponde a uma velocidade angular negativa):

$f\ (Hz)$	$\omega = 2\pi f\ (rad/s)$
0,1	

Tabela 8.02: Tabela para calcular a velocidade angular da roda homogênea da Tarefa Proposta 8.0.

Calcule, agora, a velocidade do centro de massa da roda, considerando, novamente, $\pi = 3{,}14$ e utilizando os dados da **Tabela 8.03** a seguir:

$\omega\ (rad/s)$	$R\ (m)$	$V_{CM} = \omega R\ (m/s)$
	0,5	

Tabela 8.03: Tabela para calcular a velocidade do centro de massa da roda homogênea da Tarefa Proposta 8.0.

Por fim, utilize os dados encontrados nas tabelas anteriores e calcule a energia cinética de rolamento da roda de acordo com os dados da **Tabela 8.04**:

$I_{CM}\ (kg.m^2)$	$\omega\ (rad/s)$	M (kg)	$V_{CM}\ (m/s)$	$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}MV_{CM}^2\ (J)$
		1,5		

Tabela 8.04: Tabela para calcular a energia cinética de rolamento da roda homogênea da Tarefa Proposta 8.0.

Em seguida, clique **AQUI** para verificar a simulação com os resultados para cada disco.

E aí, acertou!?

Não esqueça de que, para verificar as informações de energia cinética linear, angular e total, é necessário clicar com o botão direito do *mouse* sobre o objeto e ir até a guia "***Informações***" no aplicativo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

8.01 – Um veículo está em movimento retilíneo uniforme com velocidade linear escalar de 20 *m/s*. Suas rodas, homogêneas e idênticas, cada uma com massa $M = 10\ kg$ e raio $R = 25\ cm$, por consequência do movimento linear do veículo, possuem velocidade angular constante e seus momentos de inércia podem ser calculados por meio da equação $\left(I = \frac{1}{2}MR^2\right)$, em que M é a massa da roda e R, o seu raio. De acordo com o enunciado, determine, para uma das rodas do veículo:

a) a sua velocidade do centro de massa;

b) a sua velocidade angular;

c) o seu momento de inércia;

d) a sua energia cinética de rotação;

e) a sua energia cinética de translação;

f) a sua energia cinética de rolamento.

Solução:

a) Como o veículo encontra-se em MRU, sua velocidade escalar linear é a mesma da velocidade do centro de massa da roda, uma vez que esse ponto se encontra no seu eixo de rotação, localizado no seu centro geométrico. Logo:

$$\boxed{V_{CM} = 20\ m/s}$$

b) Para calcular a velocidade angular da roda, vamos usar a **Equação 7.02**:

$$V_{CM} = \omega R$$

$$\omega = \frac{V_{CM}}{R}$$

Substituindo os dados e sabendo que $25\ cm = 0{,}25\ m$:

$$\omega = \frac{20}{0{,}25}$$

$$\omega = \frac{20}{0{,}25}$$

$$\boxed{\omega = 80\ rad/s}$$

c) Sabendo que o eixo de giro da roda do veículo passa pelo seu centro de massa, localizado no seu centro geométrico, podemos usar a equação dada no problema para calcular o seu momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de massa:

$$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$$

Substituindo os dados:

$$I_{CM} = \frac{1}{2} . 8 . 0{,}25^2$$

$$I_{CM} = \frac{1}{2} . 10 . 0{,}25^2$$

$$I_{CM} = 5 . 0{,}0625$$

$$\boxed{I_{CM} = 0{,}3125\ kg.m^2}$$

d) Para calcular a energia cinética de rotação, usaremos a parte da **Equação 8.01**, associada a esse tipo de movimento, visto que a roda está em movimento de rolamento e essa energia faz parte da sua composição.

$$K_{Rotação} = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

Substituindo os dados:

$$K_{rotação} = \frac{1}{2} . 0{,}3125 . 80^2$$

$$K_{rotação} = \frac{1}{2} . 0{,}3125 . 6400$$

$$K_{rotação} = 0{,}3125 . 3200$$

$$K_{rotação} = 0{,}3125 . 3200$$

$$\boxed{K_{rotação} = 1000\ J}$$

e) Para calcular a energia cinética de translação, vamos usar a outra parte da **Equação 8.01**, associada a esse movimento:

$$K_{translação} = \frac{1}{2}MV_{CM}^2$$

Substituindo os dados:

$$K_{translação} = \frac{1}{2} . 10 . 20^2$$

$$K_{translação} = 5 . 400$$

$$\boxed{K_{translação} = 2000\, J}$$

f) Para calcular a energia cinética de rolamento, basta usar a **Equação 8.01** ou, simplesmente, somar as energias cinéticas de rotação e translação calculadas nos itens "d" e "e":

$$K = K_{rotação} + K_{translação}$$

$$K = 1000 + 2000$$

$$\boxed{K = 3000\, J}$$

Portanto, de acordo com todos os valores dados e calculados no problema, chegamos à conclusão de que a energia cinética de rolamento da roda do veículo é de 3000 *J*.

EXERCÍCIO PROPOSTO

8.01 – Um carro está em movimento retilíneo uniforme com velocidade linear escalar de 15 *m/s*. Suas rodas, homogêneas e idênticas, cada uma com massa $M = 8\, kg$ e raio $R = 20\, cm$, por consequência do movimento linear do veículo, possuem velocidade angular constante. De acordo com o enunciado, determine, para uma das rodas do veículo:

Use $\left(I = \frac{1}{2} MR^2\right)$ para calcular o momento de inércia da roda.

a) a sua velocidade do centro de massa;

b) a sua velocidade angular;

c) o seu momento de inércia;

d) a sua energia cinética de rotação;

e) a sua energia cinética de translação;

f) a sua energia cinética de rolamento.

REVISÃO

Energia Cinética de Rolamento

A **energia cinética de rolamento** de um corpo corresponde à soma das suas energias cinéticas associadas à rotação e à translação, pois o movimento de rolagem é a combinação desses dois tipos de movimentos.

A energia cinética de rotação é dada por:

$$K_{rotação} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \quad (J)$$

E a energia cinética de translação é expressa da seguinte forma:

$$K_{translação} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 \quad (J)$$

Sendo a energia cinética de rolamento a soma dessas duas:

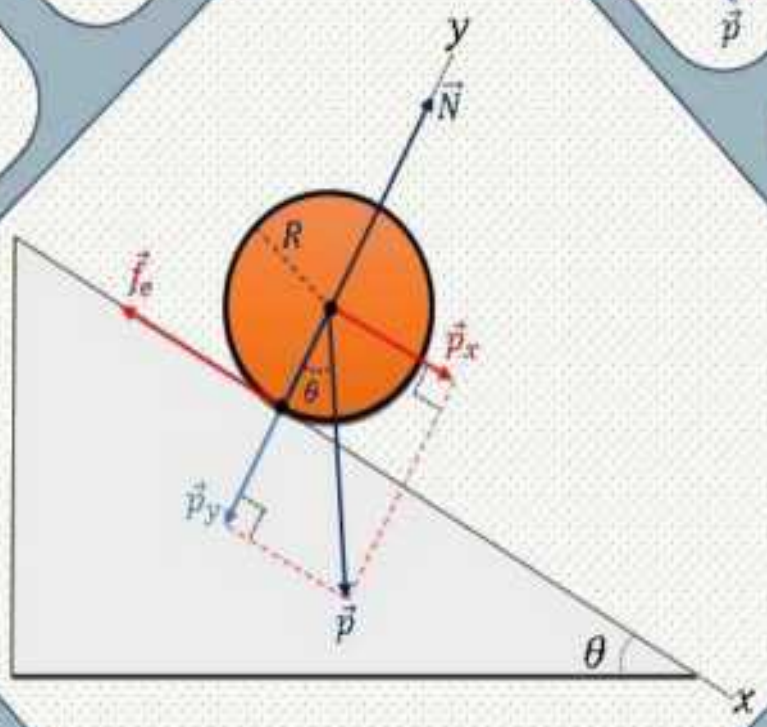
$$K = K_{rotação} + K_{translação}$$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2 \quad (J) \qquad (8.01)$$

- K – energia cinética de rolamento;
- I_{CM} – momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de massa;
- ω – velocidade angular;
- M – massa do corpo;
- V_{CM} – velocidade do centro de massa.

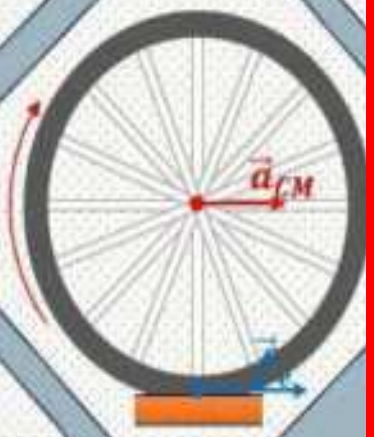
:

$$a_{CM} = \frac{g sen\theta}{1 + I_{CM}/MR^2}$$













$$a_{CM} = \frac{g sen\theta}{1 + I_{CM}/MR^2}$$

CAPÍTULO 9

AS FORÇAS DE ROLAMENTO

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Mostrar quais as forças que atuam em um objeto redondo em rolamento.
- ✓ Ilustrar as forças de rolamento que atuam em um objeto redondo descendo em um plano inclinado.
- ✓ Demonstrar a equação para se calcular a aceleração do centro de massa de um corpo redondo descendo uma rampa.
- ✓ Usar o *software* de simulação Física *Algodoo* como extensão do aprendizado do capítulo.

Capítulo 9 As Forças de Rolamento

Até agora, estudamos apenas as variáveis relacionadas ao movimento de rolamento sem considerar as forças que interferem na tendência de haver deslizamento. Neste capítulo, vamos verificar algumas situações e observar quais são as forças contidas no movimento de rolagem.

9.1 – Atrito e Rolamento

Quando uma roda se move aceleradamente, ela está sujeita a uma **força de atrito** no ponto em contato com o solo. A aceleração a qual a roda está submetida é devido a uma força que age sobre ela para aumentar ou diminuir a sua velocidade. Essa aceleração é chamada de **aceleração do centro de massa** $\vec{a}_{CM}$, e tem a mesma direção do movimento.

Essa força também produz uma aceleração angular α, fazendo a roda girar mais rápido ou mais lentamente, criando uma tendência de deslizamento no ponto de contato com o solo, o que não aconteceria se a velocidade da roda fosse constante, como mostrado na **Figura 7.03**.

A força que age sobre a roda para se opor a essa tendência de deslizamento é a **força de atrito**.

A **Figura 9.01** a seguir mostra uma roda em movimento horizontal de rolagem aceleradamente sem deslizar.

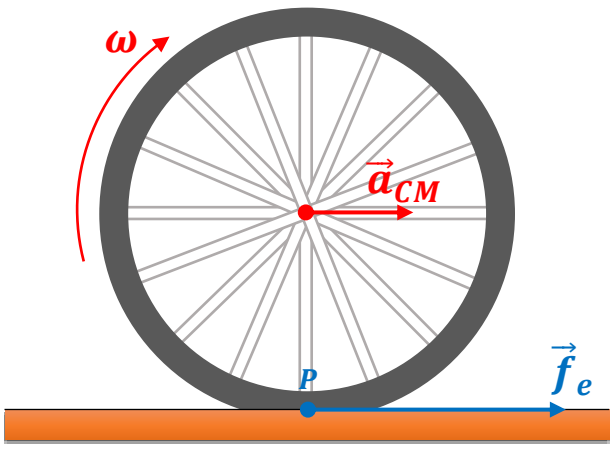


Figura 9.01: Roda em movimento retilíneo acelerado com movimento de rolamento sem sofrer deslizamento.

Na **Figura 9.01**, a roda não desliza e, portanto, seu movimento é de rolamento suave e a **força de atrito é estático** $\vec{f}_e$. Para uma força constante, temos também uma aceleração do centro de massa constante. Assim, a aceleração do centro de massa da roda é análoga à

componente tangencial da aceleração (**Equação 2.09**) que age sobre a roda, uma vez que todos os pontos de um corpo em movimento de translação possuem as mesmas características.

$$a_{CM} = \alpha r \quad (m/s^2) \qquad (9.01)$$

- a_{CM} – aceleração do centro de massa da roda;
- α – aceleração angular da roda;
- R – raio da roda;

Se houver deslizamento no ponto P, a força de atrito será a **força de atrito cinético** $\vec{f}_c$. Nesse caso, a **Equação 9.01** não poderá ser usada, pois não se trata de um movimento de rolamento suave.

Se o movimento da roda da **Figura 9.01** fosse de frenagem, tanto a aceleração do centro de massa $\vec{a}_{CM}$ quanto a força de atrito estático $\vec{f}_e$ teriam sentidos opostos aos mostrados na figura.

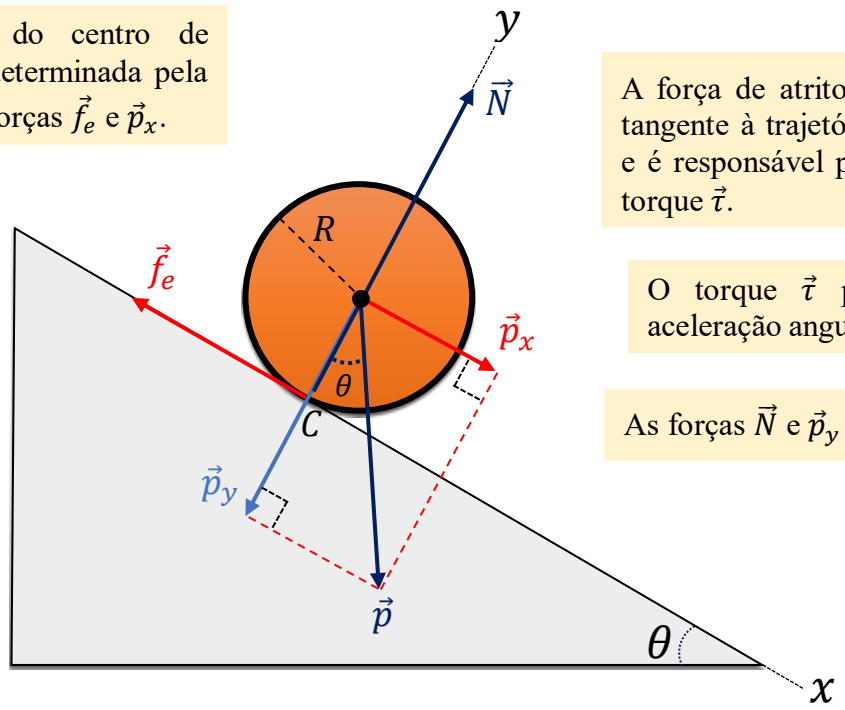
9.2 – Rolamento no Plano Inclinado

Considere um corpo redondo, homogêneo (densidade constante), de massa M e raio R, descrevendo um movimento de rolamento suave ao longo de um eixo x de uma rampa inclinada, formando um ângulo θ com o solo, conforme mostra a **Figura 9.02** a seguir.

A aceleração do centro de massa $\vec{a}_{CM}$ é determinada pela resultante das forças $\vec{f}_e$ e $\vec{p}_x$.

$p_x = psen\theta$

$p_y = psen\theta$



A força de atrito estático $\vec{f}_e$ é tangente à trajetória de rotação e é responsável por produzir o torque $\vec{\tau}$.

O torque $\vec{\tau}$ produz uma aceleração angular do corpo.

As forças $\vec{N}$ e $\vec{p}_y$ se equilibram.

Figura 9.02: Corpo redondo em rolamento suave ao longo de um plano inclinado que forma um ângulo θ com o plano horizontal.

As forças que agem sobre o corpo em rolamento suave da **Figura 9.02** são:

- A **força peso** $\vec{p}$ (força gravitacional) que atua sobre o corpo e tem sentido para baixo, sendo a origem desse vetor no centro de massa do corpo. Sua componente $\vec{p}_y$ tem mesmo módulo de $\vec{N}$, mas sentidos opostos e, por isso, se equilibram. Sua componente $\vec{p}_x$ tem a mesma direção da aceleração do centro de massa $\vec{a}_{CM}$ e da força de atrito estático $\vec{f}_e$.
- A **força normal** que é ortogonal à superfície de contato com o corpo (rampa) e atua nesse ponto de contato (***C***).
- A **força de atrito estático** $\vec{f}_e$ que atua no ponto de contato entre o corpo e a superfície e se opõe à tendência do deslizamento.

Vamos fazer uma representação das forças no plano cartesiano para podemos chegar à equação para cálculo do módulo da aceleração do centro de massa do corpo. Veja a **Figura 9.03** a seguir:

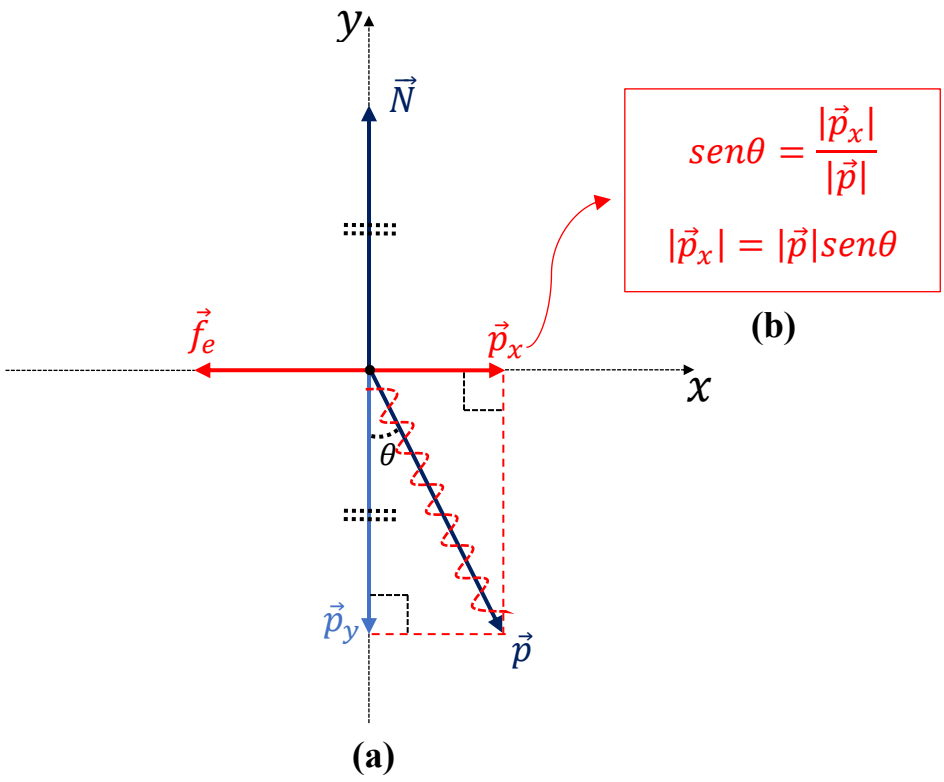


Figura 9.03: Representação das forças do corpo redondo da **Figura 9.02**. Em (a), todas as forças que atuam sobre o corpo. Em (b), o valor do módulo da componente x da força.

Pela **Figura 9.03**, observamos que as únicas forças que não se equilibram são as duas forças que atuam no eixo x: a força de atrito estático $\vec{f}_e$ e a componente x da força peso $\vec{p}_x$, que, de acordo com a **Figura 9.03(b)**, possui módulo $psen\theta$.

Pela segunda lei de Newton, a resultante das forças que atuam sobre um corpo corresponde ao produto de sua massa pela aceleração produzida por essa força:

$$\vec{F}_R = m\vec{a} \qquad (\text{I})$$

Para o movimento de rolamento do corpo redondo da **Figura 9.02**, não é correto afirmar que a força de atrito estático $\vec{f}_e$ é máximo, mas apenas dizer que ela é suficiente para que não haja deslizamento e que o corpo role suavemente. Como $\vec{f}_e$ está no eixo negativo de *x,* enquanto $\vec{p}_x$ está no positivo, vamos escrever o módulo da força resultante $\vec{F}_R$ da seguinte maneira:

$$p_x - f_e = Ma_{CM} \qquad (\text{II})$$

sendo M a massa do corpo redondo em movimento de rolamento para baixo da rampa e a_{CM} a sua aceleração do centro de massa.

A força responsável para produzir o torque e fazer o corpo girar em torno do eixo que passa pelo centro de massa é a força de atrito estático $\vec{f}_e$, pois haveria apenas deslizamento se ela não atuasse em um movimento acelerado. De acordo com a **Equação 5.02**:

$$\tau = rFsen\emptyset \qquad (\text{III})$$

sendo r o raio R da roda e F a intensidade da força de atrito estático f_e que age sobre ela. O ângulo $\emptyset$ é o ângulo formado entre R e F, que, nesse caso, vale 90º, sendo o $sen90° = 1$. Logo:

$$\tau = Rf_e \qquad (\text{IV})$$

Usando a forma angular para o módulo do torque resultante sobre um corpo (**Equação 5.05**), temos:

$$\tau_R = I_{CM}\alpha \qquad (\text{V})$$

Igualando as equações IV e V referentes ao torque:

$$I_{CM}\alpha = Rf_e$$

$$f_e = \frac{I_{CM}\alpha}{R} \qquad (\text{VI})$$

Substituindo VI em II:

$$p_x - \frac{I_{CM}\alpha}{R} = Ma_{CM} \qquad (\text{VII})$$

Em VII, $p_x = psen\theta = Mgsen\theta$ e, de acordo com a **Equação 9.01**, $a_{CM} = \alpha R$. Logo:

$$p_x = Mgsen\theta \qquad \text{(VIII)}$$

$$\alpha = \frac{a_{CM}}{R} \qquad \text{(IX)}$$

Substituindo VIII e IX em VII:

$$Mgsen\theta - \frac{I_{CM}}{R} \cdot \frac{a_{CM}}{R} = Ma_{CM}$$

$$Mgsen\theta - \frac{I_{CM} a_{CM}}{R^2} = Ma_{CM}$$

$$\frac{Mgsen\theta}{M} - \frac{I_{CM} a_{CM}}{MR^2} = \frac{Ma_{CM}}{M}$$

$$gsen\theta - \frac{I_{CM} a_{CM}}{MR^2} = a_{CM}$$

$$-\frac{I_{CM} a_{CM}}{MR^2} - a_{CM} = -gsen\theta$$

$$\frac{I_{CM} a_{CM}}{MR^2} + a_{CM} = gsen\theta$$

$$a_{CM}\left(\frac{I_{CM}}{MR^2} + 1\right) = gsen\theta$$

$$a_{CM} = \frac{gsen\theta}{\frac{I_{CM}}{MR^2} + 1}$$

$$a_{CM} = \frac{gsen\theta}{1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}}$$

$$a_{CM} = \frac{gsen\theta}{1 + I_{CM}/MR^2} \quad (m/s^2) \qquad (9.02)$$

- a_{CM} – módulo da aceleração do centro de massa do corpo redondo;
- g – módulo da aceleração da gravidade;
- θ – ângulo formado entre a horizontal e a inclinação da rampa;
- I_{CM} – momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de massa;
- M – massa do corpo;
- R – raio do corpo redondo.

Caso a força de atrito estático fosse máxima $(f_{máx})$, poderíamos usar a seguinte equação:

$$(f_e)_{máx} = \mu_e N \quad (N) \qquad (9.03)$$

De modo que depois do deslizamento:

$$f_c = \mu_c N \quad (N) \qquad (9.04)$$

- $(f_e)_{máx}$ – força de atrito estático máxima;
- μ_e – coeficiente de atrito estático da superfície;
- N – força de contato normal;
- f_c – força de atrito cinético;
- μ_c – coeficiente de atrito cinético da superfície.

A força de contato normal N depende da superfície de contato. Para planos horizontais, ela se equilibra com a força peso $\vec{p}$. No caso de um plano inclinado, ela se equilibra com a componente y do peso do corpo em que desce a rampa.

A partir do momento em que a força de atrito excede o seu máximo, o corpo em rolamento começa a deslizar e a força de atrito diminui, passando a ser cinético. Esse mesmo fenômeno ocorre quando uma caixa está em um plano inclinado e só começa a ser mover (deslizar) depois que a força resultante oposta à força de atrito excede o seu máximo.

Logicamente, o corpo redondo começa a descer uma rampa sem que seja necessário que a força de atrito máximo seja ultrapassada porque, no movimento de rolamento, um corpo também possui o movimento de rotação e, portanto, à medida que ele gira, também descreve um movimento retilíneo.

Apesar da importância de se considerar o deslizamento em um movimento de rolamento, vamos nos concentrar, como já foi imposto neste capítulo, em rolamentos suaves, ou seja, aqueles tipos de movimentos em que não há deslizamentos enquanto o corpo rola.

No entanto, antes de prosseguirmos, veja a seguir a **Figura 9.04**, que mostra o gráfico da evolução da força de atrito conforme é aplicada uma força no sentido do movimento do corpo:

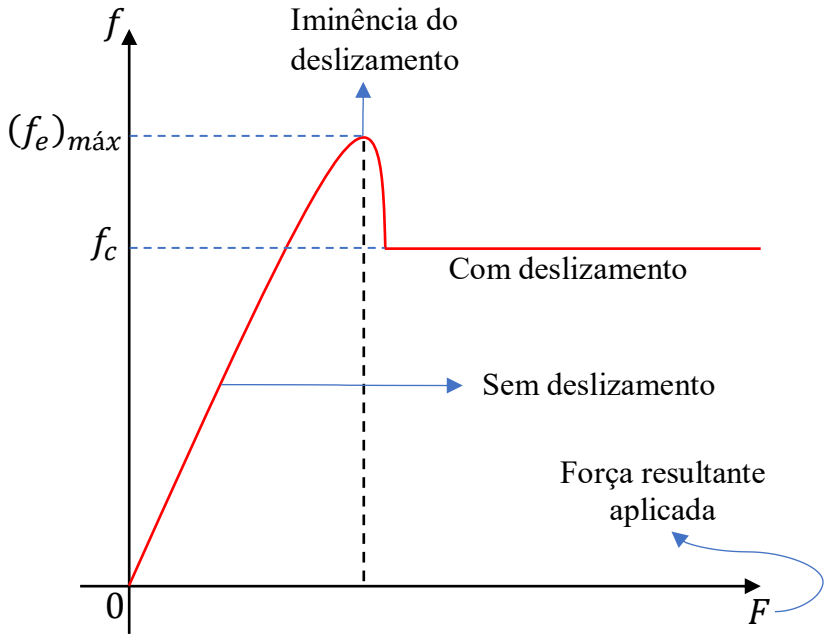


Figura 9.04: Gráfico do desempenho da força de atrito agindo em um corpo.

USANDO O *ALGODOO* 9.0

A **Figura 9.05** e a **Figura 9.06** abaixo mostram as principais forças que agem sobre um corpo em movimento de rolamento.

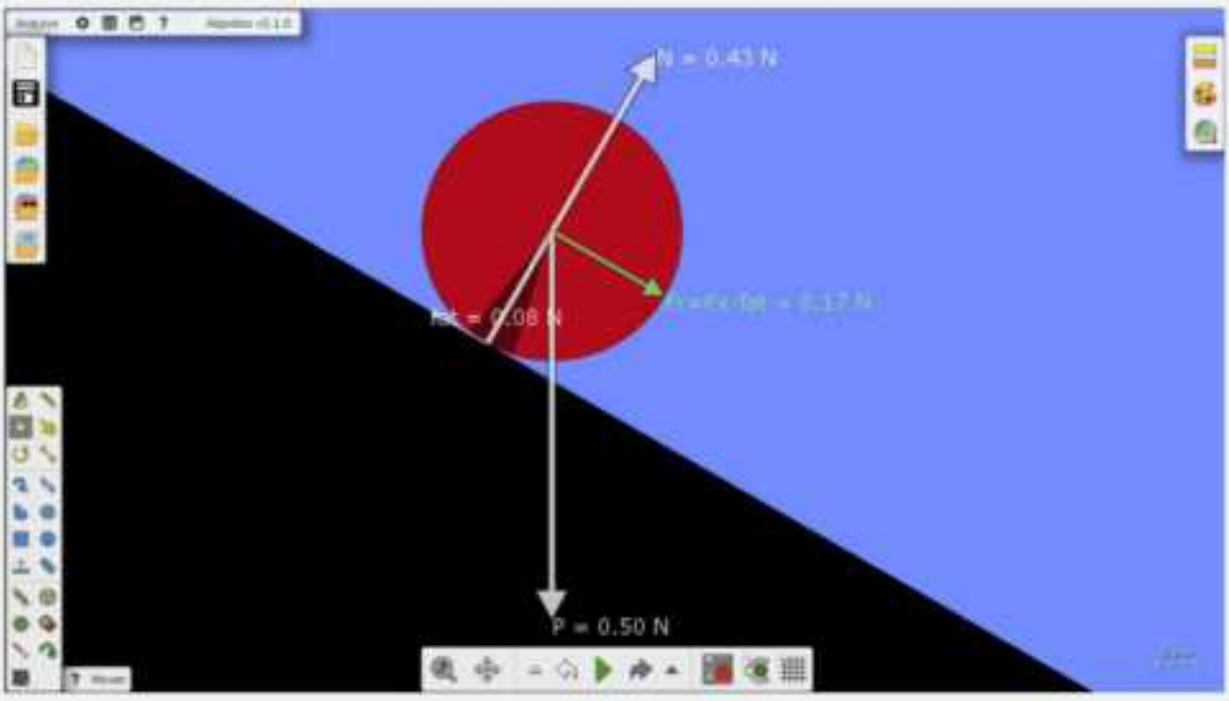


Figura 9.05: Captura de tela do *software Algodoo*: forças agindo sobre um corpo em movimento de rolamento suave descendo uma rampa. Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264604*.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

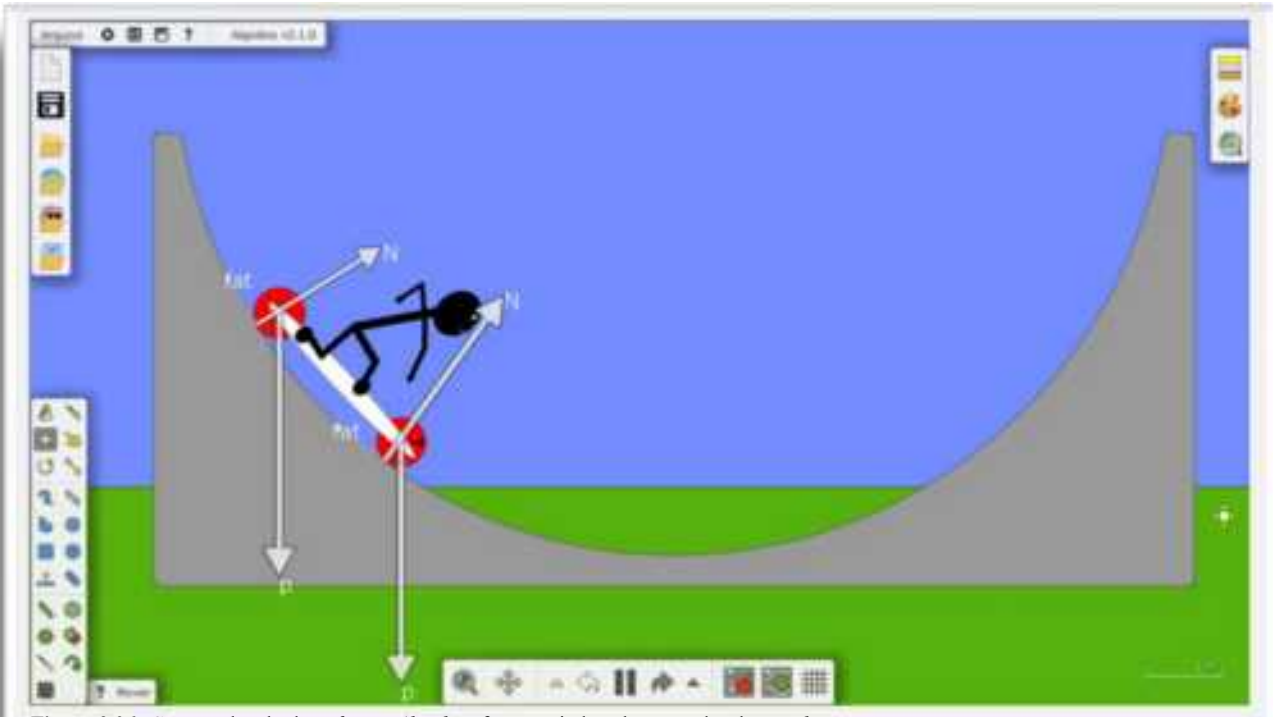


Figura 9.06: Captura de tela do *software Algodoo*: forças agindo sobre as rodas de um *skate* enquanto um *skatista* usa uma rampa apropriada para o movimento.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264646*.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

Clique no *link https://youtu.be/zgOAWZi2Lxc* ou escaneie o *QR code* ao lado para assistir ao vídeo do tutorial da animação.

TAREFA PROPOSTA 9.0

Para esta tarefa, por questões de limitações do *software*, vamos trabalhar nas forças que atuam sobre um corpo em rolamento levando em consideração que a força de atrito estática que faz o corpo girar é máxima, sabendo que, ainda assim, nessa situação, trata-se de um rolamento suave. Essa imposição é para que possamos usar, apesar de não ser nosso foco, a **Equação 9.03**.

Um corpo redondo e homogêneo, de 6 *kg* de massa, está descendo uma rampa, em rolamento suave, que possui inclinação de 30º com a horizontal. O coeficiente de atrito estático da rampa é 0,1925. Considere a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2. Use os dados da **Tabela 9.01** a seguir para calcular, inicialmente, a intensidade da força peso que age sobre o corpo.

m *(kg)*	g (m/s^2)	$p = mg$ *(N)*
6	10	

Tabela 9.01: Dados para cálculo do módulo da força peso que age sobre o corpo em rolamento suave – Tarefa Proposta 9.0.

Com posse do módulo da força peso, calcule a seguir, preenchendo a **Tabela 9.02**, os

valores das suas componentes ortogonais.

$sen30°$	$cos30°$	$p_x = psen30°$ *(N)*	$p_y = pcos30°$ *(N)*
0.5	0,866		

Tabela 9.02: Dados para cálculo do módulo das componentes ortogonais da força peso que age sobre o corpo em rolamento suave – Tarefa Proposta 9.0.

A força de contato normal equilibra a componente y do peso e, portanto, seus módulos são iguais:

$$N = p_y$$

Utilize o valor da força normal para calcular a força de atrito máxima que age sobre o corpo.

μ_e	$N = p_y$	$(f_e)_{máx} = \mu_e N$ *(N)*
0.1925		

Tabela 9.03: Dados para cálculo do módulo da força de atrito estático máximo que age sobre o corpo em rolamento suave – Tarefa Proposta 9.0.

Por fim, com os valores da componente x do peso e da força de atrito estático, calcule a força resultante que age sobre o corpo no sentido do movimento de rolamento, usando a **Tabela 9.04** abaixo:

p_x *(N)*	$(f_e)_{máx}$ *(N)*	$F_R = p_x - (f_e)_{máx}$ *(N)*

Tabela 9.04: Dados para cálculo do módulo da força resultante que age sobre o corpo em rolamento suave – Tarefa Proposta 9.0.

O mesmo resultado da **Tabela 9.04** poderia ser obtido de maneira mais simples utilizando a segunda lei de Newton:

$$F_R = ma$$

Em que m é à massa M do corpo em rolamento e a é a sua aceleração, que possui o mesmo sentido de F_R e corresponde a aceleração do seu centro de massa a_{CM}.

Usando a **Equação 9.02** e sabendo que o momento de inércia que passa pelo centro de massa de um corpo redondo e homogêneo é $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$:

$$a_{CM} = \frac{gsen\theta}{1 + I_{CM}/MR^2}$$

$$a_{CM} = \frac{gsen30°}{1 + MR^2/2MR^2}$$

Observe que a aceleração de um objeto redondo e homogêneo, em movimento de rolamento descendo uma rampa, não depende da massa nem do seu raio desse corpo. Logo:

$$a_{CM} = \frac{gsen30°}{1 + 0{,}5}$$

Substituindo os dados:

$$a_{CM} = \frac{10\,.\,0{,}5}{1{,}5}$$

$$a_{CM} = \frac{5}{1{,}5}$$

$$\boxed{a_{CM} = 3{,}33\ m/s^2}$$

Utilize, enfim, segunda lei de Newton com os dados da **Tabela 9.05** abaixo e verifique se o resultado é o mesmo encontrado na **Tabela 9.04**.

M (kg)	a_{CM} (m/s^2)	$F_R = M\,.\,a_{CM}$ (N)
6	3,33	

Tabela 9.05: Dados para cálculo do módulo da força resultante que age sobre o corpo em rolamento suave usando a segunda lei de Newton – Tarefa Proposta 9.0.

Em seguida, clique **AQUI** e confira na simulação do *Algodoo* se os resultados conferem.

E aí, acertou?

EXERCÍCIO RESOLVIDO

9.01 – Um corpo redondo e homogêneo está descendo uma rampa, em rolamento suave, que possui inclinação de 60º com a horizontal. Considere a equação do momento de inércia do corpo redondo como sendo $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$ e calcule o módulo da aceleração do seu centro de massa.

Dado: $sen60° = 0{,}866$ - $g = 10\ m/s^2$

Solução: Para calcular a aceleração do centro de massa do corpo redondo, vamos utilizar a **Equação 9.02**:

$$a_{CM} = \frac{gsen\theta}{1 + I_{CM}/MR^2}$$

Substituindo a equação do momento de inércia do corpo na equação acima:

$$a_{CM} = \frac{gsen60°}{1 + MR^2/2MR^2}$$

Observe que a questão não fornece o raio do corpo nem a sua massa, pois, para o caso específico, não seria necessário.

$$a_{CM} = \frac{gsen60°}{1 + 0{,}5}$$

Substituindo os dados:

$$a_{CM} = \frac{10\,.\,0{,}866}{1{,}5}$$

$$a_{CM} = \frac{8{,}66}{1{,}5}$$

$$\boxed{a_{CM} = 5{,}77\ m/s^2}$$

Portanto, a intensidade da aceleração do centro de massa do corpo é igual a $5{,}77\ m/s^2$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

9.01 – Um corpo redondo e homogêneo está descendo uma rampa, em rolamento suave, que possui inclinação de 45º com a horizontal. Considere a equação do momento de inércia do corpo redondo em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa como sendo $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$, além de $g = 10\ m/s^2$ e $sen45° = 0{,}71$, e determine a aceleração do centro de massa desse corpo durante a descida.

REVISÃO

As Forças de Rolamento

Neste capítulo, verificamos algumas situações e observamos quais são as forças contidas no movimento de rolagem.

Atrito e Rolamento

Quando uma roda se move aceleradamente, ela está sujeita a uma e a **força de atrito estático** $\vec{f}_e$ no ponto em contato com o solo. A aceleração a qual a roda está submetida é devido a uma força que age sobre a ela para aumentar ou diminuir a sua velocidade. Essa aceleração é chamada de **aceleração do centro de massa** a_{CM}, e tem a mesma direção do movimento. Essa força também produz uma aceleração angular α, fazendo a roda girar mais rápido ou mais lentamente, criando uma tendência de deslizamento no ponto de contato com o solo.

Assim, podemos também relacionar a aceleração do centro de massa de um corpo em movimento de rolamento suave em função da sua aceleração angular por meio da expressão:

$$a_{CM} = \alpha r \quad (m/s^2) \qquad (9.01)$$

- a_{CM} – aceleração do centro de massa da roda;
- α – aceleração angular da roda;
- R – raio da roda;

Se houver deslizamento no ponto P, a força de atrito será a **força de atrito cinético** $\vec{f}_c$.

Rolamento e Plano Inclinado

As forças que agem sobre o corpo redondo em rolamento suave em um plano inclinado são:

- A **força peso** $\vec{p}$ (força gravitacional) que atua sobre o corpo e tem sentido para baixo, sendo a origem desse vetor no centro de massa do corpo. Sua componente $\vec{p}_y$ tem mesmo módulo de $\vec{N}$, mas sentidos opostos e, por isso, se equilibram. Sua componente $\vec{p}_x$ tem a mesma direção da aceleração do centro de massa $\vec{a}_{CM}$ e da força de atrito estático $\vec{f}_e$.
- A **força normal** que é ortogonal à superfície de contato com o corpo (rampa) e atua nesse

ponto de contato (***C***).

- A **força de atrito estático** $\vec{f}_e$ que atua no ponto de contato entre o corpo e a superfície e se opõe à tendência do deslizamento.

O módulo da aceleração do centro de massa de um corpo redondo em movimento suave descendo uma rampa pode ser calculado por:

$$a_{CM} = \frac{gsen\theta}{1+I_{CM}/MR^2} \quad (m/s^2) \qquad (9.02)$$

- a_{CM} – módulo da aceleração do centro de massa do corpo redondo;
- g – módulo da aceleração da gravidade;
- θ – ângulo formado entre a horizontal e a inclinação da rampa;
- I_{CM} – momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de massa;
- M – massa do corpo;
- R – raio do corpo redondo.

Caso a força de atrito estático fosse máxima $(f_{máx})$, poderíamos usar a seguinte equação:

$$(f_e)_{máx} = \mu_e N \quad (N) \qquad (9.03)$$

De modo que depois do deslizamento:

$$f_c = \mu_c N \quad (N) \qquad (9.04)$$

- $(f_e)_{máx}$ – força de atrito estático máxima;
- μ_e – coeficiente de atrito estático da superfície;
- N – força de contato normal;
- f_c – força de atrito cinético;
- μ_c – coeficiente de atrito cinético da superfície.

A força de contato normal N depende da superfície de contato. Para planos horizontais, ela se equilibra com a força peso $\vec{p}$. No caso de um plano inclinado, ela se equilibra com a componente y do peso do corpo em que desce a rampa.



CAPÍTULO 10

REVISANDO O TORQUE

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Analisar o torque em caráter vetorial.
- ✓ Aplicar a regra da mão direita para obtenção da orientação do torque.
- ✓ Usar o *software* de simulação Física *Algodoo* como extensão do aprendizado do capítulo.

Capítulo 10 Revisando o Torque

No **Capítulo 05**, estudamos o **torque**, também chamado de **Momento de uma força**, em um movimento de rotação de um corpo rígido fixo a um eixo de giro, levando em consideração apenas a sua intensidade. Agora, vamos explorar essa grandeza para aplicação sobre uma partícula que descreve uma trajetória qualquer e em relação a um ponto fixo, que pode ou não ser o mesmo do eixo de rotação. Assim, será possível determinar, além da sua intensidade, também a sua direção e seu sentido, pelo fato dessa grandeza ser vetorial. Sua orientação é obtida pela **regra da mão direita**.

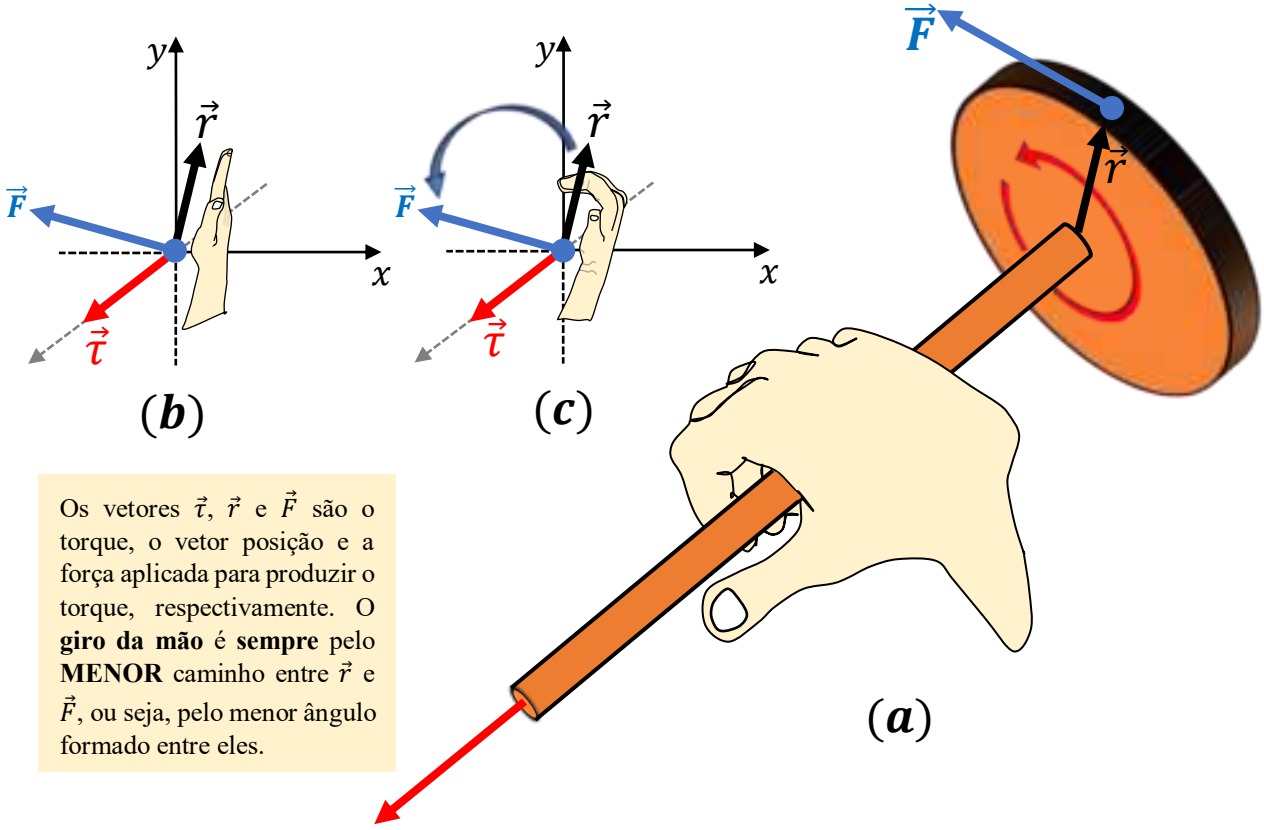


Figura 10.01: Em (a), o a mão envolvendo o eixo de rotação. Em (b), os vetores que envolvem o torque deslocados em relação a uma origem. Em (c), o sentido de giro dos dedos para determinar o sentido do torque.

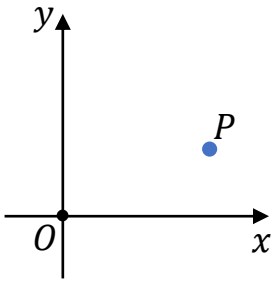
Observe, na **Figura 10.01(c)**, que os dedos da mão direita se fecham no sentido de giro do corpo, sendo a orientação do torque dado para onde o dedo polegar estiver apontando. Para nosso nível de estudo, vamos considerar apenas corpos planos girando no plano *x*-*y*. Nesse caso, o torque sempre será perpendicular ao plano do papel, apontando para dentro ou para fora dele.

Representaremos o sentido do torque da seguinte maneira:

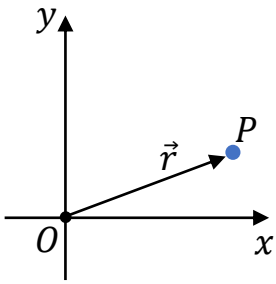
⊙ → Para fora do plano do papel;

⊗ → Para dentro do plano do papel.

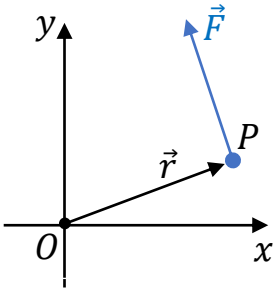
Na **Figura 10.02** a seguir, vamos fazer o passo a passo da regra da mão direita, para uma melhor assimilação, para obter a orientação do torque gerado sobre uma partícula que a faz possuir um movimento de giro em torno de um ponto fixo O no plano x-y.



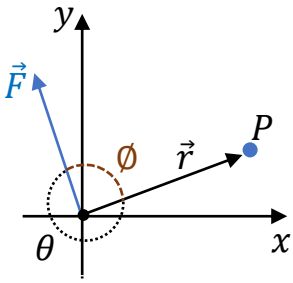
(a) – Partícula em um ponto P do Plano x-y.



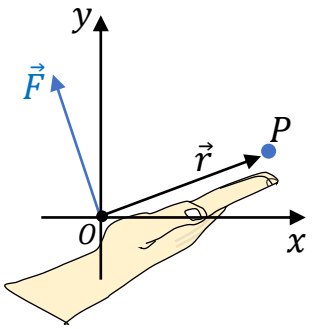
(b) – Vetor posição $\vec{r}$ que vai da origem O ao ponto P.



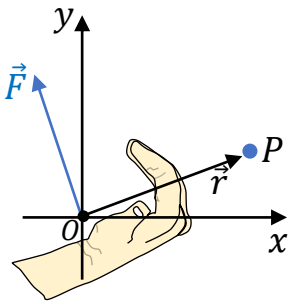
(c) – Força $\vec{F}$ aplicada sobre a partícula no ponto P.



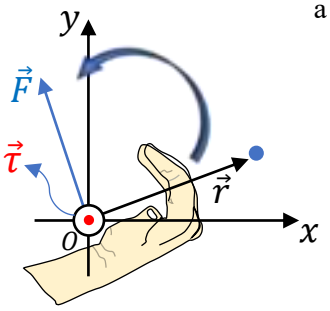
(d) – Descolamento da força $\vec{F}$ para a origem do sistema de coordenadas sem mudar a sua orientação.



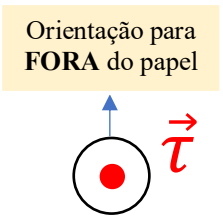
(e) – Posicionamento da mão direita com os dedos apontando para o ponto onde está sendo aplicada a força $\vec{F}$.



(f) – Os dedos da mão direita devem se curvar para onde está posicionada a força a $\vec{F}$, seguindo o sentido de giro da partícula, sendo a orientação do torque determinada para onde apontar o polegar.



(g) – O polegar direito está apontando para fora do plano do papel, determinando o sentido do torque produzido pela força $\vec{F}$.



(h) – O torque produzido pela força $\vec{F}$ tem direção perpendicular ao plano x-y e aponta para fora do papel.

Figura 10.02: Representação do passo a passo de como se obter a orientação do torque $\vec{\tau}$. Em (a), a partícula em um ponto P do plano x-y. Em (b), o vetor posição $\vec{r}$ que vai da origem O ao ponto P. Em (c), a força $\vec{F}$ aplicada sobre a partícula no ponto P. Em (d), o descolamento da força $\vec{F}$ para a origem do sistema de coordenadas sem mudar a sua orientação. Em (e), o posicionamento da mão direita com os dedos apontando para o ponto onde está sendo aplicada a força $\vec{F}$. Em (f), o curvamento dos dedos pelo menor ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$ (sentido de giro). Em (g), a determinação do sentido do torque pela posição do polegar. Em (h), a representação do sentido do torque como sendo para fora do plano do papel.

Observe que a mão direita, nas representações da **Figura 10.02**, está sempre fazendo o movimento de curva dos dedos em volta do ponto fixo O e indo no sentido da força aplicada de acordo com o menor ângulo formado entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$, o menor caminho entre eles. O sentido do torque sempre será para onde o polegar apontar. Para obtenção do seu módulo, já vimos como obtê-lo no **Capítulo 05**, bastando usar, entre outras, a **Equação 5.02**:

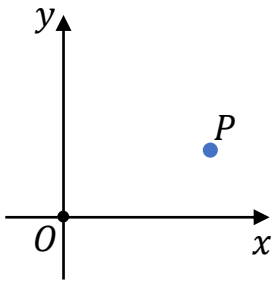
$$\tau = Frsen\emptyset$$

Como $rsen\emptyset$ é o braço de alavanca $r_{\perp}$, temos que:

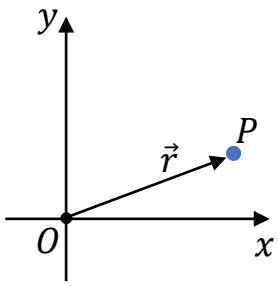
$$\tau = Fr_{\perp} = Frsen\emptyset \quad (N.m) \qquad (10.01)$$

- τ – módulo do torque;
- F – módulo da força;
- $r_{\perp}$ – braço de alavanca ($rsen\emptyset$);
- r – distância entre o ponto fixo e o ponto de aplicação da força;
- $\emptyset$ – ângulo formado entre $\vec{F}$ e $\vec{r}$, sendo $\vec{F}$ deslocado para a origem O.

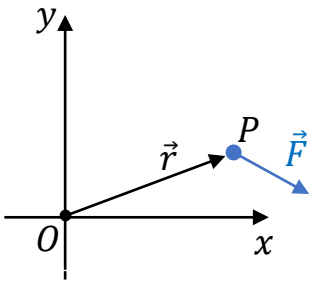
Vamos inverter, agora, o sentido da força $\vec{F}$ aplicada sobre a partícula da **Figura 10.02** e verificar como executar a regra da mão direita para a nova situação.



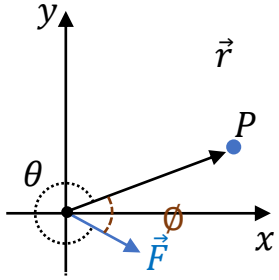
(a) – Partícula em um ponto P do Plano x-y.



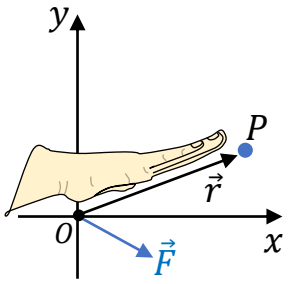
(b) – Vetor posição $\vec{r}$ que vai da origem O ao ponto P.



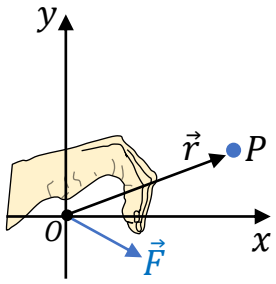
(c) – Força $\vec{F}$ aplicada sobre a partícula no ponto P.



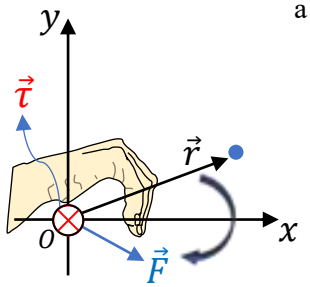
(d) – Descolamento da força $\vec{F}$ para a origem do sistema de coordenadas sem mudar a sua orientação.



(e) – Posicionamento da mão direita com os dedos apontando para o ponto onde está sendo aplicada a força $\vec{F}$.



(f) – Os dedos da mão direita devem se curvar para onde está posicionada a força a $\vec{F}$, seguindo o sentido de giro da partícula, sendo a orientação do torque determinada para onde apontar o polegar.



(g) – O polegar direito está apontando para dentro do plano do papel, determinando o sentido do torque produzido pela força $\vec{F}$.



(h) – O torque produzido pela força $\vec{F}$ tem direção perpendicular ao plano x-y e aponta para dentro do papel.

Figura 10.03: Representação do passo a passo de como se obter o sentido do torque $\vec{\tau}$ invertendo o sentido da força $\vec{F}$ da **Figura 10.02**. Em (a), a partícula em um ponto P do Plano x-y. Em (b), o vetor posição $\vec{r}$ que vai da origem O ao ponto P. Em (c), a força $\vec{F}$ aplicada sobre a partícula no ponto P. Em (d), o descolamento da força $\vec{F}$ para a origem do sistema de coordenadas sem mudar a sua orientação. Em (e), o posicionamento da mão direita com os dedos apontando para o ponto onde está sendo aplicada a força $\vec{F}$. Em (f), o curvamento dos dedos pelo menor ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$ (sentido de giro). Em (g), a determinação do sentido do torque pela posição do polegar. Em (h), a representação do sentido do torque como sendo para dentro do plano do papel.

USANDO O *ALGODOO* 10.0

A **Figura 10.04** abaixo mostra a aplicação da regra da mão direita para determinar a orientação do torque $\vec{\tau}$ (para fora da tela do *software*) produzido por uma força $\vec{F}$ que age sobre uma partícula, fazendo-a girar no sentido anti-horário.

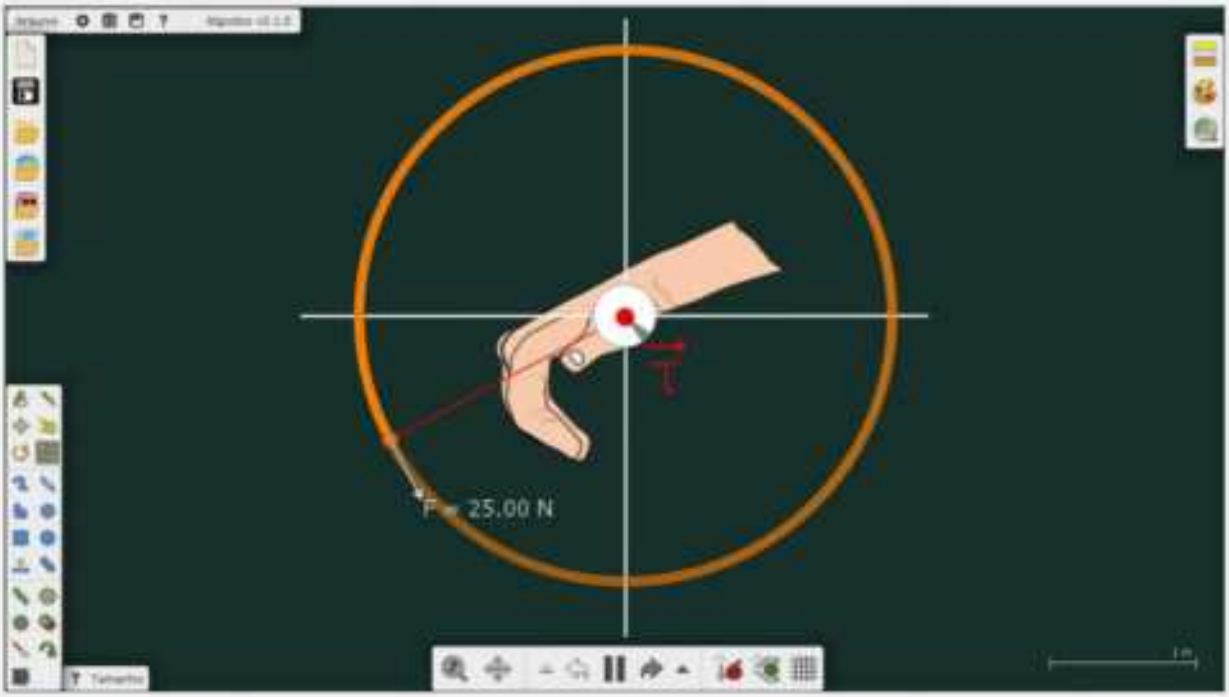


Figura 10.04: Captura de tela do *software Algodoo*: Regra da mão direita para determinar a orientação do torque $\vec{\tau}$ que faz a partícula girar em sentido anti-horário. Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=265054*.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

Para um movimento no sentido oposto (horário), a orientação do torque $\vec{\tau}$ (para dentro da tela do *software*) produzido por uma força $\vec{F}$ que age sobre a partícula, está ilustrada na **Figura 10.05** a seguir:

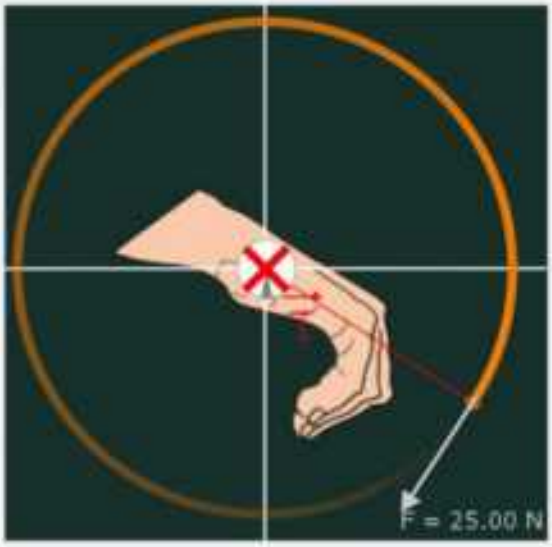


Figura 10.05: Recorte da captura de tela do *software Algodoo*: Regra da mão direita para determinar a orientação do torque $\vec{\tau}$ que faz a partícula girar em sentido horário.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=265055*.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

Clique no *link https://youtu.be/cn--hFifNL0*
ou escaneie o *QR code* ao lado para assistir ao vídeo do tutorial da animação.

TAREFA PROPOSTA 10.0

Uma força $\vec{F}$ é aplicada sobre uma partícula de massa m produzindo um torque $\vec{\tau}$ que a faz girar no sentido **anti-horário**. O raio da trajetória circular que a partícula descreve mede $2\ m$, e o módulo do torque gerado pela força $\vec{F}$ é de $60\ Nm$. Sabendo a força aplicada sobre a partícula é tangente à trajetória circular descrita por ela, use a **Tabela 10.01** a seguir para calcular a sua intensidade (módulo da força $\vec{F}$).

$\tau\ (Nm)$	$r\ (m)$	Ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$	$F = \frac{\tau}{rsen\emptyset}\ (N)$
60	2	$\emptyset = 90°$	

Tabela 10.01: Dados para cálculo da intensidade da força $\vec{F}$ da Tarefa Proposta 10.0.

Perceba que a equação da última coluna da **Tabela 10.01** corresponde à **Equação 10.01**.

Agora, use **Tabela 10.02** abaixo para traçar os vetores $\vec{r}$ e $\vec{F}$ e aplicar a regra da mão direita para determinar a orientação do torque $\vec{\tau}$, com base no passo a passo usado na **Figura 10.02** e/ou na **Figura 10.03**:

(a)	(b)	(c)	(d)
(e)	(f)	(g)	(h)

Tabela 10.02: Tabela para fazer o passo a passo da regra da mão direita para obter a orientação do torque da Tarefa Proposta 10.0.

Verifique a sequência de "a" a "h" na **Figura 10.02** e na **Figura 10.03** e repita o procedimento nas mesmas letras da **Tabela 10.02**.

Em seguida, clique **AQUI** para verificar a simulação com os resultados.

E aí, acertou?

EXERCÍCIO RESOLVIDO

10.01 – A **Figura 10.06** ilustra três situações em que uma partícula *m*, em cada caso, sofre a ação de uma força $\vec{F}$ que a faz girar em torno de um ponto fixo O localizado na origem do plano *x*-*y*.

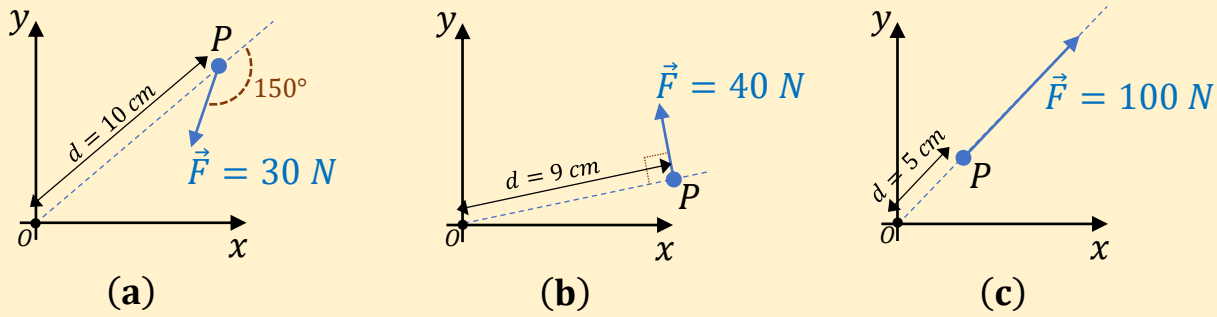
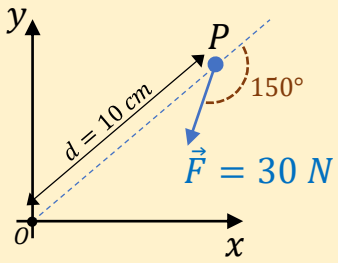


Figura 10.06: Exercício Resolvido 10.01 – Cálculo dos torques produzidos por três forças sobre uma partícula de massa *m* em três situações distintas. Em (a), a força aplicada forma um ângulo de 150º com a linha que passa pela origem do sistema cartesiano. Em (b), o ângulo formado é de 90º. Em (c), 0º.

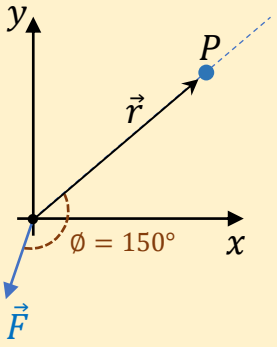
Sabendo que as forças aplicadas atuam apenas no plano *x*-*y*, determine o torque nas três situações descritas acima.

Solução: Vamos determinar o torque, em cada caso, identificando, primeiro, a sua orientação. Para isso, vamos aplicar a regra da mão direita e, em seguida, usaremos a **Equação 10.01** para calcular o seu módulo.

Figura 10.06(a)

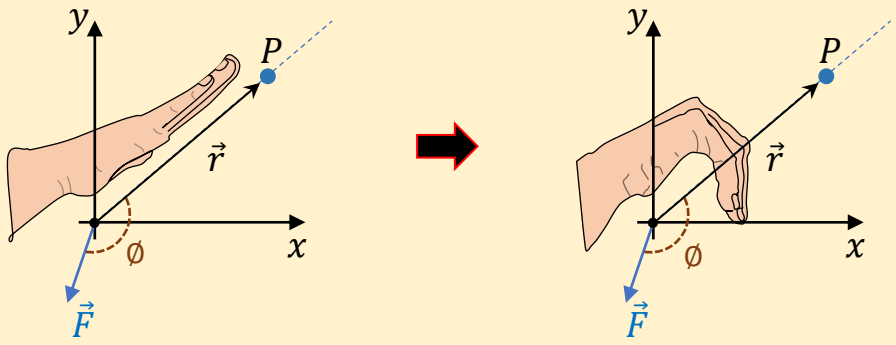


Escrevendo o vetor posição $\vec{r}$ e deslocando o vetor força para a origem do sistema:

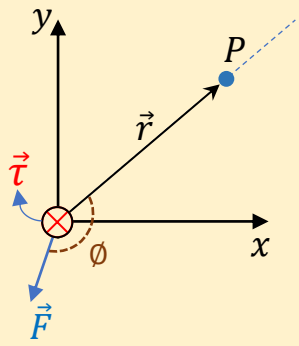


O ângulo de 150º é o menor ângulo entre os vetores $\vec{r}$ e $\vec{F}$ e, portanto, a curvatura dos

dedos da mão de direita se dará nesse sentido:



A orientação do torque na primeira situação é, portanto, perpendicular ao plano *x*-*y* e apontando para **dentro** do papel:



Agora, vamos calcular o módulo do torque:

$$\tau = rFsen\emptyset$$

Sendo $r = d = 10\ cm = 0{,}1\ m$ - $F = 30\ N$ - $sen150° = 0{,}5$:

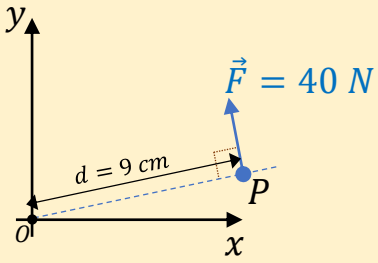
$$\tau = rFsen150°$$

$$\tau = 0{,}1\ .\ 30\ .\ 0{,}5$$

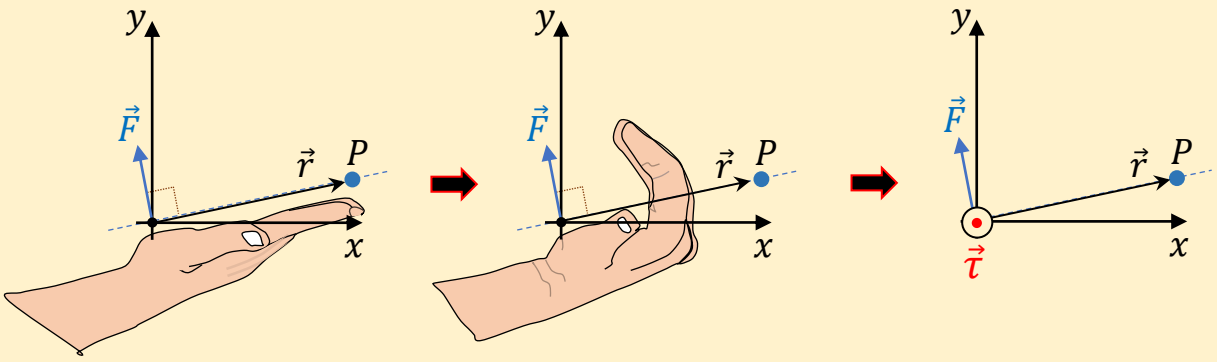
Como a partícula descreve um movimento em sentido horário, o torque é negativo:

$\vec{\tau} = -1{,}5\ N.m$, perpendicular ao plano *x*-*y* e apontando para dentro do papel.

Figura 10.06(b)



Para a segunda situação, vamos aplicar as etapas da anterior em sequência:



Assim, a orientação do torque, para a segunda situação, é para **fora** do plano do papel.

Para o módulo, temos que $r = d = 9\ cm = 0{,}09\ m$ - $F = 40\ N$ - $sen90° = 1$. Logo:

$$\tau = rFsen90°$$

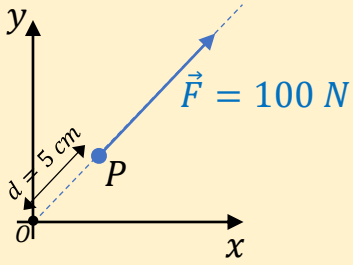
$$\tau = 0{,}09\ .\ 40\ .\ 1$$

Como a partícula descreve um movimento em sentido anti-horário, o torque é positivo:

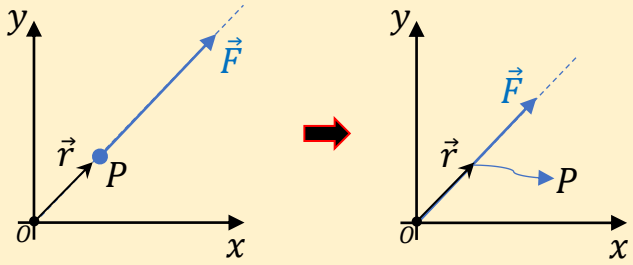
$\vec{\tau} = 3{,}6\ N.m$, perpendicular ao plano x-y e apontando para fora do papel.

Observe que para $\emptyset = 90°$, a distância entre a origem e o ponto P representa o próprio braço de alavanca, tendo em vista que o $sen90° = 1$.

Figura 10.06(c)



Para a terceira situação, se esboçarmos o vetor posição entre a origem e o ponto P, o ângulo formado entre $\vec{r}$ e a $\vec{F}$ será 0° e $sen0° = 0$, o que nos faz concluir que, para existir rotação, a força aplicada sobre a partícula, em relação ao vetor posição, precisa ter um ângulo não nulo.



Assim,

$$\tau = rFsen0°$$

$$\tau = 0{,}05\ .\ 100\ .\ 0$$

$$\vec{\tau} = \vec{0}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

10.01 – A **Figura 10.07** a seguir ilustra três situações em que uma partícula *m*, em cada caso, sofre a ação de uma força $\vec{F}$ que a faz girar em torno de um ponto fixo O localizado na origem do plano *x*-*y*.

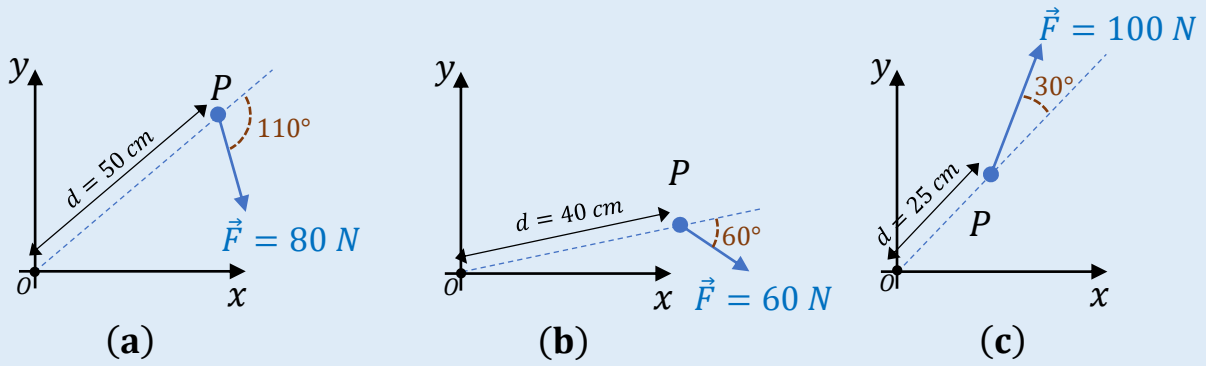


Figura 10.07: Exercício Proposto 10.01 – Cálculo dos torques produzidos por três forças sobre uma partícula de massa *m* em três situações distintas. Em (a), a força aplicada forma um ângulo de 110º com a linha que passa pela origem do sistema cartesiano. Em (b), o ângulo formado é de 60º. Em (c), 30º.

Sabendo que as forças aplicadas agem apenas no plano *x*-*y*, determine o torque nas três situações descritas acima.

Dado: $sen110° = 0{,}94$; $sen60° = 0{,}866$ e $sen30° = 0{,}5$.

Saiba mais...

Para obtermos a orientação do torque, podemos usar a regra da mão direita para produtos vetoriais:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Sendo o módulo do torque dado por:

Módulo do primeiro vetor

x

Módulo do segundo vetor

x

Seno do ângulo formado entre os dois vetores

Assim:

$$\tau = rFsen\emptyset$$

Vamos usar a **Figura 10.08** a seguir para verificar como obter a orientação do torque usando a regra da mão direita para produtos vetoriais:

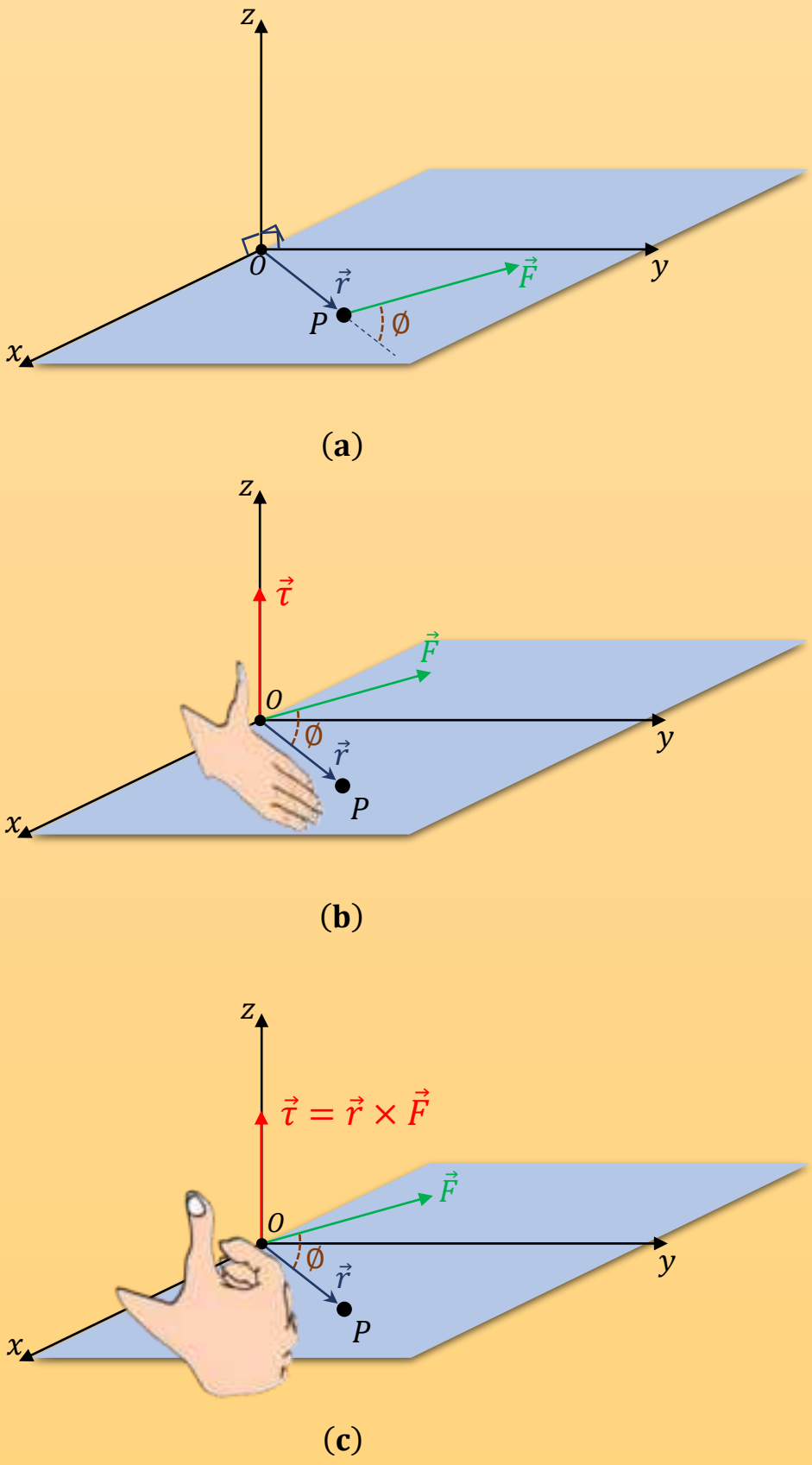


Figura 10.08: Regra da mão direita para produtos vetoriais. Em (a), os vetores posição $\vec{r}$ e força $\vec{F}$ no plano *x-y* relacionados à partícula no ponto P. Em (b), o deslocamento da força para a origem O do sistema e o posicionamento da mão direta para definir a orientação do torque. Em (c), o curvamento dos dedos da mão para o menor ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$, determinando o sentido do torque pelo posicionamento do polegar.

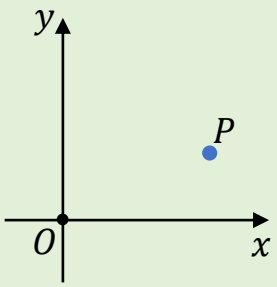
Conforme a **Figura 10.08**, para se obter o sentido do torque, devemos deslocar a força $\vec{F}$ para a

origem do sistema (ponto O), sem mudar a sua orientação, de modo que as origens dos dois vetores envolvidos no produto vetorial sejam as mesmas. Em seguida, usaremos a regra da mão direita para produtos vetoriais, posicionando os dedos no sentido do primeiro vetor do produto, ou seja, o vetor posição $\vec{r}$ e depois curvando as pontas dos dedos para o segundo vetor (a força $\vec{F}$), sendo que essa curvatura deverá ser no sentido do menor caminho entre os dois vetores, ou seja, para o menor ângulo entre os dois. O sentido do torque será determinado para onde o polegar direito estiver esticado. Na **Figura 10.08(c)**, por exemplo, está apontando para o sentido positivo do eixo z.

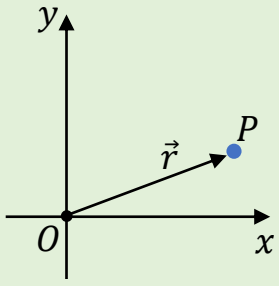
REVISÃO

Revisando o Torque

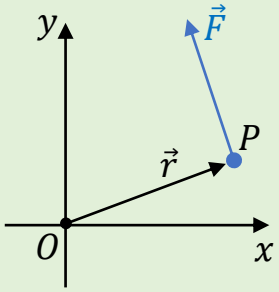
O torque $\vec{\tau}$ é uma grandeza vetorial e sua orientação pode ser obtida pela **regra da mão direita**.



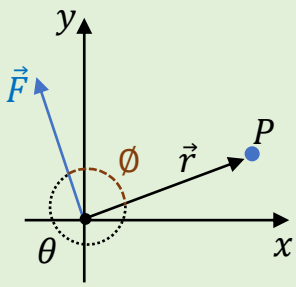
(a) – Partícula em um ponto P do Plano x-y.



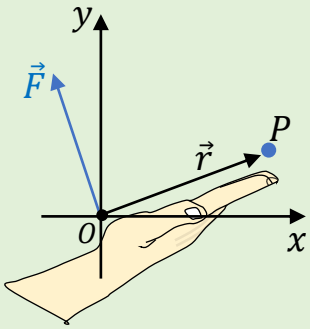
(b) – Vetor posição $\vec{r}$ que vai da origem O ao ponto P.



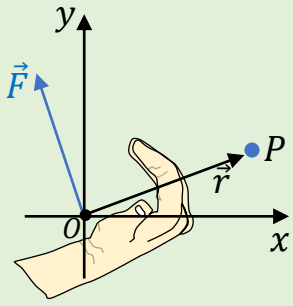
(c) – Força $\vec{F}$ aplicada sobre a partícula no ponto P.



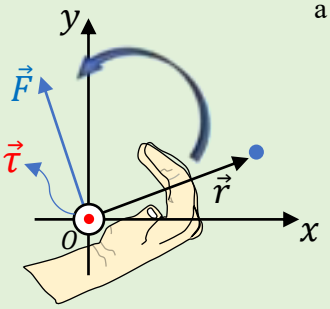
(d) – Descolamento da força $\vec{F}$ para a origem do sistema de coordenadas sem mudar a sua orientação.



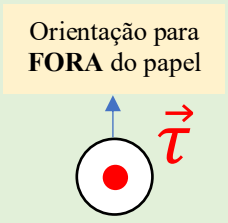
(e) – Posicionamento da mão direita com os dedos apontando para o ponto onde está sendo aplicada a força $\vec{F}$.



(f) – Os dedos da mão direita devem se curvar para onde está posicionada a força a $\vec{F}$, seguindo o sentido de giro da partícula, sendo a orientação do torque determinada para onde apontar o polegar.



(g) – O polegar direito está apontando para fora do plano do papel, determinando o sentido do torque produzido pela força $\vec{F}$.



(h) – O torque produzido pela força $\vec{F}$ tem direção perpendicular ao plano x-y e aponta para fora do papel.

De modo que seu módulo pode ser calculado por meio da seguinte equação:

$$\tau = Fr_{\perp} = Frsen\emptyset \quad (N.m) \qquad (10.01)$$

- τ – módulo do torque;
- F – módulo da força;
- $r_{\perp}$ – braço de alavanca $(rsen\emptyset)$;

- r – distância entre o ponto fixo e o ponto de aplicação da força;
- $\emptyset$ – ângulo formado entre $\vec{F}$ e $\vec{r}$, sendo $\vec{F}$ deslocado para a origem O.

Lembrando que as representações para as orientações dos torques perpendiculares ao plano papel são:

⊙ → Para fora do plano do papel;
⊗ → Para dentro do plano do papel.

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$L = rmv\text{sen}\emptyset$$



CAPÍTULO 11

MOMENTO ANGULAR

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Definir o que é Momento Angular e como calculá-lo, usando, também, a regra da mão direita para obter a sua orientação.
- ✓ Relacionar a variação do momento angular com o torque externo resultante.
- ✓ Calcular o momento angular para um sistema de partículas e para um corpo rígido.
- ✓ Usar o *software* de simulação Física *Algodoo* como extensão do aprendizado do capítulo.

Capítulo 11 Momento Angular

Todo corpo em movimento possui uma certa **quantidade de movimento**. No movimento de translação, essa quantidade de movimento é chamada de **momento linear** $\vec{P}$, ou, simplesmente, $\vec{Q}$ (quantidade de movimento).

Já para os movimentos rotacionais, essa quantidade de movimento é chamada de **Momento Angular** $\vec{L}$ e é umas das principais grandezas da cinemática rotacional, pois mede a quantidade de movimento de um corpo em rotação em relação a um ponto fixo, que pode ou não ser o mesmo do eixo de rotação. O momento angular é, portanto, uma grandeza vetorial e o equivalente angular do momento linear.

A **Figura 11.01** a seguir mostra como se obter a orientação de $\vec{L}$ de uma partícula de massa m e momento linear $\vec{P}$ que está passando por um ponto A de um plano x-y.

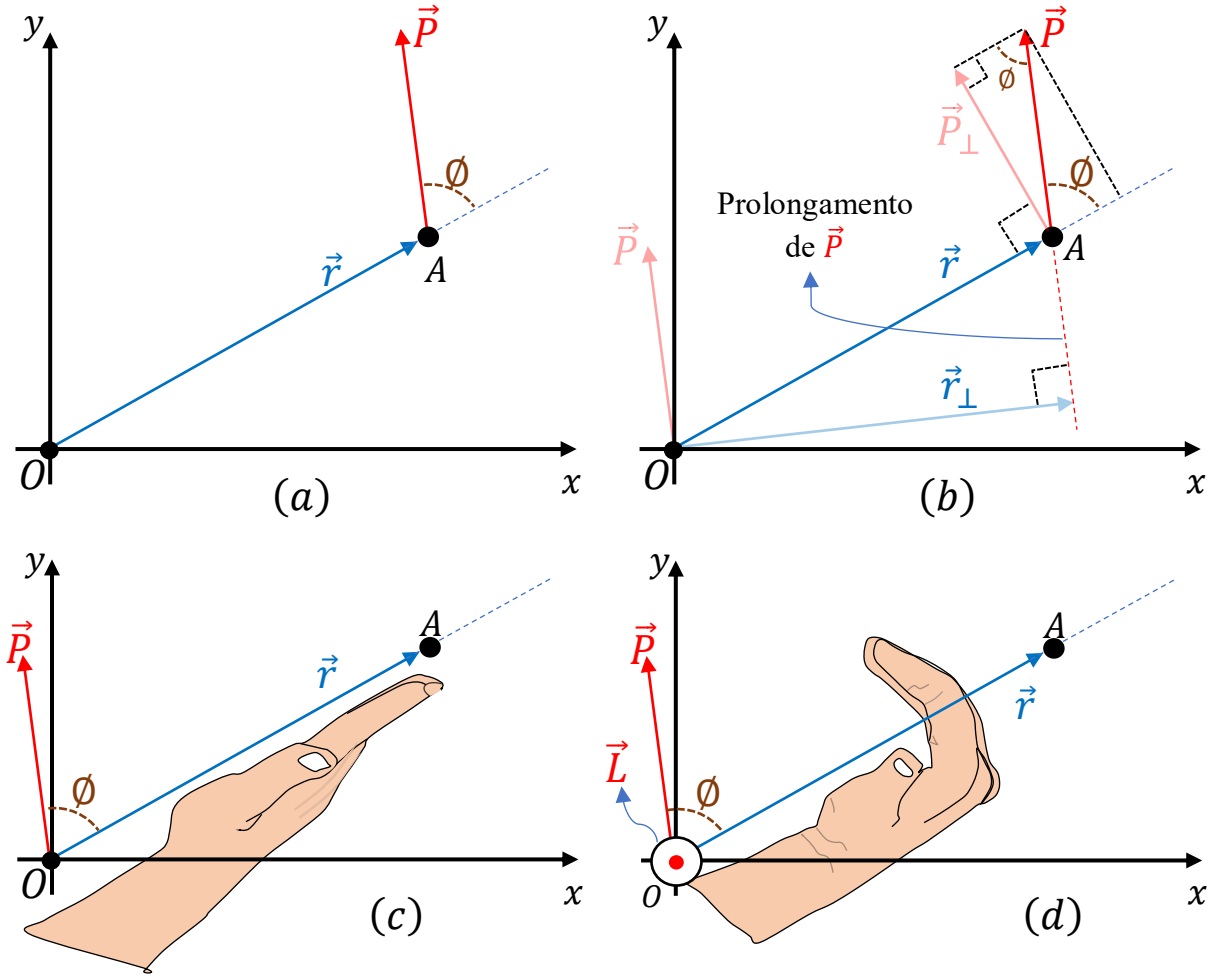


Figura 11.01: Regra da mão direita para se obter a orientação do momento angular $\vec{L}$. Em (a), os vetores posição $\vec{r}$ e o momento linear $\vec{P}$ no plano x-y relacionados à partícula de massa m no ponto A. Em (b), o deslocamento do momento linear para a origem O do plano. Em (c), o posicionamento da mão direita para aplicação da regra. Em (d), o curvamento dos dedos da mão para o menor ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{P}$, determinando o sentido de $\vec{L}$ pelo posicionamento do polegar.

De acordo com a **Figura 11.01**, observamos a grande semelhança entre o momento angular e o torque no que se diz respeito à aplicação da regra da mão direita para se obter as suas orientações. A única diferença é que, para o momento angular, usamos o momento linear no lugar da força usada no torque. De resto, a aplicação é a mesma.

Assim, basta posicionar a mão direita no mesmo plano que se encontra o vetor posição $\vec{r}$ e o momento linear $\vec{P}$ da partícula e curvar os dedos para o menor caminho entre eles, ou seja, o menor ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{P}$; e o sentido do momento angular se dará para onde apontar o polegar estirado. **Na Figura 11.01(b)**, por exemplo, a orientação do momento angular é para fora do papel, a qual é perpendicular ao plano *x-y*.

Já na **Figura 11.01(b)**, também podemos observar a componente $\vec{r}_{\perp}$ (distância perpendicular entre a origem e o prolongamento de $\vec{P}$) do vetor posição $\vec{r}$, além da componente tangencial do momento linear $\vec{P}_{\perp}$. Da mesma forma do torque, podemos escrever o módulo do momento angular da seguinte forma:

$$L = P.r.sen\emptyset$$

sendo $\emptyset$ o menor ângulo formado entre $\vec{r}$ e $\vec{P}$.

O módulo do momento linear pode ser escrito como $P = mv$, sendo m e v a massa e o módulo da velocidade linear da partícula em certo instante. Logo:

$$L = rmvsen\emptyset \quad (kgm^2/s) \qquad (11.01)$$

Como $r_{\perp} = rsen\emptyset$, assim como $P_{\perp} = Psen\emptyset$, também podemos escrever o módulo do momento angular das seguintes formas:

$$L = r_{\perp}mv \quad (kgm^2/s) \qquad (11.02)$$

$$L = rP_{\perp} \quad (kgm^2/s) \qquad (11.03)$$

- L – intensidade do momento angular;
- r – módulo do vetor posição da partícula em relação à origem;
- m – massa da partícula;
- v – módulo da velocidade linear da partícula;
- $\emptyset$ – menor ângulo formado entre $\vec{r}$ e $\vec{P}$ ou $\vec{r}$ e $\vec{v}$ quando possuem uma origem em comum;
- $r_{\perp}$ – distância perpendicular entre a origem e o prolongamento de $\vec{P}$ ($rsen\emptyset$);
- $P_{\perp}$ – módulo da componente de $\vec{P}$ que é perpendicular a $\vec{r}$ ($Psen\emptyset$).

IMPORTANTE

O momento angular apenas tem sentido em relação a um ponto dado, o qual sua orientação é sempre perpendicular ao plano formado pelos vetores posição e momento linear, $\vec{r}$ e $\vec{P}$, ou seja, ao plano da órbita de um corpo.

11.1 – Momento Angular e a Segunda Lei de Newton

Pela segunda lei de Newton:

$$F_R = ma$$

Sendo $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, temos que:

$$F_R = m\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$F_R = m\frac{(v - v_0)}{\Delta t}$$

$$F_R = \frac{(mv - mv_0)}{\Delta t}$$

Como a intensidade do momento linear é dado por $P = mv$:

$$F_R = \frac{(P - P_0)}{\Delta t}$$

$$\boxed{F_R = \frac{\Delta P}{\Delta t}}$$

De acordo com a **Equação 10.01**, a intensidade do torque gerado apenas por uma força é dada por $\tau = Frsen\emptyset$.

Para um conjunto de forças, temos o módulo do torque resultante τ_R associado à intensidade de uma força resultante F_R:

$$\tau_R = F_R rsen\emptyset$$

Mas $F_R = \frac{\Delta P}{\Delta t}$. Logo:

$$\tau_R = \frac{\Delta P}{\Delta t} rsen\emptyset$$

Como $\Delta P = P - P_0$ e $P = mv$:

$$\tau_R = \frac{(P - P_0)}{\Delta t} r sen\emptyset$$

$$\tau_R = \frac{(mv - mv_0)}{\Delta t} r sen\emptyset$$

$$\tau_R = \frac{(rmvsen\emptyset - rmv_0 sen\emptyset)}{\Delta t}$$

O termo $\boldsymbol{rmvsen\emptyset}$ é, de acordo com a **Equação 11.01**, a intensidade do momento angular de uma partícula em relação a um ponto fixo. Assim:

$$\tau_R = \frac{(L - L_0)}{\Delta t}$$

$$\tau_R = \frac{\Delta L}{\Delta t} \quad (kgm^2/s) \qquad (11.04)$$

- τ_R – módulo do torque resultante;
- ΔL – variação do módulo do momento angular;
- Δt – variação do tempo.

A **Equação 11.04** representa, em módulo, o torque resultante da soma dos torques que agem sobre uma partícula como sendo a variação do momento angular da partícula em relação ao tempo. Como o torque é uma grandeza vetorial, o torque resultante também pode ser escrito da seguinte forma:

$$\vec{\tau}_R = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \quad (kgm^2/s) \qquad (11.05)$$

- $\vec{\tau}_R$ – torque resultante;
- $\Delta \vec{L}$ – variação do momento angular;
- Δt – variação do tempo.

De acordo com a **Equação 11.05**, observamos que quanto maior for o torque resultante, mais rápido será a variação do momento angular. Observe também que a relação entre torque resultante e a variação do momento angular $\left(\vec{\tau}_R = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}\right)$ é exatamente análoga à de força resultante e momento linear $\vec{F}_R = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$, pois, como já sabemos, toda grandeza angular possui sua correspondente linear, assim como o torque $\vec{\tau}$ é a correspondente angular da força $\vec{F}$, o momento

angular $\vec{L}$ é a do momento linear $\vec{P}$.

A **Equação 11.05** é essencial na mecânica, pois é uma forma de expressar a segunda lei de Newton para movimentos rotacionais. Isso significa que, para alterar o momento angular, um torque deve atuar durante um certo intervalo de tempo.

Assim, temos que a variação do momento angular acontece no mesmo sentido do torque resultante e essa relação só faz sentido se eles forem definidos em relação ao mesmo ponto, que, em geral, é a origem do sistema de coordenadas escolhido.

11.2 – Momento Angular de um Sistema de Partículas

Para um sistema de partículas, o seu momento angular total $\vec{L}_T$ é a soma vetorial dos momentos angulares de todas as partículas que compõe esse sistema em relação a uma origem O, ou seja, em relação a um mesmo ponto:

$$\vec{L}_T = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \ldots + \vec{L}_n \quad (kgm^2/s) \qquad (11.06)$$

- $\vec{L}_T$ – momento angular total do sistema;
- $\vec{L}_1$ – momento angular da partícula 1;
- $\vec{L}_2$ – momento angular da partícula 2;
- $\vec{L}_3$ – momento angular da partícula 3;
- $\vec{L}_n$ – momento angular da enésima partícula.

Os momentos angulares das partículas podem variar por causa de forças externas ou até mesmo pelas interações entre elas. Assim, podemos escrever a variação do momento angular do sistema como a soma das variações dos momentos angulares de cada partícula que o compõe:

$$\Delta\vec{L}_T = \Delta\vec{L}_1 + \Delta\vec{L}_2 + \Delta\vec{L}_3 + \ldots + \Delta\vec{L}_n \quad (kgm^2/s) \qquad (11.07)$$

- $\Delta\vec{L}_T$ – variação do momento angular total do sistema;
- $\Delta\vec{L}_1$ – variação do momento angular da partícula 1;
- $\Delta\vec{L}_2$ – variação do momento angular da partícula 2;
- $\Delta\vec{L}_3$ – variação do momento angular da partícula 3;
- $\Delta\vec{L}_n$ – variação do momento angular da enésima partícula.

Observe que, na **Equação 11.05**, $\Delta\vec{L}_T$ é o produto torque resultante do sistema de partículas $\vec{\tau}_R$ pelo tempo Δt (**Equação 2.13**). Assim, podemos concluir que a soma vetorial dos torques que estão submetidas as partículas do sistema é equivalente à soma das variações dos momentos angulares de todas as partículas que o compõe multiplicado pelo tempo.

⚠ IMPORTANTE

Como as forças exercidas pelas partículas do sistema sempre aparecem como pares de forças da terceira lei de Newton, o torque resultante produzido por essas forças é nulo. Assim, os torques não nulos que faz o momento angular do sistema variar são produzidos por **forças externas**.

11.3 – Momento Angular de um Corpo Rígido

Considere um corpo rígido (esfera homogênea), que gira com velocidade angular constante, em torno de um eixo fixo, conforme mostra a **Figura 11.02** a seguir:

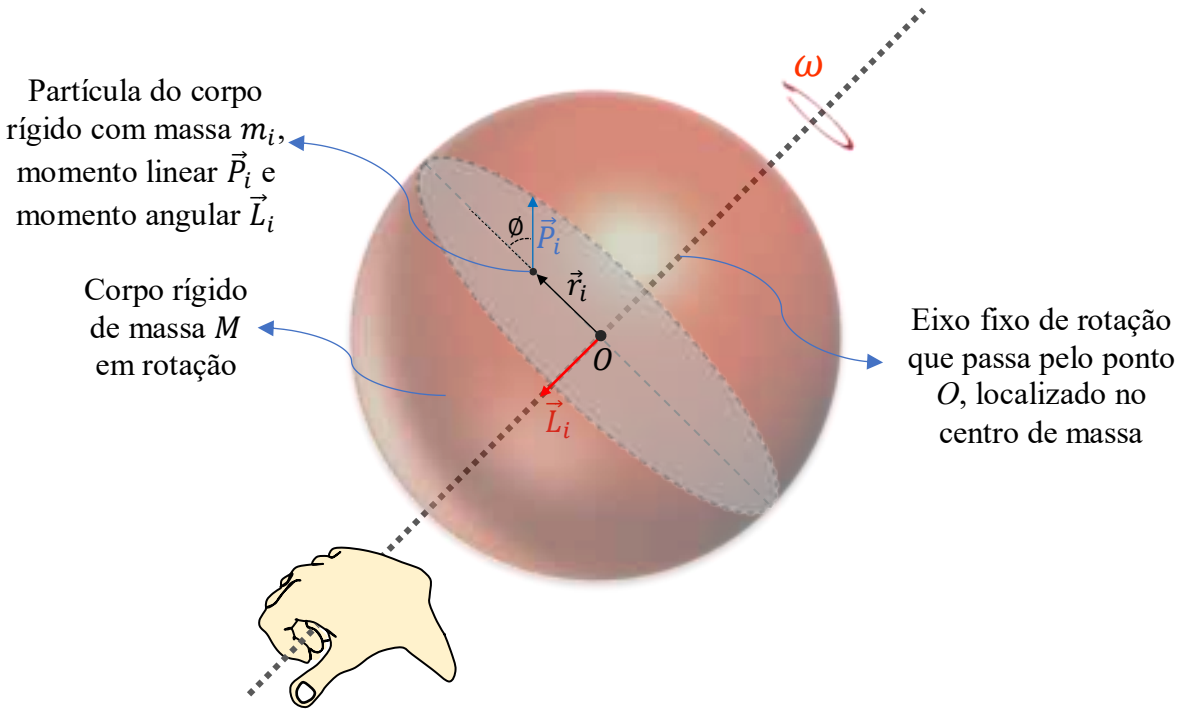


Figura 11.02: Esfera homogênea girando em torno de um eixo fixo que passa pelo seu centro de massa, localizado no ponto O. A mão direita, localizada na parte inferior do eixo de rotação, indica o sentido do momento angular de uma partícula de massa m_i e momento angular $\vec{P}_i$ da esfera.

A **Figura 11.02** mostra o momento angular de uma partícula de massa m_i, momento linear $\vec{P}_i$ e momento angular $\vec{L}_i$; que compõe um corpo rígido de massa M (esfera homogênea) em rotação constante (velocidade angular ω constante). Observe que a orientação do momento angular da partícula se dá ao longo do eixo de rotação do corpo rígido de acordo com a regra da

mão direita. Para se obter o momento angular total do corpo rígido basta somar todos os momentos angulares de todas as partículas que o compõe em relação ao mesmo ponto que passa pelo eixo de rotação desse corpo. Assim, de acordo com a **Equação 11.06**, podemos calcular o momento angular de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo da seguinte forma:

$$\vec{L}_T = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \ldots + \vec{L}_n$$

sendo $\vec{L}_T$ o momento angular do corpo rígido como o somatório dos momentos angulares de todas as partículas que o compõe em relação a um ponto O.

Como os momentos angulares de todas as partículas do corpo rígido, em relação ao mesmo ponto, possuem a mesma orientação, podemos calcular o módulo do momento angular do corpo somando os módulos dos momentos angulares das partículas:

$$L_T = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_n$$

Considerando as partículas idênticas (mesma massa) e, de acordo com a **Equação 11.01**, o módulo do momento angular de uma partícula ($L = rmvsen\emptyset$), podemos escrever:

$$L_T = r_1 m v_1 sen\emptyset_1 + r_2 m v_2 sen\emptyset_2 + r_3 m v_3 sen\emptyset_3 + \ldots + r_n m v_n sen\emptyset_n$$

Como $v = \omega R$:

$$L_T = R_1 m \omega_1 r_1 sen\emptyset_1 + R_2 m \omega_2 r_2 sen\emptyset_2 + R_3 m \omega_3 r_3 sen\emptyset_3 + R_n m \omega_n r_n sen\emptyset_n$$

Importante observar que o raio da trajetória cada partícula é a distância perpendicular entre a partícula e o eixo de rotação. Logo, $R = rsen\emptyset$:

$$L_T = r_1 sen\emptyset_1 m \omega_1 r_1 sen\emptyset_1 + r_2 sen\emptyset_2 m \omega_2 r_2 sen\emptyset_2 + r_3 sen\emptyset_3 m \omega_3 r_3 sen\emptyset_3 + \ldots + r_n sen\emptyset_n m \omega_n r_n sen\emptyset_n$$

O termo $rsen\emptyset$ corresponde a $r_\perp$, que é a distância perpendicular entre a origem O e o prolongamento de $\vec{P}$. Substituindo:

$$L_T = r_{\perp_1} m \omega_1 r_{\perp_1} + r_{\perp_2} m \omega_2 r_{\perp_2} + r_{\perp_3} m \omega_3 r_{\perp_3} + \ldots + r_{\perp_n} m \omega_n r_{\perp_n}$$

$$L_T = m \omega_1 r_{\perp_1}^2 + m \omega_2 r_{\perp_2}^2 + m \omega_3 r_{\perp_3}^2 + \ldots + m \omega_n r_{\perp_n}^2$$

No movimento de rotação de um corpo rígido, todas as partículas que o compõe possuem a mesma velocidade angular ω. No caso específico da **Figura 11.02**, inclusive, essa velocidade angular é constante. Logo, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_n = \omega$:

$$L_T = m\omega r_{\perp_1}^2 + m\omega r_{\perp_2}^2 + m\omega r_{\perp_3}^2 + \ldots + m\omega r_{\perp_n}^2$$

Colocando a velocidade angular ω em evidência:

$$L_T = \left(mr_{\perp_1}^2 + mr_{\perp_2}^2 + mr_{\perp_3}^2 + \ldots + mr_{\perp_n}^2\right)\omega$$

O fator $mr_{\perp}^2$ é o momento de inércia da partícula em relação ao eixo de rotação. Assim, podemos reescrever:

$$L_T = (I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n)\omega$$

Os termos entre parênteses acima representam a soma dos momentos de inércia de todas as partículas que compõe um corpo rígido, sendo essa soma o momento de inércia total do próprio corpo. Assim:

$$L_T = I_T\omega$$

Portanto, para calcular a intensidade do momento angular $\vec{L}$ de um corpo rígido, que possui momento de inércia I e velocidade angular $\vec{\omega}$ em relação a um eixo fixo de rotação; podemos usar a **Equação 11.08** a seguir:

$$L = I\omega \quad (kgm^2/s) \qquad (11.08)$$

De modo que, vetorialmente, será:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (kgm^2/s) \qquad (11.09)$$

- L – módulo do momento angular do corpo rígido em relação ao seu eixo de rotação;
- $\vec{L}$ – momento angular do corpo rígido em relação ao seu eixo de rotação;
- I – momento de inércia do corpo rígido em relação ao seu eixo de rotação;
- ω – módulo da velocidade angular do corpo rígido;
- $\vec{\omega}$ – velocidade angular do corpo rígido.

É importante observar que o momento angular $\vec{L}$ e o momento linear I são obtidos a partir do mesmo eixo de rotação.

De acordo com a **Equação 11.08**, podemos observar que, de fato, o momento de inércia I depende da massa do corpo e de como ela se distribui em relação ao eixo de rotação. Ele mede a resistência que o corpo afere à rotação. Concluímos, assim, que, para um mesmo momento angular L, quanto maior o momento de inércia I de um corpo, menor será a sua velocidade angular ω: $L = \uparrow I\ \omega\downarrow$.

USANDO O *ALGODOO* 11.0

A **Figura 11.03** e a **Figura 11.04** a seguir mostram duas simulações do *Algodoo* em que um mesmo corpo rígido (esfera homogênea) está girando em relação ao seu eixo fixo de rotação. Nelas, podemos observar as orientações dos seus momentos angulares, além dos seus módulos.

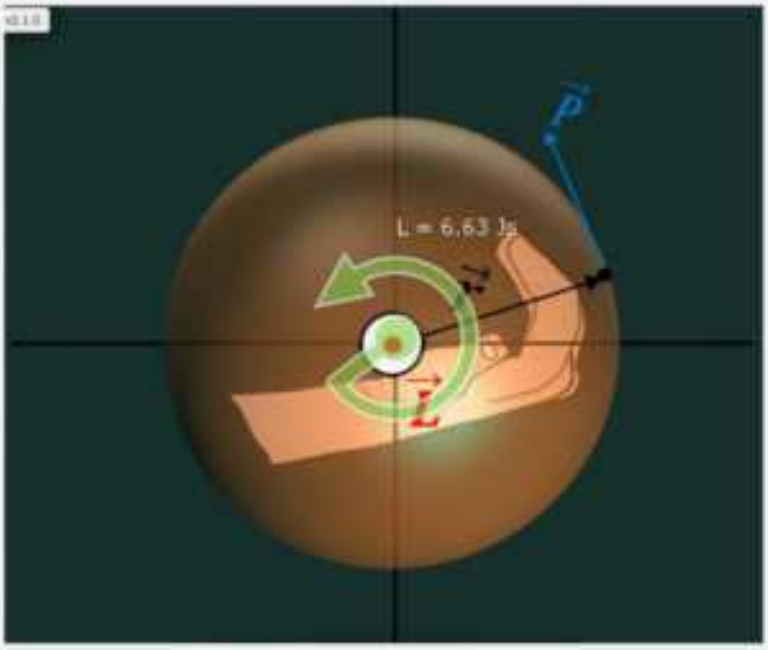


Figura 11.03: Recorte de captura de tela do *software Algodoo*. Momento angular de uma esfera homogênea girando em sentido anti-horário.
Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=265084*.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

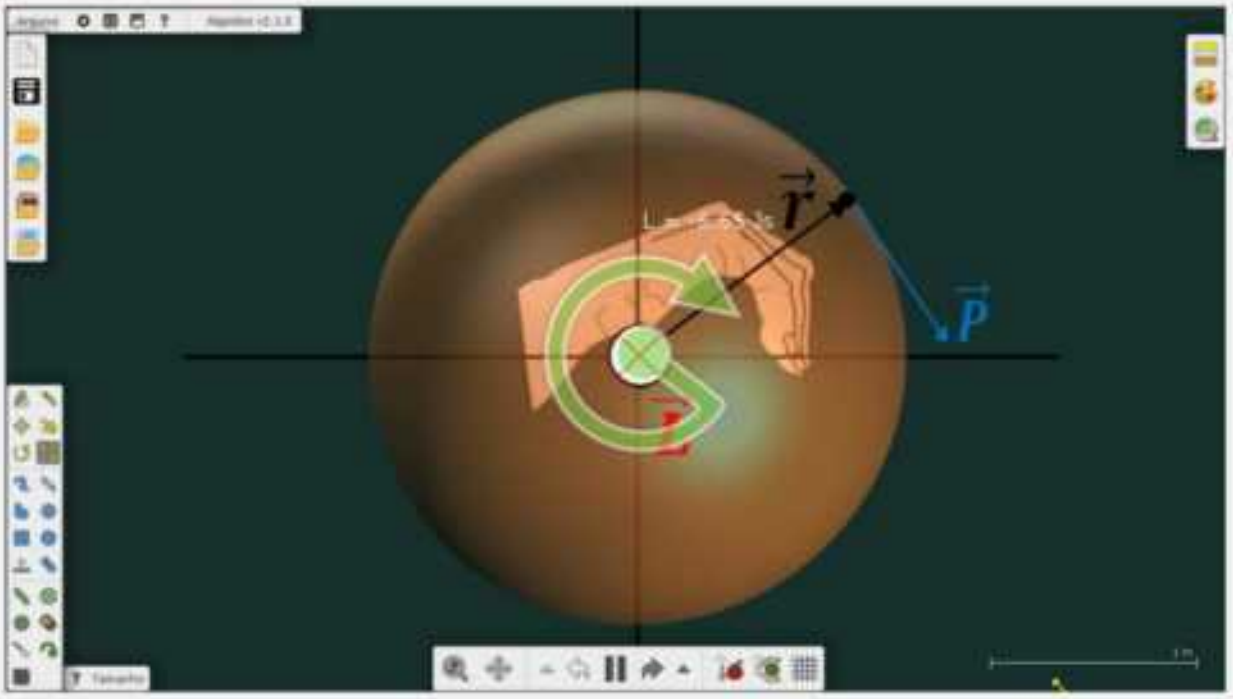


Figura 11.04: Recorte de captura de tela do *software Algodoo*. Momento angular de uma esfera homogênea girando em sentido horário. Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=265085*.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

Clique no *link https://youtu.be/HWZmuKkNZI0* ou escaneie o *QR code* ao lado para assistir ao vídeo do tutorial da animação.

Podemos observar que, na **Figura 11.03 e na Figura 11.04**, as orientações dos momentos angulares do corpo rígido são para fora e para dentro da tela do *software*, respectivamente.

TAREFA PROPOSTA 11.0

Para esta tarefa, você vai precisar determinar, além de outras grandezas, o momento angular de um disco rígido homogêneo de massa $m = 8\ kg$ e raio $r = 1{,}5\ m$ que está girando com velocidade angular constante, no sentido anti-horário, em torno do eixo fixo que passa pelo seu centro de massa. Use $\pi = 3{,}14$ quando necessário.

Primeiro, use a **Tabela 11.01** para calcular o módulo da velocidade linear na extremidade do disco:

$\boldsymbol{r}$ *(m)*	$\boldsymbol{f}$ *(Hz)*	$\boldsymbol{v = 2\pi rf}$ *(m/s)*
1,5	0,5	

Tabela 11.01: Tarefa Proposta 11.0 – Cálculo do módulo da velocidade linear da extremidade do disco.

Calcule, agora, a velocidade angular do disco usando a **Tabela 11.02**:

$\boldsymbol{f}$ *(Hz)*	$\boldsymbol{\omega = 2\pi f}$ *(rad/s)*
0,5	

Tabela 11.02: Tarefa Proposta 11.0 – Cálculo da velocidade angular do disco.

Sabendo que o momento de inércia de um disco rígido homogêneo em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa pode ser calculado por $I = \frac{1}{2}mr^2$, em que m é a massa do disco e r o seu raio, use a **Tabela 11.03** e calcule o momento de inércia do disco rígido em questão.

$\boldsymbol{m}$ *(kg)*	$\boldsymbol{r}$ *(m)*	$\boldsymbol{I = \frac{1}{2}mr^2}$ *(kgm²)*
8	1,5	

Tabela 11.03: Tarefa Proposta 11.0 – Cálculo do momento de inércia do disco.

Em seguida, use os resultados da **Tabela 11.02** e da **Tabela 11.03** para calcular a intensidade do momento angular do disco rígido homogêneo, usando a **Tabela 11.04** a seguir para isso:

I (kgm^2)	$\omega = (rad/s)$	$L = I\omega$ (kgm^2/s)

Tabela 11.04: Tarefa Proposta 11.0 – Cálculo do módulo do momento angular do disco.

Por fim, use a **Tabela 11.05** para fazer o passo a passo do método de aplicação da regra da mão direita para obtenção da orientação do momento angular do disco, baseado na **Figura 11.01**:

(a)	**(b)**
(c)	**(d)**

Tabela 11.05: Tarefa Proposta 11.0 – Tabela para uso do passo a passo da aplicação da regra da mão direita para obtenção da orientação do momento angular do disco, de acordo com a sequência da Figura 10.01.

Agora, clique **AQUI** e confira na simulação do *Algodoo* se os resultados conferem. Se desejar verificar o valor do momento de inércia do disco, basta clicar com o botão direito do *mouse* sobre ele ir até a guia "***informações***" que o valor estará lá.

E aí, acertou?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

11.01 – Uma partícula de massa 500 g move-se a uma velocidade escalar constante de 12 m/s sobre um círculo de raio 3 m, conforme a **Figura 11.05** a seguir:

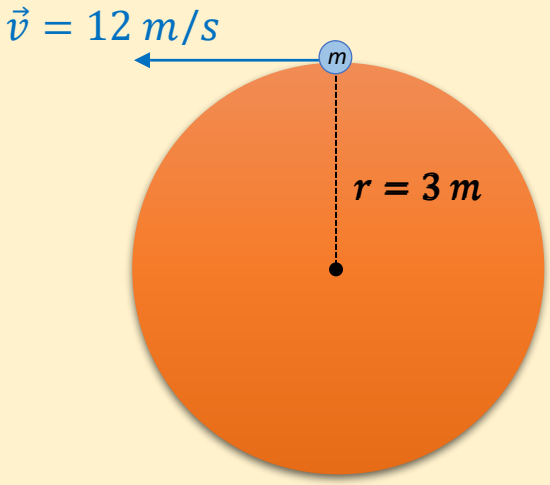
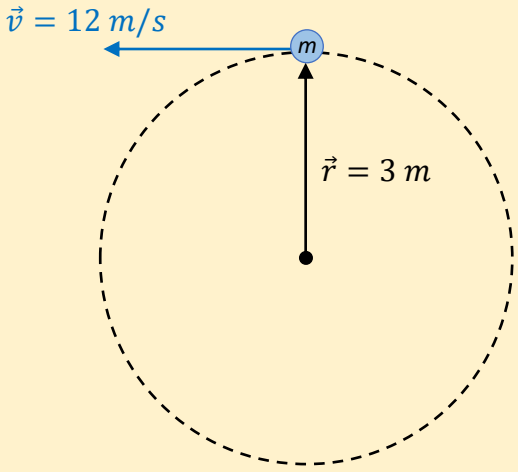


Figura 11.05: Exercício Resolvido 11.01: Momento angular de uma partícula de massa *m* em movimento circular uniforme.

Sabendo que a partícula descreve um movimento circular e uniforme, calcule o momento angular $\vec{L}$ da partícula em relação ao centro da sua trajetória circular.

Solução: Primeiro, vamos traçar os vetores velocidade $\vec{v}$ e posição $\vec{r}$ da partícula, que são fundamentais para se obter o seu momento angular $\vec{L}$ em relação ao centro da trajetória circular:



Agora, vamos calcular o módulo do momento angular da partícula em relação ao centro da trajetória circular usando a **Equação 11.01**:

$$L = rmvsen\emptyset$$

Como o movimento da partícula é circular, a sua velocidade é tangente à trajetória e,

portanto, ângulo formado entre $\vec{r}$ e $\vec{v}$ é de 90º (observe que a velocidade $\vec{v}$ da partícula tem a mesma orientação do seu momento linear $\vec{P}$).

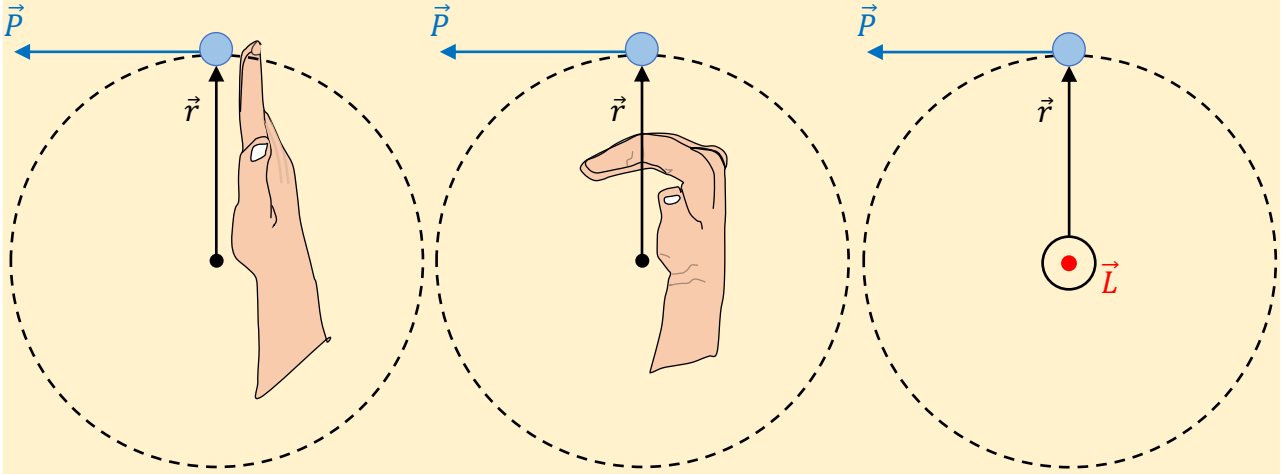
Substituindo os dados do problema na Equação:

$$L = rmvsen90°$$

$$L = 3\,.\,0{,}5\,.\,12\,.\,1$$

$$\boxed{L = 18\ kgm^2/s}$$

Para se obter a orientação do momento angular $\vec{L}$ da partícula, vamos usar a regra da mão direita:



Portanto, o momento angular da partícula tem intensidade de $18\ kgm^2/s$ e orientação para fora do plano do papel (plano onde estão os vetores $\vec{r}$ e $\vec{v}$).

11.02 – Um ponto material de massa $m = 4\ kg$ realiza um movimento circular uniforme de raio $r = 0{,}4\ m$ e velocidade escalar $v = 8\ m/s$. Sendo "O" o centro da circunferência em questão. calcule, em relação ao ponto O:

a) o momento de inércia do ponto material;

b) a velocidade angular do ponto material;

c) o módulo do momento angular do ponto material.

Soluções

Letra (a) – O momento de inércia I de um ponto material pode ser obtido por meio da equação:

$$I = mr^2$$

Sendo $m = 4\ kg$ e $r = 0{,}4\ m$:

$$I = 4\ .\ 0{,}4^2$$

$$I = 4\ .\ 0{,}16$$

$$\boxed{I = 0{,}64\ kg.m^2}$$

Letra (b) – Vamos usar a **Equação 2.04** para calcular a velocidade angular ω do ponto material:

$$v = \omega r$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Sendo $v = 8\ m/s$ e $r = 0{,}4\ m$:

$$\omega = \frac{8}{0{,}4}$$

$$\omega = \frac{8}{0{,}4}$$

$$\boxed{\omega = 20\ rad/s}$$

Letra (c) – Para calcular a intensidade do momento angular do ponto material, vamos usar a **Equação 11.01**:

$$L = rmvsen\emptyset$$

No movimento circular e uniforme, o vetor velocidade é perpendicular ao vetor posição do ponto material em relação à origem, ou seja, forma um ângulo de 90º com o raio da trajetória.

Sendo $r = 0{,}4\ m$, $m = 4\ kg$, $v = 8\ m/s$ e $sen90° = 1$:

$$L = 0{,}4\ .\ 4\ .\ 8\ .\ 1$$

$$\boxed{L = 12{,}8\ kgm^2/s}$$

O momento angular do ponto material também poderia ser calculado por meio da **Equação 11.08**:

$$L = I\omega$$

$$L = 0{,}64\ .\ 20$$

$$\boxed{L = 12{,}8\ kgm^2/s}$$

Portanto, o momento de inércia em relação à origem do sistema, a velocidade angular e o módulo do momento angular do ponto material são, respectivamente, iguais a $0{,}64\ kg.m^2$, $20\ rad/s$ e $12{,}8\ kgm^2/s$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

11.01 – Uma partícula de massa 300 g move-se a uma velocidade escalar constante de 15 m/s sobre um círculo de raio 2 m, conforme a **Figura 11.06** a seguir:

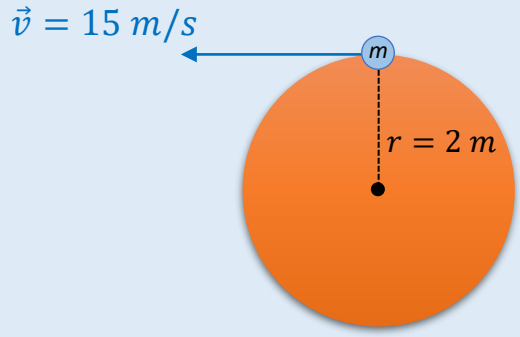


Figura 11.06: Exercício Proposto 11.01: Momento angular de uma partícula de massa *m* em movimento circular uniforme.

Sabendo que a partícula descreve um movimento circular e uniforme, calcule o momento angular $\vec{L}$ da partícula em relação ao centro da sua trajetória circular.

11.02 – Um ponto material de massa $m = 1{,}5\ kg$ realiza um movimento circular uniforme de raio $r = 0{,}6\ m$ e velocidade escalar $v = 24\ m/s$. Sendo "O" o centro da circunferência em questão. calcule, em relação ao ponto O:

a) o momento de inércia do ponto material;

b) a velocidade angular do ponto material;

c) o módulo do momento angular do ponto material.

Saiba mais...

Para obtermos a orientação do momento angular, podemos usar a regra da mão direita para produtos vetoriais:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

em que $\vec{r}$ é o vetor posição da partícula em relação à origem O e $\vec{P}$, o seu momento linear.

Sendo o módulo do momento angular dado por:

Módulo do primeiro vetor	x	Módulo do segundo vetor	x	Seno do ângulo formado entre os dois vetores

Assim:

$$L = rPsen\emptyset$$

$$\boxed{L = rmvsen\emptyset}$$

A sua orientação, como já mencionado, deve ser obtido utilizando a regra da mão direita, sendo o polegar direito definindo seu sentido.

Além disso, podemos obter o torque resultante em função da variação do momento angular partindo da equação do momento angular:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

Derivando ambos os lados em relação ao tempo, usando a regra do produto para as derivadas:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

Sendo $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ e $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m(\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a})$$

Como o produto vetorial entre dois vetores iguais é 0:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m(\vec{0} + \vec{r} \times \vec{a})$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a})$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{a}$$

Sendo $\vec{F}_R = m\vec{a}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_R$$

Acontece que $\vec{r} \times \vec{F}_R$ é a definição de produto vetorial para o torque resultante $\vec{\tau}_R$ produzido por uma força resultante $\vec{F}_R$. Logo:

$$\boxed{\vec{\tau}_R = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

REVISÃO

Momento Angular

Momento Angular $\vec{L}$ e é umas das principais grandezas da cinemática rotacional, pois mede a quantidade de movimento de um corpo em rotação em relação a um ponto fixo, que pode ou não ser o mesmo do eixo de rotação. O momento angular é, portanto, uma grandeza vetorial e o equivalente angular do momento linear.

Portanto, quanto maior o momento angular de um corpo em movimento de rotação, mais difícil é de fazê-lo parar de girar.

A orientação do momento angular de uma partícula em relação a um ponto pode ser obtida pela regra da mão direita (**Figura 11.01**), e seu módulo por meio das equações:

$$L = rmvsen\emptyset \quad (kgm^2/s) \qquad (11.01)$$

$$L = r_{\perp}mv \quad (kgm^2/s) \qquad (11.02)$$

$$L = rP_{\perp} \quad (kgm^2/s) \qquad (11.03)$$

- L – intensidade do momento angular;
- r – módulo do vetor posição da partícula em relação à origem;
- m – massa da partícula;
- v – módulo da velocidade linear da partícula;
- $\emptyset$ – menor ângulo formado entre $\vec{r}$ e $\vec{P}$ ou $\vec{r}$ e $\vec{v}$ quando possuem uma origem em comum;
- $r_{\perp}$ – distância perpendicular entre a origem e o prolongamento de $\vec{P}$ $(rsen\emptyset)$;
- $P_{\perp}$ – módulo da componente de $\vec{P}$ que é perpendicular a $\vec{r}$ $(Psen\emptyset)$.

Momento Angular e a Segunda Lei de Newton

De acordo com a segunda lei de Newton:

$$\vec{F}_R = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

De modo que para o movimento rotacional, essa equação tem a sua equivalente angular dada pelas equações:

$$\tau_R = \frac{\Delta L}{\Delta t} \quad (kgm^2/s) \qquad (11.04)$$

$$\vec{\tau}_R = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \quad (kgm^2/s) \qquad (11.05)$$

- τ_R – módulo do torque resultante;
- ΔL – variação do módulo do momento angular;
- Δt – variação do tempo;
- $\vec{\tau}_R$ – torque resultante;
- $\Delta \vec{L}$ – variação do momento angular;
- Δt – variação do tempo.

A **Equação 11.05** é essencial na mecânica, pois é uma forma de expressar a segunda lei de Newton para movimentos rotacionais. Isso significa que, para alterar o momento angular, um torque deve atuar durante um certo intervalo de tempo.

Momento Angular de um Sistema de Partículas

Para um sistema de partículas, o seu momento angular total $\vec{L}_T$ é a soma vetorial dos momentos angulares de todas as partículas que compõe esse sistema em relação a uma origem O, ou seja, em relação a um mesmo ponto:

$$\vec{L}_T = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \ldots + \vec{L}_n \quad (kgm^2/s) \qquad (11.06)$$

- $\vec{L}_T$ – momento angular total do sistema;
- $\vec{L}_1$ – momento angular da partícula 1;
- $\vec{L}_2$ – momento angular da partícula 2;
- $\vec{L}_3$ – momento angular da partícula 3;
- $\vec{L}_n$ – momento angular da enésima partícula.

Já a variação dos momentos angulares de cada partícula resulta em uma variação do momento angular total do sistema $\Delta \vec{L}_T$:

$$\Delta\vec{L}_T = \Delta\vec{L}_1 + \Delta\vec{L}_2 + \Delta\vec{L}_3 + \ldots + \Delta\vec{L}_n \quad (kgm^2/s) \qquad (11.07)$$

- $\Delta\vec{L}_T$ – variação do momento angular total do sistema;
- $\Delta\vec{L}_1$ – variação do momento angular da partícula 1;
- $\Delta\vec{L}_2$ – variação do momento angular da partícula 2;
- $\Delta\vec{L}_3$ – variação do momento angular da partícula 3;
- $\Delta\vec{L}_n$ – variação do momento angular da enésima partícula.

É importante observar que as forças internas do sistema se anulam e as responsáveis por gerar o torque resultante para variar o momento angular são as **forças externas** ao sistema. Portanto, apenas um **torque resultante externo** e **não nulo** altera o momento angular de um sistema em rotação.

Momento Angular de um Corpo Rígido

Para calcular a intensidade do momento angular $\vec{L}$ de um corpo rígido, que possui momento de inércia I e velocidade angular $\vec{\omega}$ em relação a um eixo fixo de rotação; podemos usar a equação a seguir:

$$L = I\omega \quad (kgm^2/s) \qquad (11.08)$$

De modo que, vetorialmente, será:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (kgm^2/s) \qquad (11.09)$$

- L – módulo do momento angular do corpo rígido em relação ao seu eixo de rotação;
- $\vec{L}$ – momento angular do corpo rígido em relação ao seu eixo de rotação;
- I – momento de inércia do corpo rígido em relação ao seu eixo de rotação;
- ω – módulo da velocidade angular do corpo rígido;
- $\vec{\omega}$ – velocidade angular do corpo rígido.

É importante observar que o momento angular $\vec{L}$ e o momento linear I são obtidos a partir do mesmo eixo de rotação.



CAPÍTULO 12

CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- ✓ Verificar que quando o torque externo resultante é nulo, há a conservação do momento angular de um corpo ou um sistema.
- ✓ Mostrar que o produto do momento de inércia com a velocidade angular de um sistema permanece constante em relação aos instantes inicial e final de um sistema em rotação em que não sofra um torque resultante externo.
- ✓ Usar o *software* de simulação Física *Algodoo* como extensão do aprendizado do capítulo.

Capítulo 12 Conservação do Momento Angular

Da mesma forma que a energia (lei da conservação da energia) e o momento linear (lei da conservação do momento linear) podem se conservar, o momento angular (lei da conservação do momento angular) também pode. Para isso, é necessário que o torque resultante $\vec{\tau}_R$ produzido pelas forças externas que atuam sobre um corpo em rotação seja nulo. Assim, o momento angular $\vec{L}$ do corpo permanece constante.

Partindo da **Equação 11.05**, que representa a segunda lei de Newton para movimentos rotacionais:

$$\vec{\tau}_R = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$$

Se o torque resultante for nulo:

$$\vec{0} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$$

$$\Delta\vec{L} = \vec{0}\,.\,\Delta t$$

$$\boxed{\Delta\vec{L} = \vec{0}}$$

Para que não exista variação do momento angular $\Delta\vec{L}$ de um corpo, os seus momentos angulares inicial $\vec{L}_1$e final $\vec{L}_2$ precisam ser iguais, ou seja, o seu momento angular permanece constante com o passar do tempo.

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 = constante \quad (kgm^2/s) \qquad (12.01)$$

Em módulo:

$$L_1 = L_2 = constante \quad (kgm^2/s) \qquad (12.02)$$

- $\vec{L}_1$ –momento angular inicial do corpo;
- $\vec{L}_2$ – momento angular final do corpo;
- L_1 – módulo do momento angular inicial do corpo;
- L_2 – módulo do momento angular final do corpo.

A **Equação 12.01** e a **Equação 12.02** nos permitem concluir que, para situações em que o somatório dos torques externos que agem sobre um sistema ao longo de um eixo for nulo, a componente do momento angular ao longo desse eixo é constante, sejam quais forem as mudanças que ocorram dentro desse sistema. Isso implica que, em situações desse tipo, podemos apenas considerar os estados inicial e final do sistema, sem nos preocupar o que acontece durante o processo.

Suponha que a massa de um corpo seja redistribuída, em um determinado instante, de modo que seu momento de inércia sofra uma variação. De acordo com a **Equação 12.02**, apesar dessa mudança, o momento angular desse corpo permanece constante, o que nos sugere que para isso ocorrer, a sua velocidade angular também deve mudar. Assim:

$$L_1 = L_2$$

Sendo $L = I\omega$:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \ (kgm^2/s) \quad \textit{(Lei da Conservação do Momento Angular)} \qquad (12.03)$$

- I_1 –momento inércia inicial;
- ω_1 – velocidade angular inicial;
- I_2 – momento de inércia final;
- ω_2 – velocidade angular final.

A lei da conservação do momento angular (**Equação 12.03**) implica que se de um estado inicial para um estado final de um sistema:

- o momento de inércia aumentar $(I\uparrow)$ → a intensidade da velocidade angular $(\omega\downarrow)$ diminui;
- o momento de inércia diminuir $(I\downarrow)$ → a intensidade da velocidade angular $(\omega\uparrow)$ aumenta.

Em resumo:

- $(I\uparrow) \rightarrow (\omega\downarrow)$;
- $(I\downarrow) \rightarrow (\omega\uparrow)$.

A **Figura 12.01** a seguir ilustra o aumento da velocidade angular de uma pessoa devido à diminuição do seu momento de inércia, mas mantendo seu momento angular conservado.

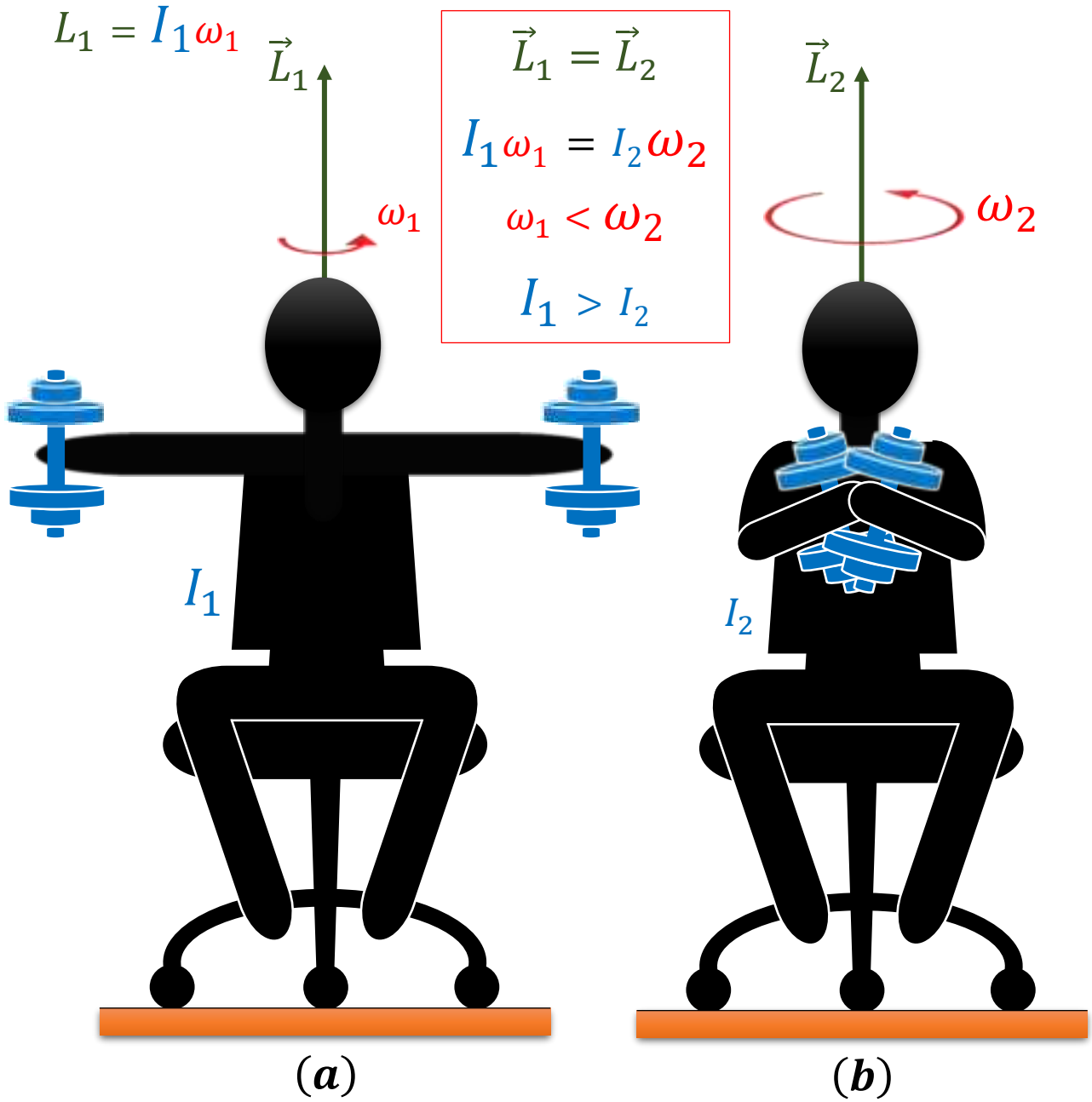


Figura 12.01: Representação de uma pessoa girando em uma cadeira giratória. Em (a), a pessoa está com os braços abertos segurando os halteres enquanto gira. Em (b), a pessoa está com os braços recolhidos, diminuindo o seu momento de inércia e aumentando a sua velocidade angular.

A **Figura 12.01** mostra uma pessoa sentada em uma cadeira giratória, sem colocar os pés no chão, que pode girar livremente em torno de um eixo vertical. Na **Figura 12.01(a)**, a pessoa, com os braços abertos, possui momento de inércia I_1 e velocidade angular ω_1.

Em seguida, a pessoa fecha os braços e, na **Figura 12.01(b)**, seu momento de inércia passa a ser I_2 e sua velocidade angular, ω_2. Note que quando os braços estão abertos, a massa da pessoa está distribuída mais longe do eixo de rotação em relação a quando os braços estão juntos do corpo e seu momento de inércia I_1 é maior que o momento de inércia final I_2, mas os momentos angulares $\vec{L}_1$ e $\vec{L}_2$, que coincidem com o eixo de rotação e apontam para cima, em ambas as situações, são os mesmos, ou seja, se conservam.

A diminuição do momento de inércia faz com que a velocidade de giro do conjunto cadeira e pessoa aumente devido à conservação do momento angular. Os halteres usados pela pessoa é para intensificar a variação do momento de inércia para obter um efeito mais considerável.

Na **Figura 12.02** a seguir, temos, agora, um exemplo de um patinador girando quase que livremente em torno do seu eixo vertical.

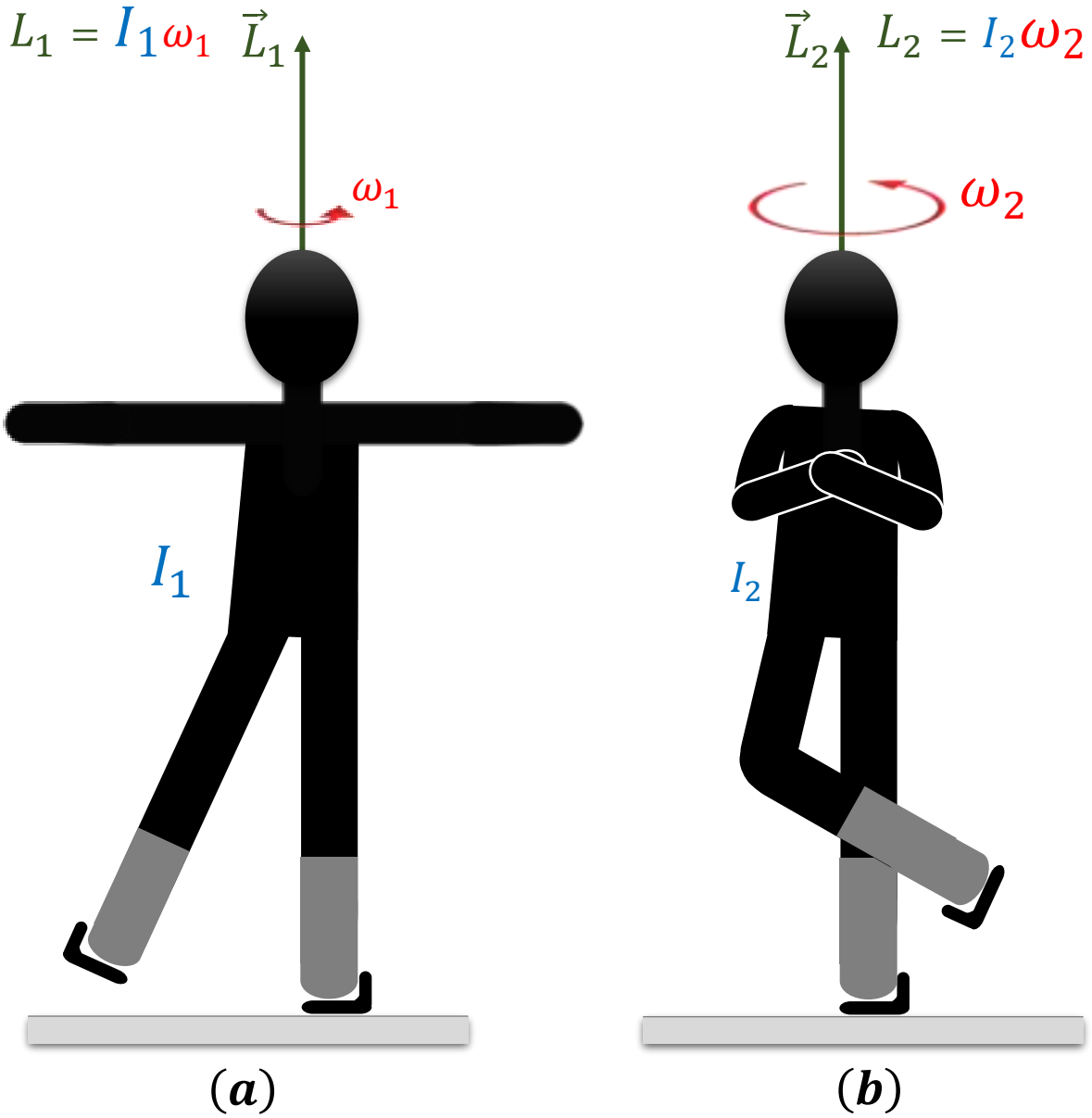


Figura 12.02: Representação de um patinador de gelo girando quase que livremente em torno do seu eixo vertical. Em (a), o patinador está girando com os braços e perna direita abertos. Em (b), o patinador recolheu os braços para junto do seu corpo e cruzou a perna direita para próximo da perna esquerda, diminuindo seu momento de inércia em relação à situação anterior.

Para o caso do patinador, o mesmo princípio da pessoa com a cadeira giratória é válido. Com os braços e pernas abertos, o patinador tem um momento de inércia maior do que com os braços fechados e sua velocidade angular é maior quando o momento de inércia é menor, para que o momento angular seja conservado.

Para o caso de um atleta realizando um salto mortal, à medida que ele sobe, seu momento de inércia diminui em relação ao eixo de rotação que passa pelo seu centro de massa pelo fato de ele se encolher, aumentando sua velocidade angular. Na descida, ele faz o processo inverso, se estirando novamente e diminuindo sua velocidade angular devido ao aumento do seu momento de inércia. Veja a situação descrita na **Figura 12.03** a seguir.

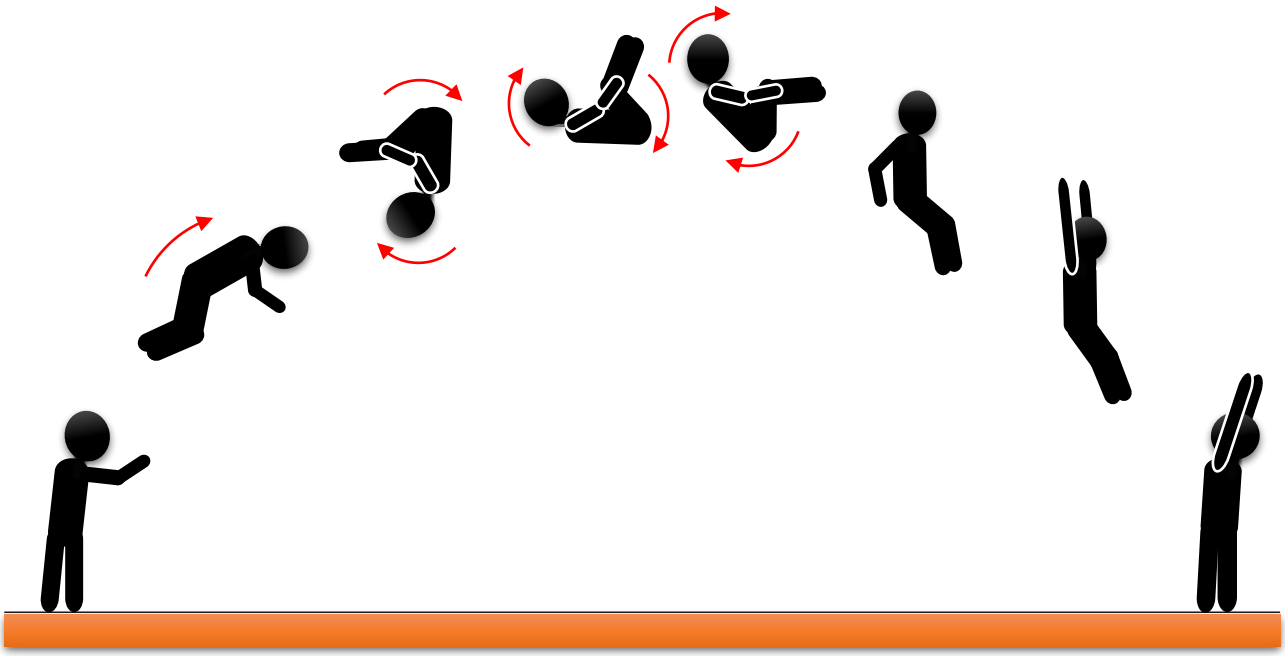


Figura 12.03: Representação de um atleta realizando um salto mortal. Na subida, ele aumenta sua velocidade angular devido à diminuição do seu momento de inércia. Na descida, ele diminui sua velocidade angular devido à diminuição do seu momento de inércia.

Vários são os exemplos que poderíamos usar para explicar a conservação do momento angular. O fato é que essa lei vai além dos limites da mecânica newtoniana, sendo muito importante, por exemplo, na mecânica quântica, pois, além de ser a unidade básica da constante de Planck, que é a constante característica do mundo quântico, o momento angular é um conceito fundamental para descrição do movimento do átomo e sua nuvem eletrônica.

Para finalizar, podemos, de acordo com a **Tabela 12.01** a seguir, mais uma vez, fazer um paralelo entre as equivalências das grandezas lineares e rotacionais.

Translação	Rotação	Conexão Translação/Rotação
S	θ	$S = r\theta$
v	ω	$v = r\omega$
a	α	$a_t = r\alpha$
m	I	$I = mr^2$ *(partícula)*

F	τ	$\tau = rFsen\emptyset$
$K = \frac{1}{2}MV_{CM}^2$	$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$	$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}MV_{CM}^2$ *(Rolamento)*
$P = mv$	$L = I\omega$	$L = rmvsen\emptyset$
$W = Fd$	$W = \tau\Delta\theta$	
$F_R = ma$	$\tau_R = I\alpha$	
$F_R = \frac{\Delta P}{\Delta t}$	$\tau_R = \frac{\Delta L}{\Delta t}$	
$P_1 = P_2 = m_1v_1 = m_2v_2$	$L_1 = L_2 = I_1\omega_1 = I_2\omega_2$	*Lei de conservação*

Tabela 12.01: Equivalência entre grandezas e equações lineares e rotacionais.

USANDO O *ALGODOO* 12.0

A **Figura 12.04** a seguir mostra duas situações em que o momento de inércia de um sistema é mudado devido a concentração da massa próximo ao eixo de rotação.

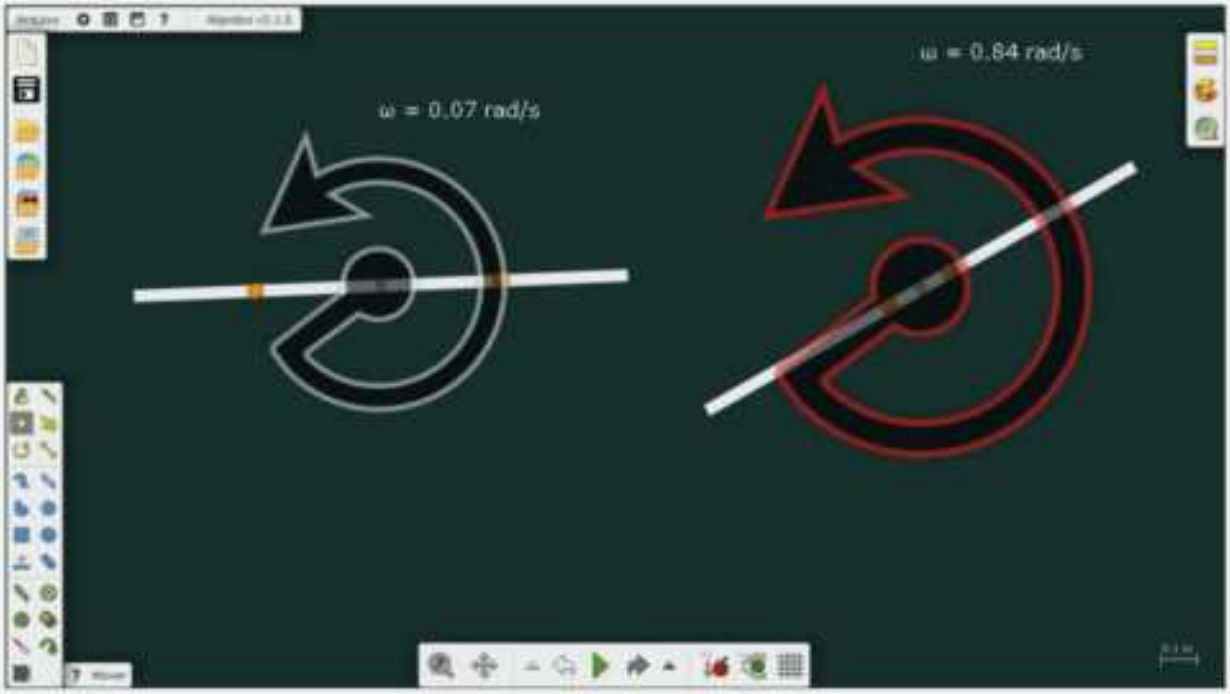


Figura 12.04: Captura de tela do *software Algodoo*. Conservação do momento angular mesmo com a variação do momento de inércia de um sistema. Fonte: os autores.

Simulação disponível em: *http://www.algodoo.com/algobox/details.php?id=264865*.

Faça o *download* do aplicativo *Algodoo* gratuitamente em *http://www.algodoo.com/download/* para poder visualizar a animação.

Para baixar a extensão em português do *software*, clique *aqui*.

Clique no *link https://youtu.be/TyLODm-ViZY* ou escaneie o *QR code* ao lado para assistir ao vídeo do tutorial da animação.

Podemos observar que, na **Figura 12.04**, apesar da variação do momento de inércia I dos dois sistemas apresentados na simulação, há a conservação do momento angular $\vec{L}$. Para isso ocorrer, a diminuição do momento de inércia foi compensada com o aumento da velocidade angular.ω.

TAREFA PROPOSTA 12.0

Para esta tarefa, vamos usar duas barras, com massas desprezíveis, girando com eixo fixo de rotação no seu ponto médio, representando os exemplos da pessoa girando na cadeira giratória (**Figura12.01**) e do patinador girando em torno do seu eixo vertical (**Figura 12.02**). As barras possuem dois objetos idênticos, com 10 kg cada, com distâncias do eixo de rotação diferentes nas duas situações. Queremos aqui calcular, inicialmente, o momento de inércia de cada sistema e, usando do Princípio da Conservação do Momento Angular, vamos verificar o que acontece com a velocidade angular devido à mudança do momento de inércia.

Vamos considerar cada sistema como se fosse uma partícula para facilitar os cálculos. Assim, use os dados da **Tabela 12.02** para calcular o momento de inércia em cada situação:

Situação	**m** *(kg)*	$\boldsymbol{r}$ *(m)*	$\boldsymbol{I = mr^2}$ (kgm^2)
1	20	0,2975	
2	20	0,085	

Tabela 12.02: Tarefa Proposta 12.0 – Cálculo dos momentos de inércia de dois sistemas com momentos angulares constantes.

Considere que, na situação 2, a velocidade angular do sistema passou a ser $\omega_2 = 12{,}56\, rad/s$. Então, utilize, na **Tabela 12.03** a seguir, os resultados que você encontrou na **Tabela 12.02** para verificar qual era a velocidade angular ω_1 na situação inicial, levando em consideração que houve a conservação do momento angular.

Situação	$\boldsymbol{I}$ (kgm^2)	$\boldsymbol{\omega}$ *(rad/s)*	$\boldsymbol{I_1\omega_1 = I_2\omega_2}$
1			
2		12.56	- - - - - - - -

Tabela 12.03: Tarefa Proposta 12.0 – Cálculo da velocidade angular inicial ω_1 do sistema angular conservativo.

Clique **AQUI** e confira na simulação do *Algodoo* se os resultados conferem.

E aí, acertou?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

12.01 – Um disco homogêneo, de massa $M = 10\ kg$ e raio $R = 50\ cm$, gira em torno de um eixo vertical, que passa pelo seu centro, com uma velocidade angular $\omega = 10\ rad/s$. Um torque $\tau = 50\ Nm$ é aplicado ao disco, no sentido anti-horário, durante um intervalo de tempo $\Delta t = 2\ s$. De acordo com o enunciado, determine:

a) o módulo da variação do momento angular do disco;

b) a nova velocidade angular do disco.

Dado: Equação do momento de inércia em relação ao centro do disco homogêneo $\left(I = \frac{1}{2}MR^2\right)$.

Soluções

Letra (a) – Para calcular o módulo da variação do momento angular do disco devido a um torque resultante externo, vamos usar a **Equação 11.04**:

$$\tau_R = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

$$\Delta L = \tau_R . \Delta t$$

Sendo $\tau_R = 50\ Nm$ e $\Delta t = 2\ s$:

$$\Delta L = 50\ .\ 2$$

$$\boxed{\Delta L = 100\ kgm^2/s}$$

Note que o torque foi aplicado no sentido anti-horário (positivo) e, portanto, a variação do momento angular também deve ser positiva.

Letra (b) – Aqui, o momento angular do disco não se conserva, pois existe um torque não nulo agindo sobre ele. Assim, o momento angular final do disco é a soma do inicial mais a sua variação:

$$\Delta L = L_2 - L_1$$

$$L_2 = L_1 + \Delta L$$

Para calcular a intensidade do momento angular de um corpo rígido em relação a um eixo fixo de rotação, podemos usar a **Equação 11.08**:

$$L = I\omega$$

Substituindo:

$$I_2\omega_2 = I_1\omega_1 + \Delta L$$

Como o item (b) pede a nova velocidade angular, vamos isolar ω_2:

$$\omega_2 = \frac{I_1\omega_1}{I_2} + \frac{\Delta L}{I_2}$$

O momento de inércia do disco não muda entre os instantes inicial e final, ou seja, $I_1 = I_2$:

$$\omega_2 = \frac{I_1\omega_1}{I_2} + \frac{\Delta L}{I_2}$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{\Delta L}{I_2}$$

Sendo o momento de inércia do disco homogêneo igual a $I = \frac{1}{2}MR^2$:

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{\Delta L}{\frac{1}{2}MR^2}$$

Como $\omega_1 = 10\ rad/s$, $\Delta L = 100\ kgm^2/s$, $M = 10\ kg$ e $R = 50\ cm = 0{,}5\ m$:

$$\omega_2 = 10 + \frac{100}{\frac{1}{2}10\ .0{,}5^2}$$

$$\omega_2 = 10 + \frac{100}{5\ .0{,}25}$$

$$\omega_2 = 10 + \frac{20}{0{,}25}$$

$$\omega_2 = 10 + 80$$

$$\boxed{\omega_2 = 90\ rad/s}$$

12.02 – Um estudante está sentado em uma cadeira giratória com halteres nas mãos, conforme mostra a **Figura 12.05**. Ele faz um pequeno esforço e começa a girar, inicialmente, com os braços abertos **[Figura 12.05(a)]**, com velocidade angular $\omega_1 = 3\ rad/s$. Nesse instante, seu momento angular é $\vec{L}_1$ e seu momento de inércia é $I_1 = 70\ kgm^2$. Em seguida, ele fecha os braços **[Figura 12.05(b)]**, ficando assim com momento angular $\vec{L}_2$, momento de inércia $I_2 = 30\ kgm^2$ e velocidade angular ω_2. Sabendo que, depois de iniciado o giro da cadeira, o torque externo resultante que age sobre o sistema cadeira/aluno é nulo, além do atrito do eixo da cadeira ser desprezível, determine, para esse sistema:

a) a velocidade angular final do estudante ω_2;

b) o módulo momento angular inicial L_1;

c) o módulo do momento angular L_2;

d) O módulo da variação do momento angular ΔL.

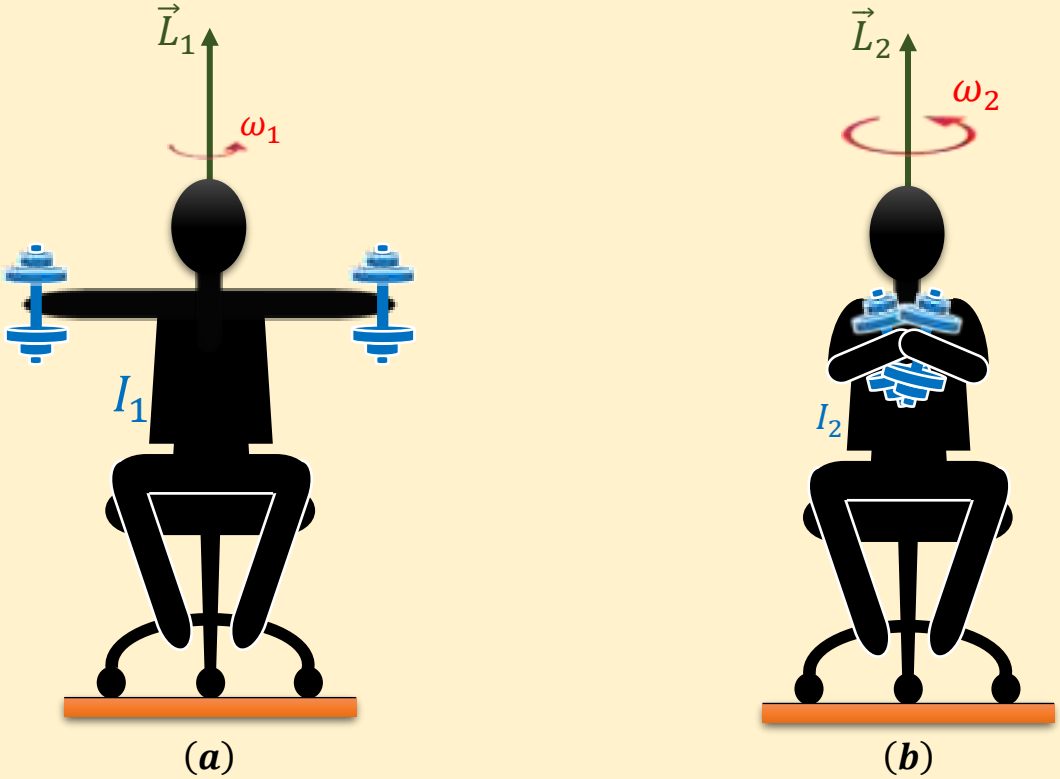


Figura 12.05: Exercício Resolvido 12.02 - Representação de um estudante girando em uma cadeira giratória. Em (a), a pessoa está com os braços abertos segurando os halteres enquanto gira. Em (b), a pessoa está com os braços recolhidos.

Soluções

Letra (a) – Como, depois de iniciado o movimento, o torque resultante que age sobre o sistema é nulo, há a conservação do momento angular do sistema. Assim, vamos usar a **Equação 12.03** (Lei da Conservação do Momento Angular) para calcular a velocidade angular final do estudante:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Sendo $I_1 = 70\ kgm^2$, $\omega_1 = 3\ rad/s$ e $I_2 = 30\ kgm^2$:

$$70\,.\,3 = 30\omega_2$$

$$210 = 30\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{210}{30}$$

$$\boxed{\omega_2 = 7\ rad/s}$$

Letra (b) – Para calcular o módulo do momento angular inicial L_1 do estudante ou do sistema (a velocidade angular é a mesma), vamos usar a **Equação 11.08**:

$$L_1 = I_1\omega_1$$

Sendo $I_1 = 70\ kgm^2$ e $\omega_1 = 3\ rad/s$:

$$L_1 = 70\,.\,3$$

$$\boxed{L_1 = 210\ kgm^2/s}$$

Letra (c) – Para calcular o módulo do momento angular final L_2, vamos, novamente, usar a **Equação 11.08**:

$$L_2 = I_2\omega_2$$

Sendo $I_2 = 30\ kgm^2$ e $\omega_2 = 7\ rad/s$:

$$L_2 = 30\,.\,7$$

$$\boxed{L_2 = 210\ kgm^2/s}$$

Observe que nem precisaríamos calcular a intensidade do momento angular final L_2 do estudante, tendo em vista que houve a conservação do seu momento angular $(L_1 = L_2)$.

Letra (d) – Para a o módulo da variação do momento angular ΔL, o mesmo conceito do item (c) é valido $(L_1 = L_2)$. Como o momento angular se conservou, não houve variação. Logo:

$$\boxed{\Delta L = 0}$$

Perceba que, de fato, houve a conservação, pois:

$$\Delta L = L_2 - L_1$$

$$\Delta L = 210 - 210$$

$$\boxed{\Delta L = 0}$$

Portanto, o módulo da velocidade angular final ω_2, o módulo do momento angular inicial L_1, o módulo do momento angular L_2 e o módulo da variação do momento angular ΔL do sistema cadeira/estudante são, respectivamente, iguais a $7\ rad/s$, $210\ kgm^2/s$, $210\ kgm^2/s$ e 0 (conservação do momento angular).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

12.01 – Um disco homogêneo, de massa $M = 2\ kg$ e raio $R = 30\ cm$, gira em torno de um eixo vertical, que passa pelo seu centro, com uma velocidade angular $\omega = 25\ rad/s$. Um torque $\tau = 3\ Nm$ é aplicado ao disco, no sentido anti-horário, durante um intervalo de tempo $\Delta t = 3\ s$. De acordo com o enunciado, determine:

a) o módulo da variação do momento angular do disco;

b) a nova velocidade angular do disco.

Dado: $\left(I = \frac{1}{2}MR^2\right)$ – momento de inércia do disco homogêneo em relação ao seu centro

12.02 – Um estudante está sentado em uma cadeira giratória com halteres nas mãos, conforme mostra a **Figura 12.06** ao lado. Ele faz um pequeno esforço e começa a girar, inicialmente, com os braços fechados **[Figura 12.06(a)]**, com velocidade angular $\omega_1 = 15\ rad/s$. Nesse instante, seu momento angular é $\vec{L}_1$ e seu momento de inércia é $I_1 = 40\ kgm^2$. Em seguida, ele abre os braços **[Figura 12.06(b)]**, ficando assim com momento angular $\vec{L}_2$, momento de inércia $I_2 = 100\ kgm^2$ e velocidade angular ω_2. Sabendo que, depois de iniciado o giro da cadeira, o torque externo resultante que age sobre o sistema cadeira/aluno é nulo, além do atrito do eixo da cadeira ser desprezível, determine, para esse sistema:

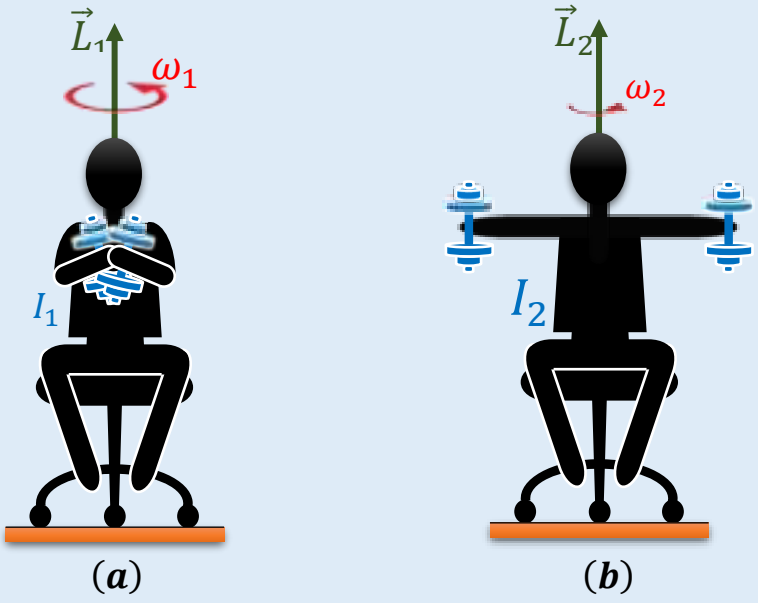


Figura 12.06: Exercício Proposto 12.02 - Representação de um estudante girando em uma cadeira giratória. Em (a), a pessoa está com os braços fechados segurando os halteres enquanto gira. Em (b), a pessoa está com os braços abertos.

a) a velocidade angular final do estudante ω_2;

b) o módulo momento angular inicial L_1;

c) o módulo do momento angular L_2;

d) O módulo da variação do momento angular ΔL.

Saiba mais...

CURIOSIDADE: O momento angular de um corpo é a quantidade de movimento rotacional que esse corpo possui, ou seja, quanto maior o seu momento angular, mais difícil é de parar esse movimento de giro. Em outras palavras, a rotação de um corpo faz com que ele ganhe estabilidade no seu eixo de rotação em relação a outro eixo vertical de rotação. Isso explica o porquê objetos em movimento rotacionais não tombam, como um pneu de uma bicicleta ou um pião, por exemplo. Esse fenômeno é chamado de **giroscópio** ou movimento de **precessão**.

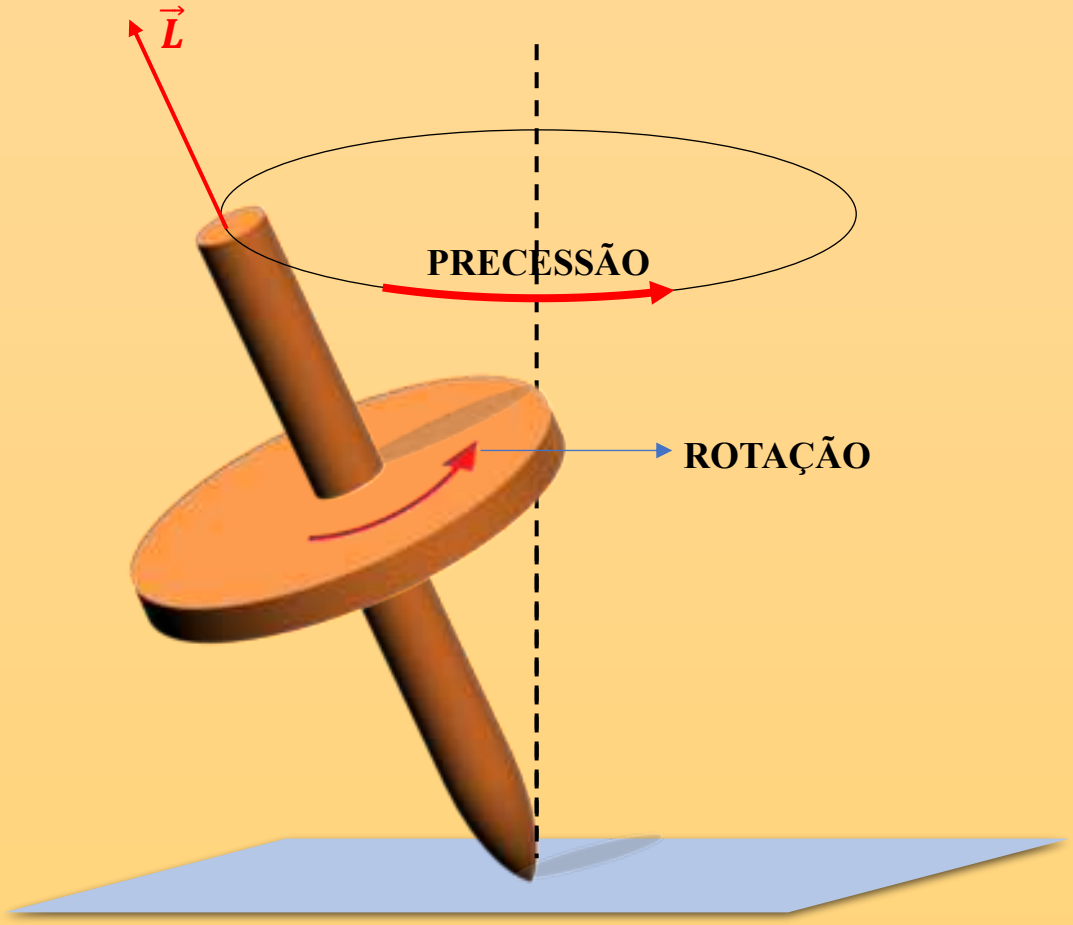


Figura 12.07: Pião girando em torno do seu eixo de rotação. O seu momento angular resiste a queda induzida pela força peso que atua no eixo vertical, o mesmo onde acontece a precessão.

REVISÃO

Conservação do Momento Angular

Se o torque resultante $\vec{\tau}_R$ produzido pelas forças externas que atuam sobre um corpo em rotação for nulo, o seu momento angular $\vec{L}$ em relação ao seu eixo de rotação permanece constante. Assim, haverá a **conservação do momento angular** do corpo.

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 = constante \quad (kgm^2/s) \qquad (12.01)$$

Em módulo:

$$L_1 = L_2 = constante \quad (kgm^2/s) \qquad (12.02)$$

- $\vec{L}_1$ –momento angular inicial do corpo;
- $\vec{L}_2$ – momento angular final do corpo;
- L_1 – módulo do momento angular inicial do corpo;
- L_2 – módulo do momento angular final do corpo.

Essa é uma das leis de conservação da Física, chamada de **Lei da conservação do momento Angular**. Também podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \quad (kgm^2/s) \quad (Lei\ da\ Conservação\ do\ Momento\ Angular) \qquad (12.03)$$

- $\vec{L}_1$ –momento angular inicial do corpo;
- $\vec{L}_2$ – momento angular final do corpo;
- L_1 – módulo do momento angular inicial do corpo;
- L_2 – módulo do momento angular final do corpo.

A lei da conservação do momento angular implica que se de um estado inicial para um estado final de um sistema:

- o momento de inércia aumentar $(I\uparrow)$ → a intensidade da velocidade angular $(\omega\downarrow)$ diminui;

- o momento de inércia diminuir $(I\downarrow)$ → a intensidade da velocidade angular $(\omega\uparrow)$ aumenta.

Em resumo:

- $(I\uparrow) \rightarrow (\omega\downarrow)$;
- $(I\downarrow) \rightarrow (\omega\uparrow)$.

De modo geral, as grandezas angulares possuem suas correspondentes lineares, como mostrado a seguir.

Translação	**Rotação**	**Conexão Translação/Rotação**
S	θ	$S = r\theta$
v	ω	$v = r\omega$
a	α	$a_t = r\alpha$
m	I	$I = mr^2$ *(partícula)*
F	τ	$\tau = rFsen\emptyset$
$K = \frac{1}{2}MV_{CM}^2$	$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$	$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}MV_{CM}^2$ *(Rolamento)*
$P = mv$	$L = I\omega$	$L = rmvsen\emptyset$
$W = Fd$	$W = \tau\Delta\theta$	
$F_R = ma$	$\tau_R = I\alpha$	
$F_R = \frac{\Delta P}{\Delta t}$	$\tau_R = \frac{\Delta L}{\Delta t}$	
$P_1 = P_2 = m_1v_1 = m_2v_2$	$L_1 = L_2 = I_1\omega_1 = I_2\omega_2$	*Lei de conservação*

Respostas dos Exercícios Propostos

CAPÍTULO 1

1.01 – $\Delta\theta = 4\ rad$

1.02 – $\alpha_m = 5\ rad/s^2$

1.03 – $t = 6\ s$

CAPÍTULO 2

2.01 – $f = 0{,}02\ Hz$

$\omega = 0{,}04\pi\ rad/s$

$r = 20\ m$

2.02 – $\alpha_c = 3{,}2\ m/s^2$

CAPÍTULO 3

3.01 – $f_B = 3\ Hz$

CAPÍTULO 4

4.01 – $K = 3{,}675\ J$

4.02 – $I_Q = 0{,}135\ kg.m^2$

4.03 – $I = 0{,}25\ kg.m^2$

CAPÍTULO 5

5.01 – $\tau = 19{,}5\ N.m$

5.02 – $\tau = 1{,}26\ N.m$

CAPÍTULO 6

6.01 – $W = 1{,}925\ .\ 10^{-2}\ J$

6.02 – $W = 9{,}27\ J$

CAPÍTULO 7

7.01 – $\omega = 9{,}42\ rad/s$

$v_A = 9{,}42\ m/s$

$v_B = 4{,}71\ m/s$

$v_C = 0$

7.02 – $V_{CM} = 5{,}6\ m/s$

$V_{SUPERIOR} = 11{,}2\ m/s$

$V_{INFERIOR} = 0$

CAPÍTULO 8

8.01 – *a*) $V_{CM} = 15\ m/s$

b) $\omega = 75\ rad/s$

c) $I_{CM} = 0{,}16\ kg.m^2$

d) $K_{ROTAÇÃO} = 450\ J$

e) $K_{TRANSLAÇÃO} = 900\ J$

e) $K = 1350\ J$

CAPÍTULO 9

9.01 – $\alpha_{CM} = 4{,}73\ m/s^2$

CAPÍTULO 10

10.01 – **Figura 2.25(a):** $\vec{\tau} = 37{,}6\ N.m$, ⊗

Figura 2.25(b): $\vec{\tau} = 20{,}79\ N.m$, ⊗

Figura 2.25(c): $\vec{\tau} = 27{,}5\ N.m$, ⊙

CAPÍTULO 11

11.01 – $\vec{L} = 9\ kg.m^2/s$, ⊙

11.02 – *a*) $I = 0{,}54\ kg.m^2$

b) $\omega = 40\ rad/s$

c) $L = 21{,}6\ kg.m^2/s$

CAPÍTULO 12

12.01 – *a*) $\Delta L = 9\ kg.m^2/s$

b) $\omega_2 = 125\ rad/s$

12.02 – *a*) $\omega_2 = 6\ rad/s$

b) $L_1 = 600\ kg.m^2/s$

c) $L_2 = 600\ kg.m^2/s$

d) $\Delta L = 0$

Referências Bibliográficas

ALGODOO. Disponível em:< http://www.algodoo.com/>. Acesso em: 28 jan. 2023.

ALGODOO.COM. **Fórum Algodoo.** Disponível em: <http://www.algodoo.com/forum/viewtopic.php?f=30&t=12229&p=86459&hilit=tradução&sid=2ed19f082184cf645d2a3a6a7d9a9be8#p86459>. Acesso em: 28 nov. 2023.

FERRARO, Nicolau Gilberto; PENTEADO, Paulo Cesar M.; TORRES, Carlos Magno A.; **Física** - Vereda Digital - Volume único. 1. Ed. – São Paulo: Moderna, 2012.

GOGOY, Leandro; AGNOLO, Rosana Maria Dell'; MELO, Wolney C. **Multiversos: Ciências da Natureza:** matéria, energia e a vida – 1. ed. – São Paulo: Editora FTD, 2020.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física:** Mecânica - Volume 1. 10ª ed. Tradução: Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

MARTINI, Glorinha *et al.* **Conexões com a Física** – 3. ed. – São Paulo: Moderna, 2016.

NUSSENZVEIG, H. Moisés. **Curso de Física Básica 1:** Mecânica. 4. Ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

RAMALHO, Francisco Júnior; FERRARO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo Antônio de Toledo. **Os Fundamentos da Física:** Mecânica, Volume 1. São Paulo: Moderna, 2015.

SILVA, Anderson. **Simulações Algodoo MNPEF** - YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/@andersonifrn/playlists>. Acesso em: 28 nov. 2023.

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. Sears & Zemansky - **Física I:** Mecânica - Volume 1. 12ª ed. Tradução de Sonia Midori Yamamoto. São Paulo: Pearson Universidades, 2008.



Anderson Gomes da Silva

Nascido em Santa Cruz/RN, no dia 04/07/1986, é professor das redes municipal de Parnamirim/RN e do Estado do Rio Grande do Norte.

Filho de Geraldo Ferreira da Silva e Francisca Zeferino Gomes Silva, sempre estudou em escola pública e se graduou em Licenciatura em Física no ano de 2015 pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte.

Também é Licenciado em Matemática pela Unifael (2021). Leciona Física desde 2016 na Escola Estadual Professor Eliah Maia do Rêgo e tem experiência como professor de Matemática na rede municipal de ensino de Parnamirim/RN.

Lecionou Física por sete anos (2016 a 2022) na Escola Estadual Professor Antônio Basílio Fílho, em Parnamirm/RN.

Casado com Jhennyfer Carolyne do Nascimento Silva, é pai da pequena Melissa Martins da Silva de sete anos de idade.

Recentemente (2025), concluiu o Mestrado do Curso de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física – MNPEF – Polo 10 IFRN.

Muito caseiro, gosta assistir a futebol, jogar videogame e passear com a esposa e com a filha.



Melquisedec Lourenço da Silva

Melquisedec Lourenço da Silva é Doutor em Física pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte e professor/pesquisador no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte.

Com uma sólida trajetória acadêmica, dedica-se ao estudo e ensino de Física, com ênfase em novas metodologias para a sala de aula. Como orientador de trabalhos de mestrado e de graduação, tem contribuído ativamente para a formação de novos pesquisadores, consolidando sua atuação na produção de conhecimento científico e na inovação no ensino da disciplina.

Neste livro, Algodoo e a Dinâmica Rotacional: Uma Proposta Didática Interativa, os autores apresentam uma abordagem inovadora para o ensino da Física, utilizando o *software Algodoo* para tornar conceitos como energia cinética de rotação e rolamento mais acessíveis e interativos para o leitor.

Destinado a professores e alunos, o material combina teoria e prática, promovendo uma aprendizagem significativa e alinhada às demandas educacionais contemporâneas.