

EVALUACIÓN DEL ERROR EN ESTIMACIONES (A,U,Θ)

A. A. LEGRÁ LOBAINA

Instituto Superior Minero Metalúrgico de Moa, Holguín, Cuba

alegra@ismm.edu.cu

Recibido 07/08/2017 - Aceptado 03/07/2018

DOI: 10.15628/holos.2018.6193

RESUMO

Se presenta un resumen de las expresiones formales de las clases $U\Theta$ y ΘU de los estimadores (A,U,Θ) distinguiéndose dos casos: se conoce la deriva $\epsilon(P)$; o $\epsilon(P)$ debe determinarse por ser desconocida. Considerando las expresiones clásicas para la evaluación

numérica de errores de interpolación, de la varianza del error de estimación para Kriging y de la varianza de interpolación de J. K. Yamamoto, se propone una nueva expresión general para evaluar el error de cualquier estimación del tipo (A,U,Θ).

PALAVRAS-CHAVE: Estimador (A,U,Θ), Error de estimación, Kriging, varianza del error de estimación, varianza de interpolación.

EVALUATION OF THE ERROR IN (A,U,Θ) ESTIMATIONS

ABSTRACT

A summary of the formal expressions of the classes $U\Theta$ and ΘU of the estimator (A,U,Θ) is presented where two cases are distinguished: the drift $\epsilon(P)$ is known a priori; and the drift should be determined because is unknown. The classic expressions for evaluate the error of

interpolation, the error variance for Kriging and the interpolation variance of J. K. Yamamoto are analyzed and consequently a new expression valid to evaluate the error of any estimation (A,U,Θ) is proposed.

KEYWORDS: Estimator (A,U,Θ), Estimation error, Kriging, error variance, Interpolation variance

1 INTRODUCCIÓN

Supóngase que existe una relación funcional (generalmente desconocida) $U=F(P)$ que vincula las coordenadas (de igual escala) P con la variable dependiente U que modela cierta propiedad de un objeto.

Siguiendo las ideas de Legrá (2017) se define el conjunto de los datos:

$$W = \left\{ (P_i; U_i) \mid P_i \in \mathbb{R}^n ; U_i \in \mathbb{R} \right\} \quad (1)$$

El propósito de los estimadores puntuales es obtener aproximadamente el valor de U en un punto $P_e \in \mathbb{R}^n$, o sea: hallar $U_e \approx U_R = F(P_e)$.

La eficacia de cualquier estimador matemático se sustenta en tener disponible un procedimiento que, a partir de los datos disponibles, permita obtener para las coordenadas P_e un resultado U_e que puede ser convenientemente cercano al valor correcto buscado U_R en la coordenada P_e . Nótese que en cualquier caso siempre será necesario tener una idea de cuán cercano están los valores U_e y U_R .

Cuando es conocido U_R entonces se puede afirmar que el error del cálculo es $E_e = U_R - U_e$. Lo cierto es que en la mayoría de los casos se desconoce U_R y solo se puede obtener por métodos indirectos una aproximación del error E_e .

Las estimaciones puntuales del tipo (A,U,Θ) son el resultado de cálculos matemáticos y a priori se sabe que el resultado es aproximado (excepto en los puntos P_i para los estimadores exactos,) por lo que tiene relevancia teórica y práctica disponer de expresiones que permitan evaluar adecuadamente el error de la estimación por estos métodos.

En el presente trabajo se analizan algunas expresiones conocidas para la evaluación del error de estimación puntual en los casos particulares más notorios de estimadores (A,U,Θ) , tales como el kriging y los interpoladores polinómicos, con el objetivo de sistematizar y unificar en una expresión común la evaluación de este error para cualquier estimador de ese tipo.

2 RESUMEN DE LOS ESTIMADORES (A,U,Θ)

Sea la expresión Θ_{ij} que puede definirse de una de las formas siguientes:

$$a. \quad \Theta_{ij} = \xi(P_i; P_j) \quad (2)$$

Donde ξ es una única función real que opera sobre las coordenadas P_i y P_j . Un ejemplo de amplio uso es la distancia euclidiana d (Bronshtein, 2007). Se denomina $d_{ij} = d(P_i; P_j)$ a la distancia euclidiana entre los puntos P_i y P_j .

$$b. \quad \Theta_{ij} = \psi_i(P_j) \quad (3)$$

Donde ψ_i es una función (de un conjunto denominado Base de Funciones) que se evalúa en el punto P_j .

El lector deberá considerar en lo que sigue que el producto escalar (denotado \bullet) de dos vectores filas, de dos vectores columnas e incluso de un vector fila por un vector columna o

viceversa, se calcula como la suma de todos los resultados que se obtienen al multiplicar dos a dos los elementos de igual índice de cada vector. El producto entre matrices o entre matrices y vectores se realiza, cuando es posible, de la forma usual (Bronshtein, 2007).

Sea una función real $\varepsilon(P)$ que se denomina Deriva o Desplazamiento de la variable U la cual puede ser establecida de antemano o determinarse de manera que cumpla ciertas condiciones prefijadas. Para modelos geométricos simples se asume generalmente como un polinomio de grado pequeño que asocia un número real a cada coordenada P .

Para los estimadores (A, U, Θ) hay dos casos esenciales:

A. Se tiene certeza de que existe la deriva $\varepsilon(P)$ y se conoce su expresión.

En este caso se estima U_e mediante las expresiones equivalentes:

$$\text{Clase } U\Theta: \quad U_e = [A]^{-1}[U] \cdot [\Theta_e] + \varepsilon(P_e) \quad (4)$$

Que se puede escribir como: $U_e = [L] \cdot [\Theta_e] + \varepsilon(P_e)$

$$\text{Clase } \Theta U: \quad U_e = [A_T]^{-1}[\Theta_e] \cdot [U] + \varepsilon(P_e) \quad (5)$$

Que se puede escribir como: $U_e = [\lambda_e] \cdot [U] + \varepsilon(P_e)$

Donde:

$$[A] = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \dots & \Theta_{1m} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \dots & \Theta_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Theta_{m1} & \Theta_{m2} & \dots & \Theta_{mm} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Dando por hecho de que esta matriz $[A]$ y su transpuesta $[A_T]$ tienen inversas.

$$[U] = \begin{bmatrix} U_1 - \varepsilon(P_1) \\ U_2 - \varepsilon(P_2) \\ \dots \\ U_m - \varepsilon(P_m) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$[\Theta_e] = \begin{bmatrix} \Theta_{e1} \\ \Theta_{e2} \\ \dots \\ \Theta_{em} \end{bmatrix} \quad (8)$$

La ventaja de usar la expresión (4) consiste en que los valores del vector $[L]$ se calculan una sola vez para estimar para varios puntos diferentes P_e . Si se usa la expresión (5) será necesario calcular los valores de $[\lambda_e]$ para cada punto P_e lo cual aumenta la laboriosidad del proceso de crear modelos de malla.

B. Se conoce que existe la deriva $\varepsilon(P)$ pero se desconoce su expresión.

Supóngase que la deriva puede escribirse como una combinación lineal según los coeficientes $[b] = [b_1, \dots, b_t]$, de t funciones conocidas: $\theta_1(P), \dots, \theta_t(P)$.

$$\varepsilon(P) = \sum_{k=1}^t b_k \theta_k(P) = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1(P) \\ \dots \\ \theta_t(P) \end{bmatrix} = [b] \cdot [\theta(P)] \quad (9)$$

Clase U Θ : Los valores de [L] y de [b] se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m L_i \Theta_{ij} + \sum_{k=1}^t b_k \theta_k(P_j) = U_j \\ \sum_{i=1}^m L_i \theta_h(P_i) = 0 \\ j = 1, 2, \dots, m \\ h = 1, 2, \dots, t \end{array} \right. \quad (10)$$

Que se escribe matricialmente:

$$\begin{bmatrix} A & \theta_{mt} \\ \theta_{tm} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_W \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\text{Donde } [U_W] = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_m \end{bmatrix} \quad (12)$$

Y el valor estimado se obtiene:

$$U_e = \sum_{i=1}^m L_i \Theta_{ei} + \sum_{k=1}^t b_k \theta_k(P_e) \quad (13)$$

Que se escribe matricialmente:

$$U_e = \begin{bmatrix} A & \theta_{mt} \\ \theta_{tm} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_W \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Theta_{e1} \\ \dots \\ \Theta_{em} \\ \theta_1(P_e) \\ \dots \\ \theta_t(P_e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Theta_e \\ \theta_e \end{bmatrix} \quad (14)$$

Clase ΘU : Los valores de [λ_e] y de [b] se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \lambda_i \Theta_{ji} + \sum_{k=1}^t b_k \theta_k(P_j) = \Theta_{ej} \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i \theta_h(P_i) = \theta_h(P_e) \\ j = 1, 2, \dots, m \\ h = 1, 2, \dots, t \end{array} \right. \quad (15)$$

Que se escribe matricialmente:

$$\begin{bmatrix} A_T & \theta_{mt} \\ \theta_{tm} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_e \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_e \\ \theta_e \end{bmatrix} \quad (16)$$

Y el valor estimado se obtiene:

$$U_e = \begin{bmatrix} A_T & \theta_{mt} \\ \theta_{tm} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Theta_e \\ \theta_e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_W \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_e \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_W \\ 0 \end{bmatrix} = [\lambda_e] \cdot [U_W] = \sum_{i=1}^m \lambda_i U_i \quad (17)$$

Nuevamente se da por hecho que los sistemas (10) y (15) tienen solución.

El lector podrá notar que si se estima en la clase $U\Theta$, usando las expresiones (11) y (14), entonces el sistema (11) solo tiene que ser resuelto una vez y sus soluciones permiten estimar U_e para cualquier valor de P_e . Una ventaja adicional en esta última clase es que también se puede mostrar explícitamente la expresión general de la deriva.

3 EXPRESIONES CONOCIDAS PARA APROXIMAR EL ERROR DE ESTIMACIÓN

Para este tipo de situación práctica, las posibles vías para cuantificar los errores puntuales o globales de las estimaciones son:

- A partir de un subconjunto de valores conocidos se estiman los valores en locaciones P_e donde también se conocen los valores de U y se comparan los resultados estimados U_e con los valores conocidos. El procedimiento denominado Validación Cruzada (Alfaro, 2017) es un ejemplo bien conocido de este enfoque que permite evaluar la calidad general del estimador para los datos disponibles.
- Dada una expresión, calcular una aproximación del error de estimación puntual. Este enfoque permite evaluar la calidad local y general del estimador para los datos disponibles pero está lastrado por la incertidumbre que provoca el hecho de no estar disponibles los valores reales de U para comparar los resultados de las estimaciones.

Como ya se ha dicho en el presente trabajo se trabaja en el segundo enfoque y la meta es sistematizar y unificar en una fórmula la evaluación del error de estimación puntual (A, U, Θ).

Interpolación de funciones polinómicas

Este caso será explicado para $n=1$ o sea los m datos ($P_i; U_i$) son de la forma ($X_i; U_i$). Para el conjunto de m funciones de interpolación $\{\psi_1(x)=1; \psi_2(x)=x; \psi_3(x)=x^2; \dots; \psi_m(x)=x^{m-1}\}$ se conocen las formulaciones equivalentes de Lagrange y de Newton (Álvarez, 2007) que permiten hallar la expresión del polinomio de interpolación que existe si todos los puntos tienen abscisas x_i diferentes entre sí.

La fórmula de Lagrange tiene la forma $U_e = \sum_{i=1}^m L_i(x) U_i$ donde $L_i(x) = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^m (x - x_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^m (x_i - x_j)}$. El

error de estimación se obtiene mediante la expresión $R(x) = \frac{F^{(n+1)}(C)}{(n+1)!} \prod_{j=1}^m (x - x_j)$ donde C es un valor desconocido que debe evaluarse en la derivada de orden $n+1$ de la función desconocida $F(x)$.

La fórmula de Newton es $U_e = f(x_1) + \sum_{i=2}^m f[x_1; x_2; \dots; x_i] \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j)$ donde $f[x_1; x_2; \dots; x_i]$ es la llamada diferencia dividida de orden i que se obtiene iterativamente mediante la relación $f[x_1; x_2; \dots; x_i] = \frac{f[x_2; x_3; \dots; x_i] - f[x_1; x_2; \dots; x_{i-1}]}{x_i - x_1}$. El error se puede aproximar mediante la expresión $R_m(x) = f[x_1; x_2; \dots; x_i; x] \prod_{j=1}^m (x - x_j)$ la cual es útil y fácil de aplicar para estos casos.

Debe recordarse que cuando los valores de x_i se consideran relacionados de una manera especial con los nodos de un Polinomio de Chebyshev entonces se minimiza el error de interpolación polinómica (Kincaid, 1991).

Fórmulas semejantes pero de cierta complejidad teórica y práctica pueden obtenerse para interpolaciones con polinomios de varias variables según Isaacson (1994), Kincaid (1991) y Saniee (2007). Para la Interpolación Lineal con Triangulización pueden mencionarse los trabajos de Handscomb (1995), Waldrom (1996) y Legrá Lobaina (2014).

Inverso de una potencia de la Distancia (IPD)

Se conocen varios trabajos para obtener expresiones específicas que aproximen los errores de estimación mediante IPD: Achilleos (2008) y Babak-Deutsch (2008). Para la Modificación de Shepard del método IPD, el error de estimación ha sido valorado especialmente por Shepard (1968).

Funciones de Base Radial (FBR)

Se han publicado estudios que presentan expresiones particulares que aproximen los errores de estimación mediante FBR. Algunos de ellos son los siguientes:

- En el trabajo de Wu (1993) se introduce una compleja formulación variacional para el error local de estimación mediante FBR. Se deduce que este error puede ser acotado mediante un término que depende de la Transformada de Fourier de la función interpolada y de cierta función especial.
- Shaback (1995) desarrolla una interesante relación teórica entre el error de estimación por FBR y la matriz (6).
- Otros trabajos con resultados teóricos atractivos son los de: Madych y Nelson (1988), Baxter (1992), Wendland (1997), Light y Wayne (1998) y Hubbert y Morton (2004).

Kriging Universal

El Kriging Universal es probablemente el más representativo de la familia de estimadores puntuales que presenta la Geoestadística, parte de la Matemática que desde la segunda mitad del siglo XX surgió como conjunto de modelos y métodos para resolver problemas teóricos y prácticos de la Geología, la Minería y otras disciplinas científicas y tecnológicas.

Aunque el enfoque primario de la Geoestadística es probabilístico-estadístico, en este texto solo serán mencionados los elementos imprescindibles para entender la cuestión operacional del estimador. Siguiendo la exposición de Giraldo Henao (2005) se conoce el conjunto W según se describe en (1) y se asume que la variable dependiente $U(P)$ se describe (página 45 del texto citado) como la suma de una componente aleatoria $S(P)$ más una componente determinística $\varepsilon(P)$ a la que llama tendencia (deriva), es decir:

$$U(P) = S(P) + \varepsilon(P) \quad (18)$$

En este contexto se exige que se cumpla:

- La esperanza matemática $E[S(P)]=0$
- La varianza $V[S(P)]=\sigma^2$ (denominada la varianza de los datos U_i ; $i=1,\dots,m$)
- $E[U(P)]= \varepsilon(P)$

Ahora, explica el autor citado: si la tendencia $\varepsilon(P)$ se asume por la forma (9) entonces la estimación U_e se define como según la expresión (17).

Si se pide que este estimador sea insesgado, es decir: $E[U_e]= \varepsilon(P_e)$, y considerando las expresiones (9) y (17) se puede deducir uno de los subsistemas de (15):

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \theta_h(P_i) = \theta_h(P_e) \quad (19)$$

Donde: $h=1,2,\dots,t$

Ahora es necesario encontrar un procedimiento matemático para encontrar los valores del vector $\begin{bmatrix} \lambda_e \\ b \end{bmatrix}$ de manera que la varianza del error de estimación sea mínima. Es decir debe minimizarse $\sigma_e^2 = V[U_e - U_R]$.

Considerando que existe (Díaz Viera, 2002) una función autorizada de la distancia: $\gamma(d)$, denominada semivariograma, que se relaciona con la covarianza $C(d)$ mediante la expresión:

$$\gamma(d) = \sigma^2 - C(d) \quad (20)$$

Y recordando que $d_{ij} = d(P_i; P_j)$ entonces se escribe:

$$\gamma(d_{ij}) = \gamma_{ij} = \sigma^2 - C(d_{ij}) \quad (21)$$

Giraldo Henao (2005) muestra que:

$$\sigma_e^2 = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j \gamma(d_{ij}) + 2 \sum_{i=1}^m \lambda_i \gamma(d_{ei}) + \sum_{k=1}^t b_k \left[\sum_{i=1}^m \lambda_i \theta_k(P_i) - \theta_k(P_e) \right] \quad (22)$$

Derivando sucesivamente (22) con respecto a $\lambda_1, \dots, \lambda_m, b_1, \dots, b_t$ y considerando las notaciones:

$$\Theta_{ij} = \gamma(d_{ij}) = \gamma_{ij}$$

$$\Theta_{ei} = \gamma(d_{ei}) = \gamma_{ei}$$

Se obtiene el sistema (15) que se puede escribir en la forma matricial (16) que permite obtener el vector $\begin{bmatrix} \lambda_e \\ b \end{bmatrix}$ que interviene en la estimación según (17). Samper y Carrera (1990) muestran que la varianza del error se escribe en la forma compacta:

$$\sigma_e^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \gamma(d_{ei}) + \sum_{k=1}^t b_k \theta_k(P_e) \quad (23)$$

Que se puede escribir en la forma matricial general:

$$\sigma_e^2 = \begin{bmatrix} \lambda_e \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Theta_e \\ \theta_e \end{bmatrix} \quad (24)$$

Pueden hacerse las siguientes reflexiones:

- a. La expresión (23) tiene en cuenta:
 - El comportamiento de la variabilidad de U, modelada mediante el semivariograma como una función de la distancia euclidiana entre puntos de R^n
 - La relación geométrica entre los puntos de W a través de la matriz $[A_T]$ igual a $[A]$ para este caso
 - La relación geométrica y geoestadística entre los puntos de W y el punto P_e mediante $[\Theta_e]$
 - El comportamiento de la deriva $\varepsilon(P)$ en el punto P_e mediante el vector $[\theta_e]$.
- b. La génesis de esta expresión parte de que $U(P)$ tiene una componente aleatoria pero como demuestra Legrá Lobaina (2017) los resultados (16) y (17) son consistentes aunque $U(P)$ fuera totalmente determinístico.

A continuación mediante ejemplos se argumentará que el resultado (24) también puede ser operacionalmente válido cuando $U(P)$ sea determinístico si la función Θ es, en un contexto de cálculo, equivalente a un semivariograma autorizado.

Sean los puntos de la Tabla 1 que ejemplifica un conjunto que contiene 4 puntos:

Tabla 1: Un ejemplo de 4 puntos para $n=2$

x	Y	U
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	2

Ejemplo 1:

Se ajustará un modelo m-funcional (Legrá Lobaina, 2017) tomando:

$$\psi_1(x;y)=1 \quad \psi_2(x;y)=x \quad \psi_3(x;y)=y \quad \psi_4(x;y)=(xy)^{0.5}$$

La función Θ se toma siguiendo la expresión (3): $\Theta_{ij} = \psi_i(P_j)$. Además se asume que $\varepsilon(P)=0$.

Se tienen los siguientes resultados:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad [A_T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [A_T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[U_w] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad [\Theta_e] = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ (xy)^{0,5} \end{bmatrix}$$

Se calcula: $[L] = [A]^{-1} [U_w] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y finalmente se obtiene:

$$U_e = [L] \cdot [\Theta_e] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ (xy)^{0,5} \end{bmatrix} = 1 + (xy)^{0,5}$$

En la Figura 1 se muestra en el nivel superior el comportamiento de un modelo de malla obtenido por este estimador donde los modelos se toman para $r=20 \times 20=400$ puntos equidistantes, suficientemente denso para ilustrar lo que se quiere explicar.

Ahora se calcula: $[\lambda_e] = [A_T]^{-1} [\Theta_e]$ y según (24):

$$\sigma_e^2 = [\lambda_e] [\Theta_e] = -(x+y-1)(xy)^{0,5} + x(3y-1) - y + 1$$

En la Figura 1 se muestra en el nivel inferior el comportamiento de un modelo de malla de los valores de σ_e^2 . Se puede observar que estos valores no se corresponden con la realidad; por ejemplo, en el punto (0;0) esta varianza debiera ser 0 y en su lugar se obtiene el valor 1. Esto se debe a que la función Θ no es un semivariograma.

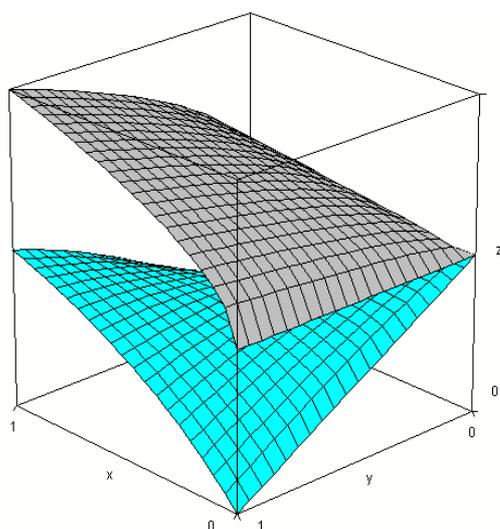


Figura 1: Modelos de malla de U_e y de σ_e^2 obtenidos mediante un estimador m-funcional.

Ejemplo 2:

Se ajustará un modelo de Funciones de Base Radial (Baxter, 1992) tomando:

- La función $\Theta(d;R)=(d^2 + R^2)^{3/2}$
- $R=0,02$
- d es la conocida distancia euclidiana. En particular, en dos dimensiones serán denominadas: $d_{ij}=\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ y $d_{ie}=\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}$
- $\varepsilon(P)=b_1$ o sea: $\theta_1 = 1$

En este caso se obtiene el modelo Spline Cúbico Natural cuyos elementos son:

$$\begin{bmatrix} A & \theta_{mt} \\ \theta_{tm} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000008 & 1,00060006 & 1,00060006 & 2,829275695 & 1 \\ 1,00060006 & 0,000008 & 2,829275695 & 1,00060006 & 1 \\ 1,00060006 & 2,829275695 & 0,000008 & 1,00060006 & 1 \\ 2,829275695 & 1,00060006 & 1,00060006 & 0,000008 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} U_W \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \Theta_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{e1} \\ \Theta_{e2} \\ \Theta_{e3} \\ \Theta_{e4} \\ \theta_{e1} \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema (11) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} L \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \theta_{mt} \\ \theta_{tm} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_W \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4786260696 \\ -0,3019018942 \\ -0,3019018942 \\ 0,1251777191 \\ 1,25 \end{bmatrix}$$

Cualquier estimación U_e en el punto P_e se obtiene mediante (14):

$$U_e = \begin{bmatrix} 0,4786260696 \\ -0,3019018942 \\ -0,3019018942 \\ 0,1251777191 \\ 1,25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Theta_{e1} \\ \Theta_{e2} \\ \Theta_{e3} \\ \Theta_{e4} \\ \theta_{e1} \end{bmatrix}$$

En la Figura 2 se muestra en el nivel superior el comportamiento de un modelo de malla obtenido por este estimador Spline Cúbico Natural.

Dado que $\Theta(h)$ es simétrica para este caso, se cumple que $\begin{bmatrix} A_T & \theta_{mt} \\ \theta_{tm} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A & \theta_{mt} \\ \theta_{tm} & 0 \end{bmatrix}^{-1}$.

Entonces es bastante fácil calcular el vector $\begin{bmatrix} \lambda_e \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T & \theta_{mt} \\ \theta_{tm} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Theta_e \\ \theta_e \end{bmatrix}$ y también se puede

calcular la varianza del error tomando la expresión (24) para cada estimación U_e que se realice en un punto P_e .

En la Figura 2 se muestra en el nivel inferior el comportamiento del modelo de malla de los valores σ_e^2 donde se puede observar que hay valores negativos debido a que el límite

$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\Theta(d, R)}{d^2}$ es diferente de 0 y por tanto $\Theta(d)$ no es un semivariograma autorizado.

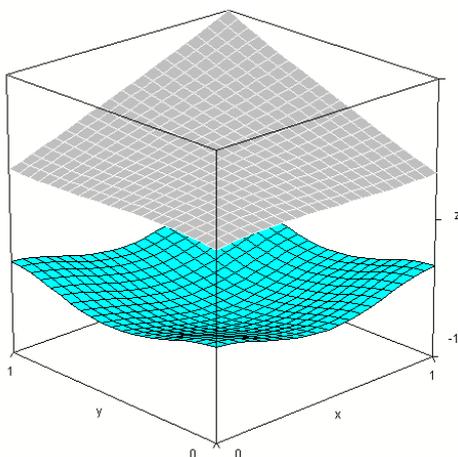


Figura 2: Modelos de malla de U_e obtenido por Spline Cúbico Natural (FBR) y de σ_e^2

El lector puede comprobar que si se toma la función $\Theta(d;R) = (d + R)^{3/2}$ entonces se cumple que $\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\Theta(d, R)}{d^2} = 0$ y se tiene que $\sigma_e^2 > 0$.

Ejemplo 3:

En esta oportunidad se tomará el método del Inverso de una Potencia q de la Distancia euclidiana tal como ha definido Legrá Lobaina (2017). Se asume que:

- $\Theta(d) = \frac{1}{d^q}$; $q=1$ para este ejemplo.
- $\varepsilon(P) = b_1 + b_2 x + b_3 y$. O sea: $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = x$ y $\theta_3 = y$

$$[A] = [A_T] = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m \Theta_{ek} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^m \Theta_{ek} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=1}^m \Theta_{ek} \end{bmatrix}$$

y si se denomina $S = \sum_{k=1}^m \Theta_{ek}$ entonces se tiene:

$$\begin{bmatrix} A & \theta_{mt} \\ \theta_{tm} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T & \theta_{mt} \\ \theta_{tm} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & S & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_W \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \Theta_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{e1} \\ \Theta_{e2} \\ \Theta_{e3} \\ \Theta_{e4} \\ \theta_{e1} \\ \theta_{e2} \\ \theta_{e2} \end{bmatrix}$$

Ahora puede calcularse: $\begin{bmatrix} L \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \theta_{mt} \\ \theta_{tm} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_W \\ 0 \end{bmatrix}$ y se establece que:

$U_e = U_i$ cuando $P_e = P_i$ ($i=1, \dots, m$) y:

$$U_e = \begin{bmatrix} L \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Theta_e \\ \theta_e \end{bmatrix} \text{ cuando para toda } i=1, \dots, m \text{ se cumple que } P_e \neq P_i$$

En la Figura 3.a se muestra un modelo de malla obtenido mediante este estimador.

Parece evidente que la fórmula (24) es inaplicable en este caso debido a que $\Theta(d)$ no es un semivariograma autorizado y además la forma de la matriz [A] es incompatible con el tipo de matriz de la que se deduce la fórmula para calcular σ^2_e . Solo con el ánimo de ilustrar su carácter inapropiado se ha aplicado la expresión (24) para este caso y se ha obtenido el modelo de malla (para $P_e \neq P_i$) que se muestra en la Figura 3.b.

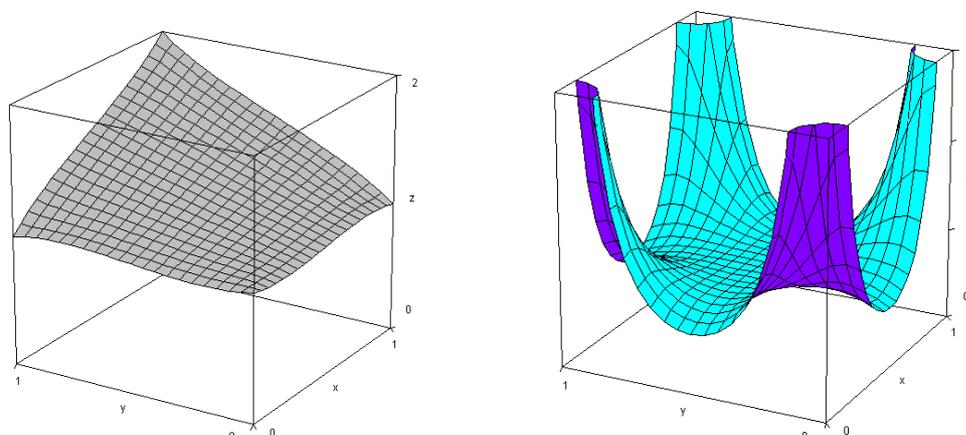


Figura 3: a. Modelo de malla de U_e obtenido por IPD b. Modelo de malla de σ^2_e obtenido por IPD

Ejemplo 4:

Finalmente se revisarán varios casos de modelación con el estimador UPD tal como ha descrito Legrá Lobaina (2017). Para estos ejemplos, en particular se asume que:

- $d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} + \delta^2$ donde $\delta = 0,02$
- $d_{ie} = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} + \delta^2$
- $\Theta(d) = d^q$; $q = 0,75$

Con respecto a la deriva $\epsilon(P)$ serán considerados cuatro casos donde, como se verá, en tres de ellos en el sistema (16) no se cumple la denominada Condición Universal $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ (Giraldo Henao, 2005).

a. No existe deriva. En este caso se obtiene el resultado de la Figura 4.a (la malla superior se refiere a las estimaciones y la malla inferior se refiere a σ^2_e). En la Figura

4.b se muestra una malla con las sumas $\sum_{i=1}^m \lambda_i$ de los elementos del vector $[\lambda_e]$

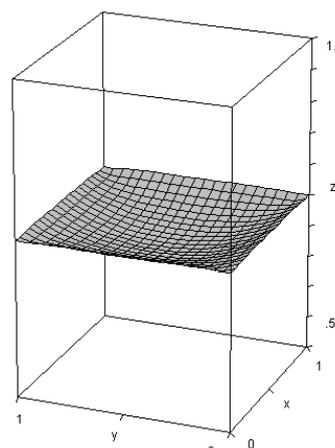
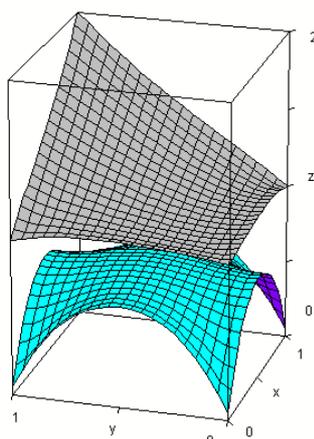


Figura 4: No hay deriva

a. Mallas de U_e y de σ^2_e obtenidas por UPD

b. Malla de $\sum_{i=1}^m \lambda_i$ obtenida por UPD

b. $\epsilon(P) = b_1 \theta_1(x, y) = b_1$, o sea: $\theta_1(x, y) = 1$. Se obtiene el resultado de la Figura 5.a (la malla superior se refiere a las estimaciones y la malla inferior se refiere a σ^2_e). La Figura 5.b

muestra una malla con el valor de la suma $\sum_{i=1}^m \lambda_i$ en cada estimación.

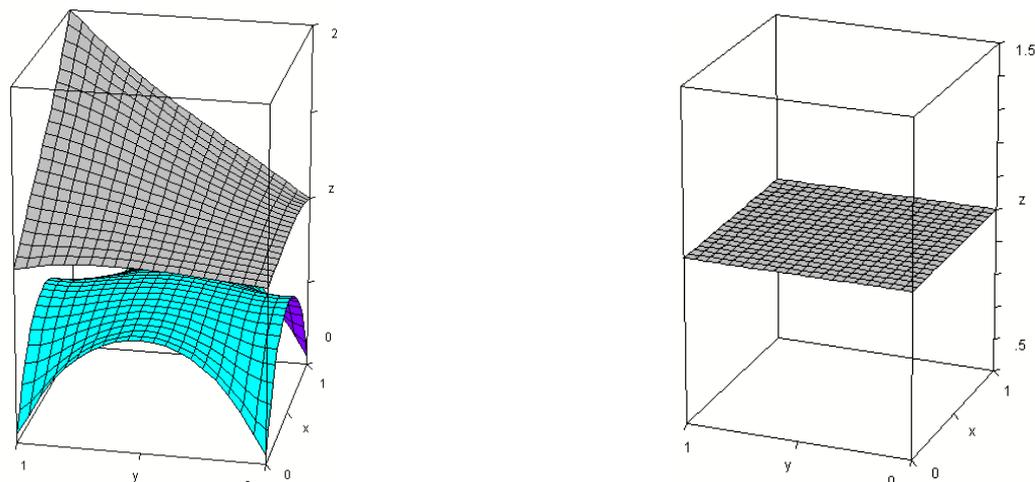


Figura 5: Deriva $\epsilon(P) = b1$

a. Mallas de U_e y de σ^2_e obtenidas por UPD

b. Malla de $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ obtenida por UPD

c. Se toma $\epsilon(P)=b_1 \theta_1(x; y) = b_1(x+2y)$, o sea: $\theta_1(x; y)=x+2y$. El resultado se muestra en la Figura 6.a (la malla superior se refiere a las estimaciones y la malla inferior se refiere a σ^2_e). La Figura 6.b visualiza una malla con las sumas $\sum_{i=1}^m \lambda_i$

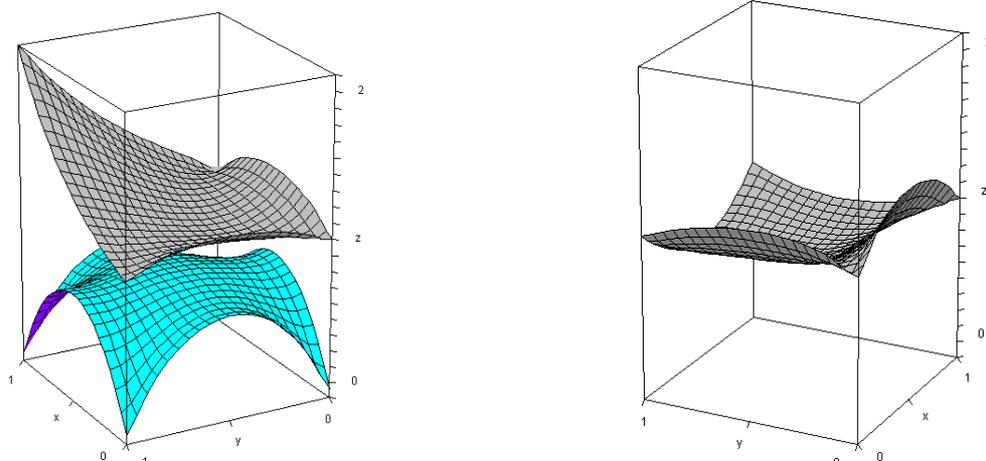


Figura 6: Deriva $\epsilon(P) = b1(x+2y)$

a. Mallas de U_e y de σ^2_e obtenidas por UPD

b. Malla de $\sum_{i=1}^m \lambda_i$ obtenida por UPD

d. Se ha tomado $\epsilon(P)=b_1 \theta_1(x; y) = b_1(e^x+2\ln(1+y))$, o sea: $\theta_1(x; y)= e^x+2\ln(1+y)$. Se muestran en la Figura 7.a los resultados: la malla superior se refiere a las estimaciones y inferior a σ^2_e . La Figura 7.b visualiza una malla con las sumas $\sum_{i=1}^m \lambda_i$

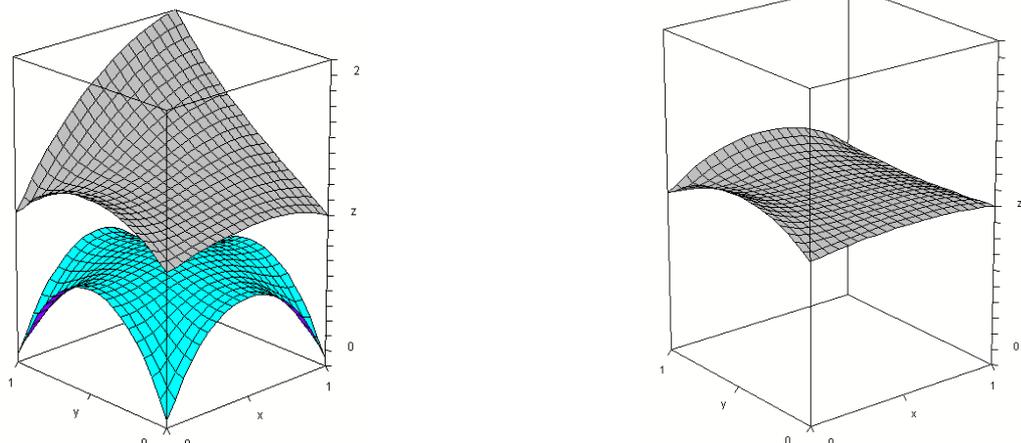


Figura 7: Deriva $\epsilon(P) = b1(e^x+2\ln(1+y))$

a. Mallas de U_e y de σ_e^2 obtenidas por UPD

b. Malla de $\sum_{i=1}^m \lambda_i$ obtenida por UPD

Se puede concluir que los resultados de calcular σ_e^2 son convenientes para reflejar el error de estimación en cada punto $P_e=(x;y)$. Sin embargo nótese que si en el modelo de $\epsilon(P)$ no aparece $\theta_k(x,y)=1$ como una de las funciones, entonces no se cumple la Condición

Universal $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, lo cual es importante para el asunto que se explica a continuación.

Varianza de Interpolación de Jorge Kazuo Yamamoto

La fundamentación de esta varianza también tiene un enfoque probabilístico-estadístico (Yamamoto, 2000) y consiste en suponer en cada estimación que U es una variable aleatoria discreta con valores $\{U_1; U_2; \dots; U_m\}$ cuyas respectivas probabilidades son $\{\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_m\}$ tal que se cumplan las siguientes condiciones:

- Ponderadores Positivos: $\lambda_i \geq 0$ (25)

- Condición Universal $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ (26)

La esperanza matemática de U (Miller, 2005) se define:

$$E[U] = U_e = \sum_{i=1}^m \lambda_i U_i \tag{27}$$

Y su varianza se establece mediante la expresión (Miller, 2005):

$$V[U] = S_e^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i (U_i - U_e)^2 \tag{28}$$

J.K. Yamamoto denomina a S_e^2 como una Varianza de Interpolación que permite cuantificar el error de estimación de Kriging. Es obvio que este concepto solo podrá ser aplicado a otros estimadores siempre que se cumplan (25) y (26).

Como se ha argumentado antes, si en el modelo de $\epsilon(P)$ aparece que una de las funciones $\theta_k(x,y) = 1$, entonces se cumple la condición (26).

La condición (25) se cumple en dependencia de la posición de P_e con respecto a los puntos $P_i \in W$ y a la definición del semivariograma. Al obtener una estimación puntual el procedimiento usual es calcular el vector $[\lambda_e]$ y verificar si al menos uno de sus elementos es negativo. Si ese fuese el caso pues se aplica uno de los siguientes algoritmos citados por Yamamoto: Froidevaux, Journel-Rao y Deutsch. Legrá Lobaina (2010) ha propuesto eliminar del conjunto de puntos usados en la estimación, solo aquel que tenga menor peso negativo, repitiéndose esta operación hasta que todos los puntos tengan sus pesos no negativos. Esta solución tiene un alto costo de recursos de cálculo pero no realizan transformaciones del vector $[\lambda_e]$ calculado sino que lo recalcula las veces que sean necesarias.

Para el modelo visto en el Ejemplo 1 se puede verificar en el sistema $[A_T][\lambda_e] = [\Theta_e]$ el cumplimiento de la Condición Universal (debido a las coordenadas de los punto de W y a las funciones $\psi(x;y)$ utilizadas) pero no se cumple que todas las $\lambda_i \geq 0$. Entonces no es lícito tratar de obtener los valores de S_e^2 .

En el Ejemplo 2 se puede verificar en el sistema (16) el cumplimiento de la Condición Universal pero en este caso tampoco se cumple que todas las $\lambda_i \geq 0$ y tampoco es posible obtener un modelo de malla de S_e^2 . Para el modelo del Ejemplo 3 sucede algo similar.

Finalmente puede señalarse que en el caso del Ejemplo 4, la implementación de S_e^2 solo se cumple la Condición Universal en el inciso b y además se cumple que $\lambda_i \geq 0$ para todas las estimaciones de la malla. En la Figura 8 se muestran los resultados de las estimaciones U_e y de la varianza de interpolación S_e^2 para este caso.

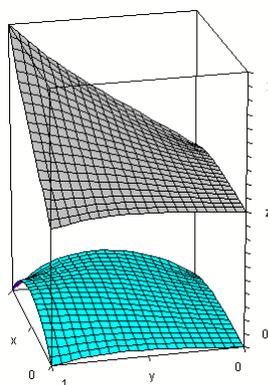


Figura 8: Modelos de malla de U_e y de S_e^2 obtenidos por UPD con $\epsilon(P) = b_1$.

En conclusión puede afirmarse que la Varianza de Interpolación de J.K. Yamamoto solo se puede aplicar en contados casos de estimadores (A, U, Θ) esto es: cuando se demuestra que se cumplen las condiciones (25) y (26).

4 PROPUESTA DE UNA EXPRESIÓN PARA APROXIMAR EL ERROR DE ESTIMACIONES (A, U, Θ)

El propósito esencial de aproximar el error de una estimación (A, U, Θ) es encontrar un número α_e no negativo tal que permita valorar eficazmente la calidad de la estimación. La propuesta que se describe en este epígrafe se basa en la Teoría de Errores y los conceptos que se utilizan se han tomado del texto de Álvarez, Guerra y Lau (2007) aunque debe aclararse que la notación original ha sido adaptada a la que se ha seguido en el presente trabajo.

Sea U_e una aproximación del valor real desconocido: $U_R = F(P_e)$.

- Se define el error cometido al aproximar el valor de U_R mediante el valor U_e como: $\text{error}(U_e) = U_R - U_e$
- El error absoluto: $E_A(U_e) = |\text{error}(U_e)| = |U_R - U_e|$
- El error absoluto máximo de U_e con respecto a U_R se denota $E_m(U_e)$ y se define como cualquier número real que no sea menor que el error absoluto. O sea, debe cumplirse que $E_m(U_e) \geq E_A(U_e)$.

Nótese que $E_m(U_e)$ es una cota cualquiera del error absoluto $E_A(U_e)$ y si la diferencia entre ambos valores es suficientemente pequeña entonces $E_m(U_e)$ puede tomarse como una aproximación adecuada de $E_A(U_e)$.

Para cualesquiera sean los m números reales U_i , en el texto citado se establece que:

$$E_m\left(\sum_{i=1}^m U_i\right) = \sum_{i=1}^m E_m(U_i) \quad (29)$$

Además, si $R=U_1U_2$ se cumple:

$$E_m(R) = E_m(U_1 U_2) = |U_1| E_m(U_2) + |U_2| E_m(U_1) \quad (30)$$

En particular si λ es una constante y se considera exacto su valor ($E_m(\lambda) = 0$) entonces:

$$E_m(\lambda U) = |\lambda| E_m(U) + |U| E_m(\lambda) = |\lambda| E_m(U) \quad (31)$$

Puede definirse entonces que una aproximación del error de estimación puede ser:

$$\alpha_e = E_m(U_e) = \left(\sum_{i=1}^m E_m(\lambda_i U_i)\right) = \sum_{i=1}^m E_m(\lambda_i U_i)$$

Según (31) y suponiendo que los valores de λ_i son "exactos" entonces se deduce que:

$$\alpha_e = \sum_{i=1}^m |\lambda_i| E_m(U_i) \quad (32)$$

Ahora solo es necesario encontrar una cota del error para cada valor U_i . Estas cotas deberán estar referenciadas al contexto de unidades y escala de la estimación que se define en la expresión (17). Considerando también que es conveniente que $E_m(U_i)$ dependa de alguna manera de la diferencia entre los valores de U_i y U_e , parece una propuesta razonable que se asuma que $E_m(U_i) = |U_i - U_e|$. Entonces se escribe:

$$\alpha_e = \sum_{i=1}^m |\lambda_i| |U_i - U_e| \quad (33)$$

Esta expresión se interpreta como una forma de desviación absoluta ponderada de los valores de U_i con respecto a U_e . y se propone que sea considerada como una medida aproximada del error de una estimación (A, U, Θ) .

Sin embargo la expresión (33) aún tiene la insuficiencia de que el rango de valores obtenidos para α_e no está influido por la escala de los datos de los puntos P_i ni por algunas de las características específicas de las funciones $\Theta_{ij} = \xi(P_i; P_j)$ o $\Theta_{ij} = \psi(P_i; P_j)$.

Reflexiones cuando se trata de funciones del tipo $\Theta_{ij} = \xi(P_i; P_j)$

Sea $M(\alpha_e)$ el valor máximo de α_e para una malla. En el Ejemplo 4.b se calcula: $M(\alpha_e) \approx 0,5$.

Si los datos de las coordenadas de los puntos P_i de la Tabla 1 se multiplican todos por 100 (lo cual significa que aumenta la distancia entre estos puntos) se mantiene para el nuevo modelo $M(\alpha_e) \approx 0,5$.

Debe notarse que $M(\alpha_e)$ toma diferentes valores si se producen cambios en los valores de U_i o en los valores de $\varepsilon(P)$. Por ejemplo para los incisos a, c y d del Ejemplo 4 el valor de $M(\alpha_e)$ se aproxima respectivamente por: 0,502; 0,63955; y 0,7875.

Cuando para el ejemplo 4 se han tomado las condiciones: Datos P_i de la Tabla 1; $\Theta(d)=d$; $\delta=0$ y $\varepsilon(P)=0$, se obtiene el valor $M(\alpha_e) \approx 0,4768995$ y entonces:

- Si todos los datos de U_i de la Tabla 1 se multiplican por 10 para el nuevo modelo se obtiene $M(\alpha_e) \approx 4,7689$.
- Si a todos los datos de U_i de la Tabla 1 se les suma 10 para el nuevo modelo se obtiene $M(\alpha_e) \approx 1,599$.

El primer resultado precisa de su correspondiente análisis pero no parece sorprendente. El último resultado es notable porque cambia significativamente el valor de $M(\alpha_e)$ aunque solo se trate de que los nuevos datos modelados U_i constituyen una traslación positiva de 10 unidades en el eje U de los valores de U_i que aparecen en la Tabla 1. Dado que además en este caso el modelo de malla de U_e presenta un notable efecto *bull-eyes* (Ribeiro da Silva, 2007), vale la pena mostrar los resultados en la Figura 9. En esta figura también se ilustra la conveniencia de que en estos casos se usen modelos con derivas que mediante una traslación conviertan a los valores de los datos U_i en un nuevo conjunto de valores de manera que cumplan la condición: $U_{\min} \times U_{\max} \leq 0$.

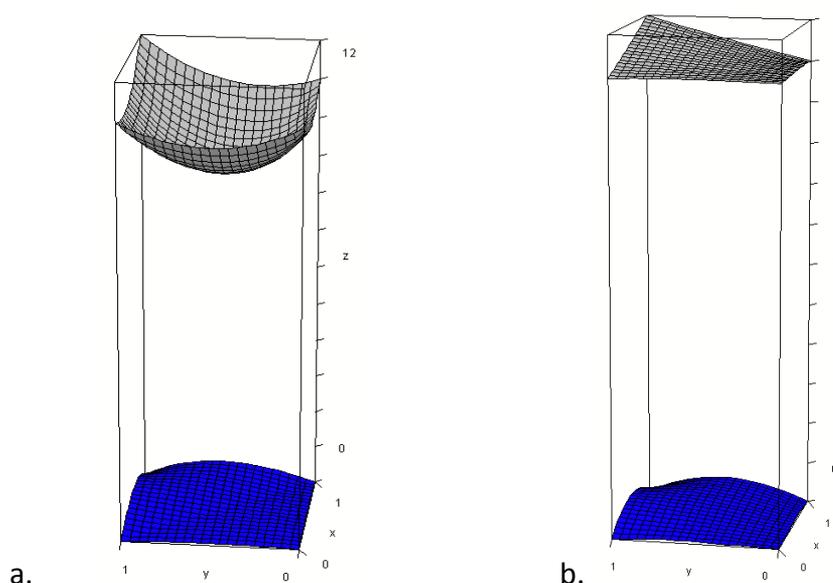


Figura 9: Modelos de malla de U_e y de α_e obtenidos por UPD con datos U_i trasladados (+10).

a. $\varepsilon(P)=0$ $M(\alpha_e) \approx 1,599$

b. $\varepsilon(P)=11,25$ $M(\alpha_e) \approx 0,5$

También fue estudiado el caso en que se agregó el punto (0,5;0,5;1,5) a la Tabla 1 y se desarrolló el modelo con: $\varepsilon(P)=0$, $\Theta(d)=d$ y $\delta=0$. El resultado $M(\alpha_e)\approx 0,3733$ como era de esperarse disminuyó con respecto al modelo análogo para cuatro puntos .

Finalmente, los análisis realizados a los modelos de Funciones de Base Radial (ver Ejemplo 2) y de Inverso de una Potencia de la Distancia (ver ejemplo 3) muestran que el valor de $M(\alpha_e)$ tampoco cambia si los datos de las coordenadas de los puntos P_i de la Tabla 1 se multiplican todos por un número positivo.

Reflexiones cuando se trata de funciones del tipo $\Theta_{ij} = \psi_i(P_j)$

Para estos modelos se presenta una insuficiencia semejante respecto a que los cambios de escala de los puntos P_i , no determinan cambios en los valores de $M(\alpha_e)$. Por ejemplo, para el modelo del Ejemplo 1 se obtiene que $M(\alpha_e)\approx 0,77$ y si multiplicamos por 100 o por 0,01 a las coordenadas de los puntos de la Tabla 1 se obtiene nuevamente que $M(\alpha_e)\approx 0,77$.

Como era de esperarse tampoco se producen cambios en $M(\alpha_e)$ cuando se desplazan todos los valores de U_i pero $M(\alpha_e)$ cambia cuando se multiplican estos valores por un escalar real o cuando se desplazan solo algunos de ellos. Por ejemplo si para los datos del Ejemplo 1 se toman los nuevos valores $U=\{3; 0; -2; 1\}$ entonces $M(\alpha_e)\approx 2,536$. Si se toman otros nuevos valores $U=\{23; 20; 18; 21\}$, se obtendrá $M(\alpha_e)\approx 2,7496$.

Los cambios en las funciones $\psi_i(x;y)$ también producen cambios en los valores del indicador $M(\alpha_e)$. Si en el ejemplo 1 se toma $\psi_4(x;y) = x y$, entonces se obtiene $M(\alpha_e)\approx 0,5$.

Cuando aumenta el número de puntos en el mismo entorno geométrico convexo definido por los puntos originales entonces debiera disminuir el valor de $M(\alpha_e)$ pero este comportamiento también está fuertemente influenciado por la nueva función $\psi_5(x;y)$ que debe introducirse. Si se agrega en la Tabla 1 el punto $(x;y;z)=(0,5; 0,5; 1,4)$ entonces tomando:

- $\psi_5(x;y)=XY$ se obtiene $M(\alpha_e)\approx 0,7455$
- $\psi_5(x;y)=(X+Y)^{0,5}$ se obtiene $M(\alpha_e)\approx 0,925$
- $\psi_5(x;y)=\ln(X+Y+1)$ se obtiene $M(\alpha_e)\approx 0,65556$

A partir de las reflexiones anteriores se infiere la necesidad de ampliar la definición (33) con un nuevo factor k tal que el error de una estimación (A,U,Θ) sea también función de las escalas de las coordenadas de los datos, su irregularidad geométrica y del valor de m , la cantidad de datos. En primera instancia puede proponerse que la nueva expresión para aproximar el error de una estimación sea:

$$L_e = k \sum_{i=1}^m |\lambda_i| |U_i - U_e| \quad (34)$$

Asumiendo que d_{med} es el valor medio de las m_d distancias no nulas que se pueden calcular entre parejas de coordenadas de los puntos de W , es decir:

$$d_{med} = \frac{\sum_{\substack{i,j=1,\dots,m \\ d_{ij} \neq 0}} d_{ij}}{m_d} \quad (35)$$

Y sea la Desviación Estándar de las m_d distancias señaladas:

$$\sigma_{d_{ij}} = \sqrt{\frac{\sum_{\substack{i,j=1,\dots,m \\ d_{ij} \neq 0}} (d_{ij} - d_{med})^2}{m_d - 1}} \tag{36}$$

Asumiendo (entre varias posibilidades) que k es el Error Estándar de las Medias (Miller, 2005):

$$k = \frac{\sigma_{d_{ij}}}{\sqrt{m_d}} \tag{37}$$

La expresión 34 ahora se escribe:

$$L_e = \frac{\sigma_{d_{ij}}}{\sqrt{m_d}} \sum_{i=1}^m |\lambda_i| |U_i - U_e| \tag{38}$$

Se ilustra el resultado (38) con los datos de un conjunto W caracterizados en la Figura 10:

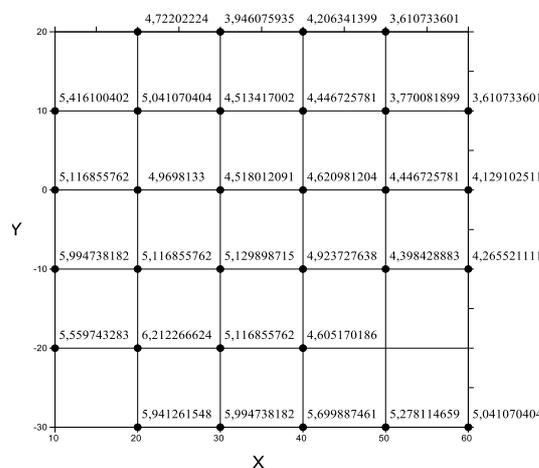


Figura 10: Datos Z_i en las coordenadas planas P_i=(X_i;Y_i)

Tomando $\Theta(d)=0,003 d^{1,45}$, $\delta=0$ y $\epsilon(P)=b_1$ se obtiene el modelo de malla con $r=40 \times 40$ puntos para las estimaciones Z_e tal como se representa en la Figura 11. Nótese que se ha trazado la frontera convexa de los datos para distinguir en la malla las interpolaciones (en gris) y las extrapolaciones (en rojo).

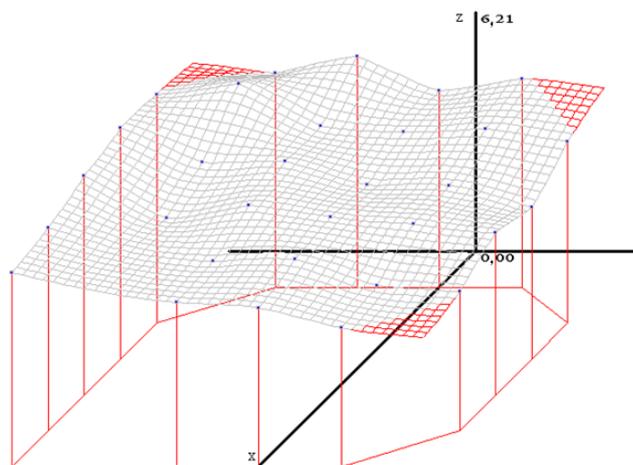


Figura 11: Modelo de malla de las estimaciones Z_e

También se ha obtenido un modelo de malla de los valores de L_e según la expresión (38). Este modelo se representa en la Figura 12.

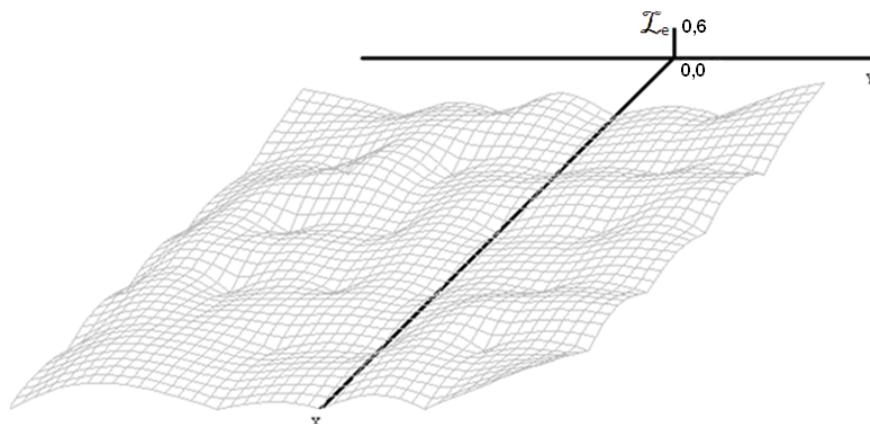


Figura 12: Modelo de malla de las estimaciones L_e .

El lector puede observar que los resultados de L_e son coherentes con las características locales de los datos y con los resultados de las estimaciones Z_e . Para complementar la comprensión de la utilidad de la expresión (38), en la Figura 13 se muestra un modelo de malla que muestra el comportamiento del coeficiente de variación: $C=100 L_e / Z_e$ dado en %.

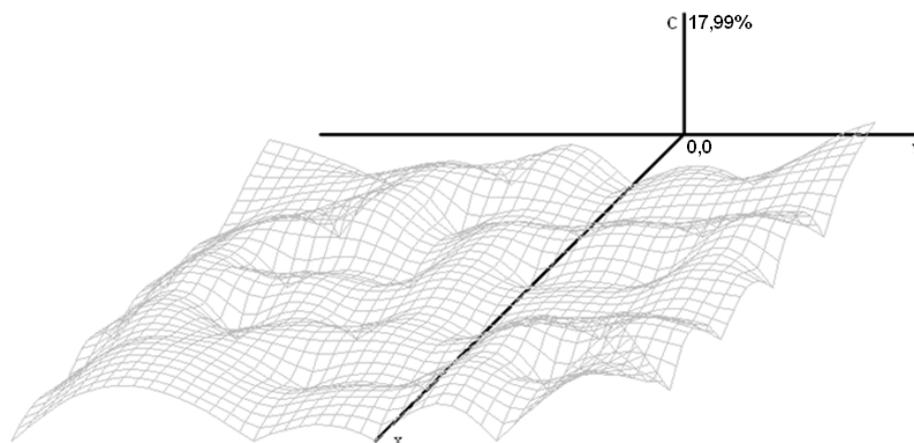


Figura 13: Modelo de malla del coeficiente de variación $C=100 L_e / Z_e$

5 CONCLUSIONES

Se han evaluado diversos enfoques para aproximar el error para estimadores puntuales (A,U, Θ); en particular se ha establecido que la Varianza del Error del estimador Kriging y la Varianza de Interpolación de J.K. Yamamoto no pueden ser generalizadas como aproximación del error a todos los estimadores puntuales de ese tipo.

Se ha propuesto la expresión $L_e = \frac{\sigma_{d_{ij}}}{\sqrt{m_d}} \sum_{i=1}^m |\lambda_i| |U_i - U_e|$ como una aproximación del error de cualquier estimación (A,U, Θ) con la capacidad de ser dependiente de las características

de la función Θ , de las variaciones de los datos del conjunto W y de las relaciones geométricas de $(P_e; U_e)$ con los puntos de W , expresando numéricamente la calidad de la estimación.

Quedan por resolver algunos problemas interesantes entre los cuales están los relacionados con las reglas para seleccionar o construir la función Θ ; la reducción de la mala condicionalidad de los sistemas de ecuaciones lineales que aparecen en estas estimaciones; y la minimización de L_e mediante la búsqueda de funciones adecuadas Θ y mediante el diseño apropiado del muestreo de los datos de W .

6 ACERCA DEL SOFTWARE PARA OBTENER LAS FIGURAS

Las figuras desde la 1 hasta la 9 se obtuvieron mediante el software Derive versión 6 del 2004 de Texas Instruments Incorporated. La figura 10 se dibujó con el software Surfer versión 11 del 2012 de Golden Software Inc. Las figuras 11, 12 y 13 fueron obtenidas mediante un software personal desarrollado por el autor del presente texto; la programación se realizó en lenguaje Pascal mediante el desarrollador Delphi 7.0 del 2002 de Borland Delphi Enterprise.

7 REFERENCIAS

- Achilleos, G. (2008). Errors within the Inverse Distance Weighted (IDW) interpolation procedure. *Geocarto International*, 23(6), 429-449. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.1080/10106040801966704>
- Alfaro Sironvalle, M. A. (2007). *Estimación de Recursos Mineros*. Paris: Escuela de Minas de Paris. Recuperado de <http://www.cg.ensmp.fr/bibliotheque>.
- Álvarez Blanco, M., Guerra Hernández, A. y Lau Fernández, R. (2007). *Matemática Numérica*. La Habana: Editorial Félix Varela.
- Babak, O. y Deutsch, C. (2008). Statistical approach to inverse distance interpolation. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 23(5), 543-553.
- Baxter, B. (1992). *The Interpolation Theory of Radial Basis Functions*. (PhD Thesis, University of Cambridge). Recuperado de <http://arxiv.org/pdf/1006.2443v1>
- Bronshstein, I. N., Semendyayev, K. A., Musiol, G. y Mühlig, H. (2007). *Handbook of Mathematics*. Berlín: Springer-Verlag.
- Díaz Viera, M. A. (2002). *Geoestadística Aplicada*. México: Instituto de Geofísica, UNAM e Instituto de Geofísica y Astronomía, CITMA de Cuba. Recuperado de <http://mmc2.geofisica.unam.mx/cursos/geoest/GeoEstadistica.pdf>.
- Giraldo Henao, G. (2005). *Introducción a la Geoestadística. Teoría y Aplicación*. Bogotá: Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá. Recuperado de ftp://ftp.ciat.cgiar.org/DAPA/projects/Cursos_Talleres/Curso_R/DOCUMENTOS/LIBRO%20DE%20GEOESTADISTICA.pdf
- Handscorn, S.F.D. (1995). *Errors of linear interpolation on a triangle*. Oxford: Numerical Analysis Group, Oxford University. Recuperado de <https://www.math.auckland.ac.nz/~waldron/Multivariate/handscorn95.pdf>
- Hubbert, S y Morton, T.M. (2004). L_p -error estimates for radial basis function interpolation on the sphere. *Journal of Approximation Theory*, 129(1), 58-77. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.1016/j.jat.2004.04.006>

- Isaacson, E. y Keller, H.B. (1994). *Analysis of Numerical Method*. New York: Dover Publications, Inc.
- Kincaid, D. y Cheney, W. (1991). *Numerical analysis mathematics of scientific computing*. California: Brooks/Cole Publishing Company Pacific Grove.
- Legrá Lobaina, A. A. y Atanes Beatón, D. M. (2010). Variogramas adaptativos: un método práctico para aumentar la utilidad del error de estimación por kriging. *Revista Minería y Geología*, 26(4), 53-78. Recuperado de <http://revista.ismm.edu.cu/index.php/revistamg/article/download/63/69>
- Legrá Lobaina, A. A., Atanes Beatón, D. M. y Guilarte Fuentes, C. (2014). Contribución al método de interpolación lineal con triangulación de Delaunay. *Revista Minería y Geología*, 30(2), 58-72. Recuperado de <https://revista.ismm.edu.cu/index.php/revistamg/article/download/907/486>
- Legrá Lobaina, A. A. (2017). Modelos de malla basados en estimadores (A,U,Θ). *Revista HOLOS*, 33(4), 88-110. DOI:10.15628/holos.2017.5351.
- Light, W. y Wayne, H. (1998). On Power Functions and Error Estimates for Radial Basis Function Interpolation. *Journal of Approximation Theory*, 92(2), 245-266. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.1006/jath.1997.3118>
- Madych, W. R. and Nelson, S. A. (1988). *Multivariate interpolation and conditionally positive definite functions*. Approx. Theory and its Applications, 4 (4), 77-89.
- Miller, I., Freund, J. y Johnson, R. (2005). *Probabilidades y Estadísticas para ingenieros*. Cuarta Edición. México: Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.
- Ribeiro Da Silva, C., Lopes Quintas, M.C. y Silva Centeno, J.A. (2007). Estudio do método de interpolação do inverso da distância a uma potência. Trabajo presentado en el *V Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas y II Simpósio Brasileiro de Geomática*. Recuperado de [http://docs.fct.unesp.br/departamentos/cartografia/eventos/2007 II SBG/artigos/A 009.pdf](http://docs.fct.unesp.br/departamentos/cartografia/eventos/2007%20II%20SBG/artigos/A%2009.pdf)
- Samper, F.J. y Carrera, J. (1990). *Geoestadística. Aplicaciones a la Hidrogeología Subterránea*. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería de la Universitat Politècnica de Catalunya.
- Saniee, K. (2007). *A Simple Expression for Multivariate Lagrange Interpolation*. USA: SIAM. Recuperado de <https://www.siam.org/students/siuro/vol1issue1/S01002.pdf>
- Shaback, R. (1995). Error estimates and condition numbers for radial basis function interpolation. *Advances in Computational Mathematics*, 3(3), 251-264. Recuperado de <http://link.springer.com/article/10.1007/BF02432002>
- Shepard, D. (1968). A two-dimensional interpolation for irregularly-spaced data function. *Proceedings-1968 ACM National Conference*, 517-524. Recuperado de <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.154.6880&rep=rep1&type=pdf>
- Waldrom, S. (1996). *The error in linear interpolation at the vertices of a simplex*. Technical Report, Tel Aviv: TECHNION, Israel Institute of Technology. Recuperado de <https://www.math.auckland.ac.nz/~waldron/Preprints/Triangle/triangle.pdf>
- Wendland, H. (1997). *Error estimates for interpolation by compactly supported radial basis functions of minimal degree*. Institut für Numerische und Angewandte Mathematik Universität Göttingen, Germany.
- Wu, Z. y Shaback, R. (1993). Local error estimates for radial basis function interpolation of scattered data". *IMA Journal of Numerical Analysis*, 13, 13-27. Recuperado de <http://imajna.oxfordjournals.org/content/13/1/13.full.pdf>
- Yamamoto, J. K. (2000). An Alternative Measure of the Reliability of Ordinary Kriging Estimates. *Mathematical Geology*, 32(4), 489-509. DOI:10.1023/A:1007577916868