DOBRANDO O CUBO SOMA E REGISTRANDO AS SUAS MONTAGENS

Aline Crispim da Silva
E-mail: alinecrispim2@hotmail.com

RESUMO

O uso de dobraduras modulares (módulo Sonobê) permite a formação de poliedros que são a junção de cubos. Um jogo de encaixe bem interessante pode ser formado por tais poliedros: o Cubo Soma. Ele possui 7 peças distintas, denominadas policubos e tem como objetivo formar um cubo maior de dimensões 3x3x3. Esse artigo tem como objetivo mostrar o registro da maior parte das soluções do cubo soma, de modo a estabelecer uma contagem dessas diferentes montagens. Nesse processo utilizaremos o principio multiplicativo estudado no ensino médio dentro do conteúdo da análise combinatória.

PALAVRAS-CHAVE: Dobraduras modulares, Cubo Soma, Montagens

FOLDING SOMA CUBE AND REGISTERING THEIR ASSEMBLIES

ABSTRACT

The use of modular folding module (Sonobe) allows the formation of polyhedra which are the junction cubes. A very interesting game groove may be formed by such polyhedra: Sum Cube. He has 7 distinct pieces, called policubos and aims to form a larger cube of dimensions 3x3x3. This article aims to show the record of most soma cube solutions, in order to establish a count of those different assemblies. In this process we use the multiplicative principle studied in high school within the content of combinatorics.

KEYWORDS: Modular Folds, Soma Cube, Assemblies

1 INTRODUÇÃO

Após algumas reuniões do projeto que participo (Dobraduras Modulares, no laboratório de matemática do IFRN Campus João Câmara), fui apresentada ao jogo “CUBO SOMA”, pelo meu orientador do projeto e por aluno bolsista. Eles estavam elaborando um livro sobre dobraduras modulares. Fiquei responsável em fazer um dos apêndices desse livro, que tratava sobre esse jogo.

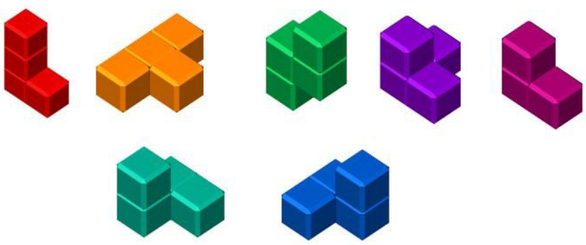
Este artigo “DOBRANDO O CUBO SOMA E REGISTRANDO AS SUAS MONTAGENS” está dividido em oito etapas. A primeira é a revisão bibliográfica. A segunda é um histórico sobre o que seja o jogo e suas regras. A terceira é a metodologia, onde trataremos como será feito o processo de contagem. A quarta aborda a influencia da simetria no processo de contagem. A quinta é o ponto central desse artigo: o processo de contagem. Nela, iremos organizar as soluções para o cubo soma. A penúltima é a conclusão. Por último as referências bibliográficas.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

De acordo com Martin Gardner (Tulsa, 21 de outubro de 1914 — Norman, 22 de maio de 2010, matemático e autor de obras de divulgação científica estadunidense), Piet Hein o criador do cubo soma, estava assistindo a uma aula sobre mecânica quântica e formulou a seguinte hipótese:

> *“Se pegarmos todas as formas irregulares construídas por até quatro cubos de tamanhos iguais unidos por suas faces, seremos capazes de montar um cubo maior.”*

Ele se referia a policubos com até quatro cubos que são formas irregulares, forma irregular, neste contexto, deve ser entendido como figura côncava. Uma figura é côncava quando é possível escolher dois pontos do interior da figura de modo que o segmento de reta que os une passa por fora da figura. Existem 12 policubos com até quatro cubos, mas apenas 7 são irregulares: estas são as 7 peças do cubo soma.



Tudo que usei como referência bibliográfica foram apenas para tratar do histórico, as ideias foram surgindo através da experiência em sala de aula, com alunos.

3 CUBO SOMA

O cubo soma é um quebra-cabeça criado pelo poeta e matemático dinamarquês Piet Hein. É um jogo formado por 7 peças distintas chamadas de policubos (junção de cubos unitários). Cada policubo é formado por uma fusão de cubos menores e de mesma aresta que ao encaixá-los de forma correta será possível obter um cubo **3x3x3**.

Dessas **7** peças, **6** são formadas por união de **4** cubos (tetra cubos) e apenas **1** é formada por **3** cubos (tri cubo), totalizando **27** cubos (que é o **3³**), como mostra a figura 1.

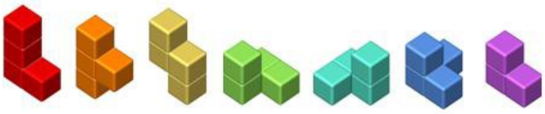


Figura 1

Esse cubo 3x3x3 pode ser montado de **240** formas distintas, dentre elas temos a mostrada na figura **2**:

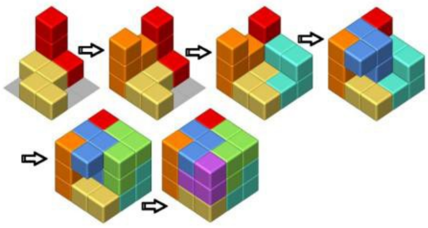


Figura 2

Como o objetivo do jogo é montar um cubo **3x3x3**, então a forma de se encaixar **2** ou mais peças não pode formar uma figura que tenha mais de **3** cubos enfileirados, como por exemplo o encaixe da figura **3**:

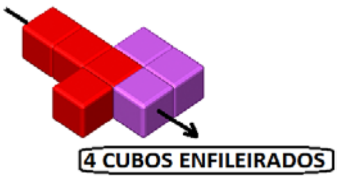


Figura 3

4 METODOLOGIA

Para ajudar a alcançar o objetivo desse artigo, nossa escolha foi juntar **3** das **7** peças (figura **4**), para assim formar uma peça fixa, denominada "base" (figura **5**). Restarão outras 4 peças que poderão ser encaixadas na base de forma a completar o cubo 3x3x3.

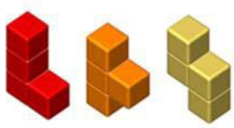


Figura 4 **Figura 5**

Depois de alcançar o máximo de soluções obtidas com as quatro peças restantes para uma dada base, mudamos a posição das três peças iniciais para formar outra base e geramos assim outra forma de montagem. Repetiremos esse procedimento até alcançar todas as soluções.

Para facilitar o processo de contagem, percebemos que cada base possui uma base simétrica (será mostrado adiante). Ao formar uma certa base, podemos afirmar que sempre será possível formar uma outra base simétrica à primeira colocando as peças na posição simétrica, como mostra a figura **6**.

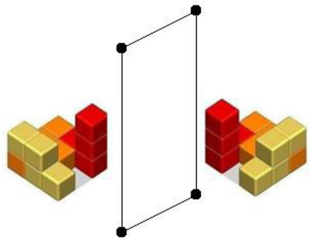


Figura 6

5 SIMETRIA

Uma vez realizada a montagem do cubo soma, é possível afirmar que as peças poderão ser montadas de forma simétrica em relação a um plano de simetria do cubo. O cubo soma possui **7** peças. Em **5** delas, as suas respectivas simétricas são elas mesmas, como mostra a figura 7:

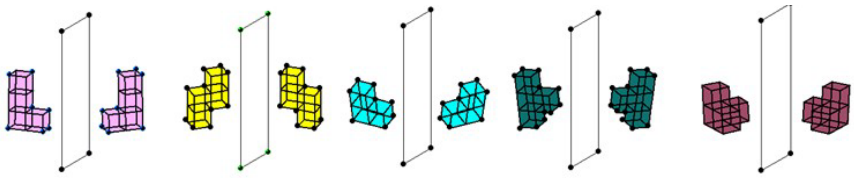


Figura 7

Já as outras duas que serão mostradas, na figura seguinte, a peça simétrica de uma delas é a outra peça. Isso faz com que as conexões entre peças mudem quando fazemos a montagem simétrica (figura **8**), formando assim uma nova forma de montagem do cubo soma.

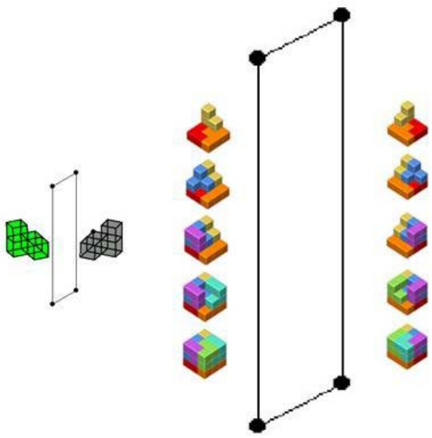
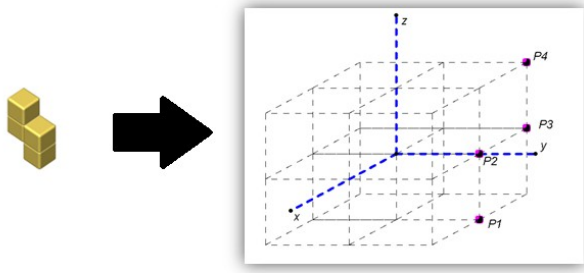


Figura 8

Acabamos de garantir a existência da montagem simétrica, uma vez que toda peça possui uma simétrica, seja ela mesma ou outra peça. Como o cubo possui três planos de simetria poderíamos imaginar que poderia existir mais de uma montagem simétrica. Vamos provar a seguir que essa montagem é única.

5.1 Unicidade da montagem simétrica

Os pontos P1, P2, P3, P4 representarão os centros dos cubos que formam uma peça do cubo soma. Colocamos esses pontos num sistema de referência X, Y e Z e escolhemos uma peça:



Plano ZX

Então se refletirmos a peça P1, P2, P3, P4 em relação ao plano ZX obteremos a peça P5, P6, P7, P8 (Figura **9**). Veja a seguir as relações entre os pontos iniciais e finais:

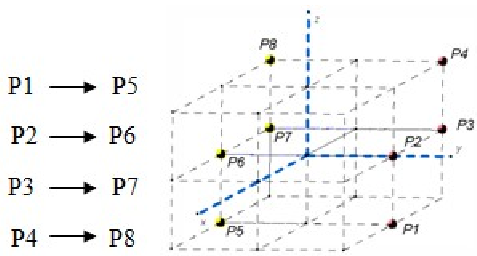


Figura 9 - Plano XY

Se refletirmos a mesma peça P1, P2, P3, P4 em relação ao plano XY obteremos a peça P9, P2, P3, P10 (Figura **10**). Veja a seguir as relações entre os pontos iniciais e finais:

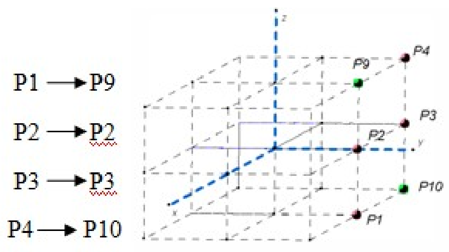


Figura 10

Se rotacionarmos esta peça recém obtida P9, P2, P3, P10 em torno do eixo X de 180º, obteremos a peça P5, P6, P7, P8, que venha ser a mesma peça obtida pela reflexão ao plano XZ (Figura **11**). Veja a seguir as relações entre os pontos iniciais:

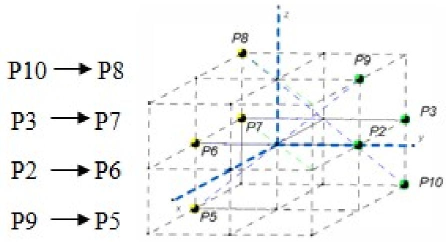


Figura 11 - Plano YZ

Finalmente, se refletirmos a mesma peça P1, P2, P3, P4 em relação ao plano YZ obteremos a peça P1, P2, P11, P12 (Figura **12**). Veja a seguir as relações entre os pontos iniciais e finais:

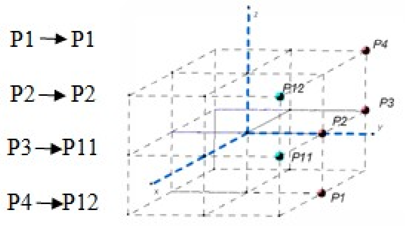


Figura 12

Se rotacionarmos esta peça recém obtida P9, P2, P11, P12 em torno do eixo z de 180º, obteremos a peça P5, P6, P7, P8 (Figura **13**). Veja a seguir as relações entre os pontos iniciais:

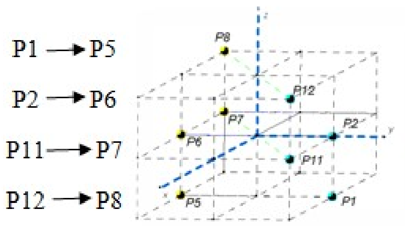


Figura 13

Após todas essas reflexões e rotações, a peça continua sendo a mesma, o que difere é apenas a posição. Consequentemente podemos concluir que só existe uma única peça simétrica para essa peça dada. Não é difícil perceber que isso acontecerá com as demais peças.

6 CONTAGEM

Como foi mencionado no terceiro tópico, com as **3** peças selecionadas realizamos diversos encaixes entre elas e geramos as seguintes bases da figura **14**:

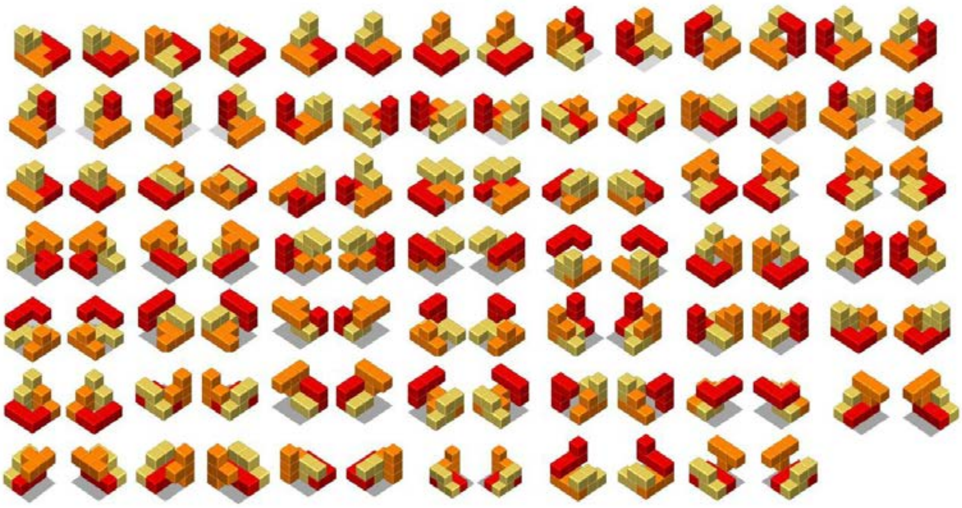


Figura 14

Nas **96** figuras acima podemos observar dois pontos importantes:

- Uma mesma base pode ser obtida de diferentes formas mudando apenas o encaixe das peças que a formaram (exemplo: as quatro primeiras bases da primeira linha);
- Toda base formada possui sua simétrica (exemplo: a quarta e a oitava da primeira linha).

Observando a primeira afirmação, se com a primeira base existem determinadas soluções para o cubo, então com a segunda, terceira e quarta base também existirão a mesma quantidade de soluções, pois elas são iguais.

Com isso, não é necessário contar todas as soluções possíveis para cada uma das bases encontradas, mas apenas para o grupo de bases diferentes. Isto reduzirá o nosso grupo de **96** peças para **45**, como mostra a figura seguinte. Para cada solução encontrada para certa base, multiplicaremos pela quantidade de bases iguais e simétricas.

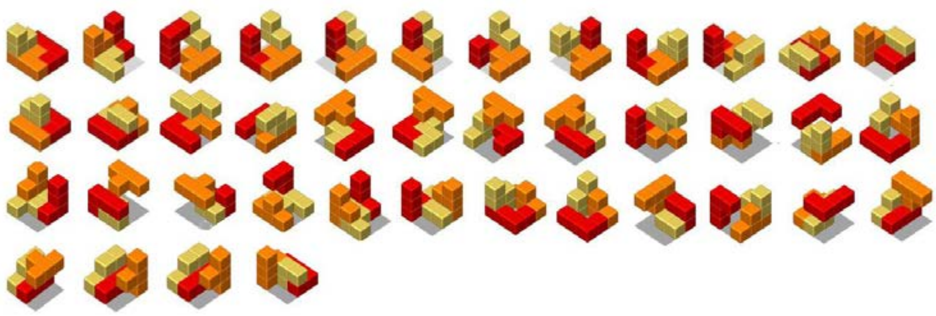


Figura 15

Abaixo serão mostradas todas as soluções para a primeira base da figura **15**:

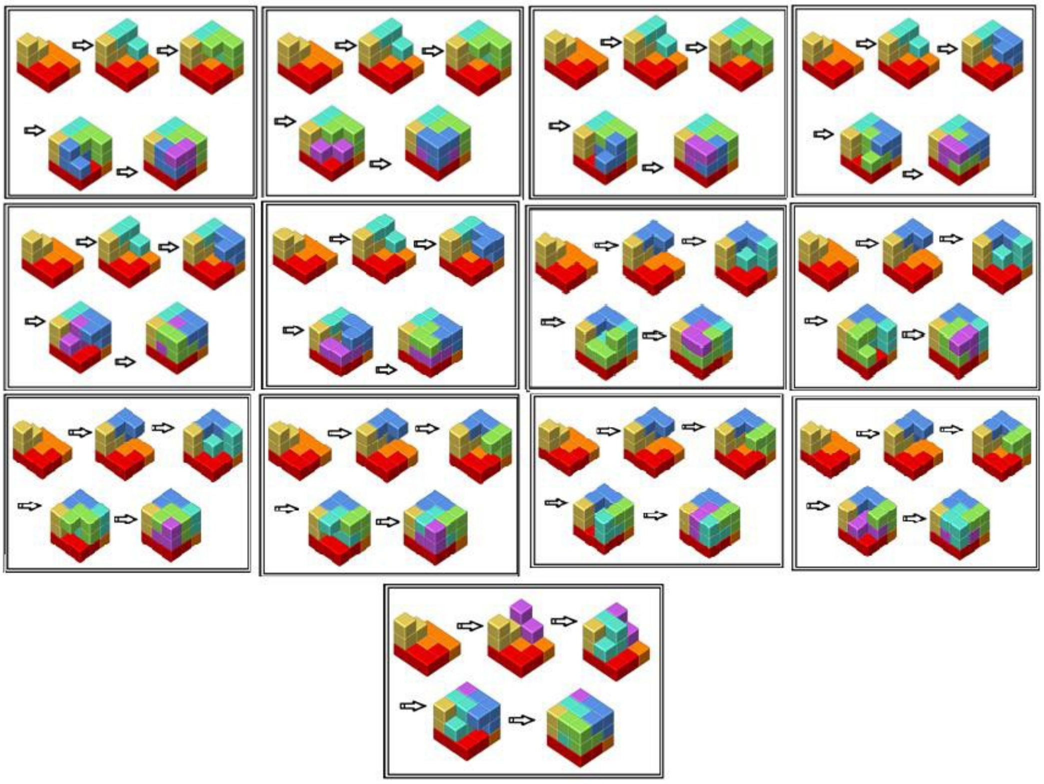


Figura 16

Utilizando a primeira base, obtemos **13** formas diferentes de construir o cubo soma. Porém, podemos obter a mesma base de **4** formas diferentes. Para cada uma das bases temos sua simétrica. Logo, multiplicamos o número de soluções obtidas para a primeira base por **8**, totalizando **104** soluções. Na seguinte tabela será mostrado o total de soluções para cada base:

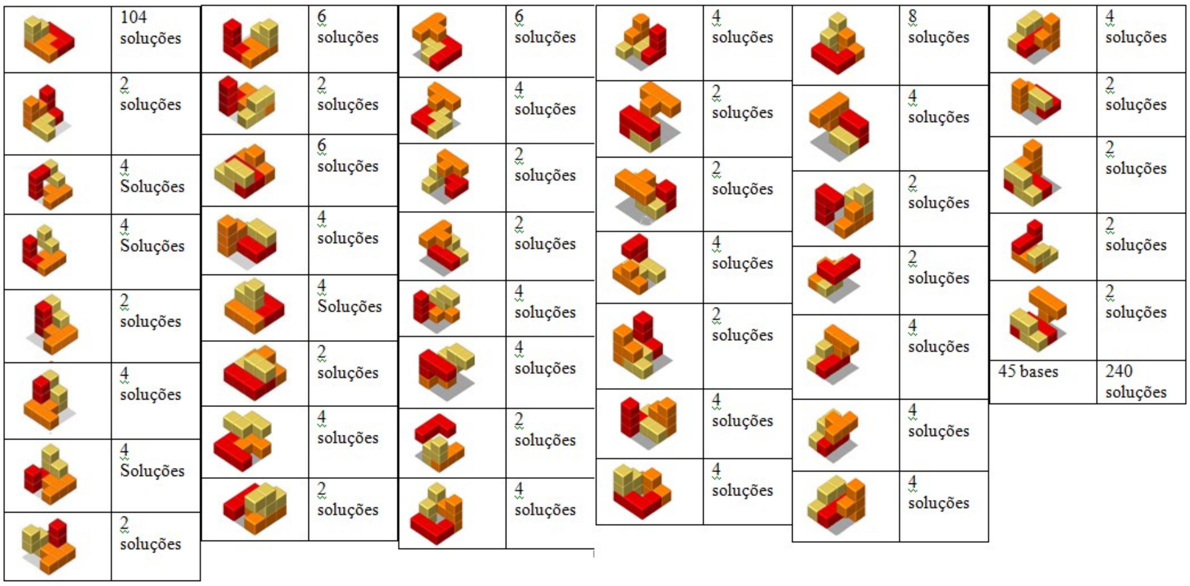


Figura 17

7 CONCLUSÃO

Diante de tudo que foi exposto no artigo, pode-se observar que o cubo soma é um jogo que possui relações com alguns conceitos matemáticos e pode ser trabalhado em um contexto de sala de aula quando o assunto estudado for análise combinatória ou simetria. Esses assuntos podem ser estudados no ensino médio.

Para obtermos o total de montagens do cubo soma, utilizamos um processo de contagem tão usual na análise combinatória. Não conseguimos, porém realizar um processo de contagem que poderíamos chamar de rápido, uma vez que reduzimos a grupos muito pequenos. Na maior parte das bases (da 2ª até a 45ª) os grupos tiveram tamanhos pequenos (2, 4, 6 ou 8 elementos). Apenas na primeira base, é que foi realizado um processo mais eficiente com mais elementos (104 soluções).

A maneira proposta por este artigo de agrupar as montagens desse jogo através da escolha de três peças para formar bases não se mostrou adequada. Com isso, temos a clareza que se pode concluir que outras formas de contagem podem ser trabalhadas a fim de gerar uma contagem mais rápida e eficiente. A maior contribuição desse trabalho é o registro da maior parte das 240 soluções diferentes de montagem que possui o cubo soma.

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

NETO, Francisco Q.; JOSÉ, Antônio N.; BARBOSA, Francisco C. S. Dobraduras Modulares de Poliedros: Uma Ferramenta Para o Aprendizado de Geometria. 2011.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Cubo_soma Acessado dia 29/10/2012 às 22h15min

http://www.slideshare.net/btizatto1/cubo-soma Acessado dia 31/10/2012 às 19h45min

http://jogosmatcon.blogspot.com.br/2010/10/cubo-da-soma.html Acessado dia 31/10/2012 às 19h58min

http://www.ludologia.pro.br/ludoteca/jogos/jogos-de-tabuleiro/149-cubo-soma.html Acessado dia 31/10/2012 às 20h10min

https://uspdigital.usp.br/siicusp/cdOnlineTrabalhoVisualizarResumo?numeroInscricaoTrabalho=4854&numeroEdicao=16 Acessado dia 31/10/2012 às 21h32min